$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[rr, bend left, "\Delta_B"] \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "q"] & I^{C(B,I)} \arrow[d, "k"] \arrow[dr, bend left, "p_{\alpha f}"] & \\
& A \arrow[r, "\Delta_A"] & I^{C(A,I)} \arrow[r, "p_\alpha"] & I
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 1. Diagrama del ejercicio 1.

**1.** Escribamos $I = [0, 1]$.

(a) Si $A \in$ **CHaus** probar que si $x \neq y \in A$, entonces existe una función continua $f : A \to I$ con $f(x) \neq f(y)$.

(b) En las mismas condiciones, probar que $\mathbf{CHaus}(-, I) : \mathbf{CHaus}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ es fiel.[1]

Si $X$ es un conjunto, escribimos $I^X$ el producto de $|X|$ copias de $I$ con la topología producto, y sus proyecciones $p_x : I^X \to X$, para $x \in C$. Vamos a ver:

**Teorema.** *La compactificación de Stone-Cěch de $B$ se puede construir como la clausura de la imagen de $\Delta_B : B \to I^{C(B,I)}$.*

Dada $f : B \to A$ con $B \in$ **Top** y $A \in$ **CHaus**, consideremos el diagrama de la Figura 1, donde $k$ está definida por $p_\alpha k = p_{\alpha f}$ y el cuadrado con vértice $P$ es un pullback en **Top**, y por lo tanto en **CHaus**.

(c) Si $A \in$ **CHaus**, mostrar que el mapa continuo $\Delta_A : A \to I^{C(A,I)}$ dado por $p_\alpha \Delta_A = \alpha : A \to I$ es un monomorfismo.

(d) Probar que un monomorfismo en **CHaus** es necesariamente una inmersión (= homeomorfismo sobre su imagen).

(e) Mostrar que $P \to I^{C(B,I)}$ es un monomorfismo, de forma que $P$ puede identificarse con un subespacio cerrado de $I^{C(B,I)}$.

(f) Probar que el diagrama exterior conmuta, es decir, $p_\alpha \Delta_A f = p_{\alpha f} \Delta_B$. Deducir que existe $g : B \to P$ tal que $qg = f$.

(g) Deducir que $\overline{\Delta_B(B)} \subset P$, y entonces

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta_B"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{\Delta_B(B)} \arrow[d, "\exists!"] \\
& A
\end{tikzcd}
$$

de forma que $\overline{\Delta_B(B)}$ es una reflexión de $B$ a lo largo de $\mathbf{CHaus} \hookrightarrow \mathbf{Top}$.

[1]Se dice que $I$ es un *cogenerador* o *coseparador*.