

Práctico 6

1. Suponga una onda de gravedad en un fluido incompresible en un estanque de profundidad h e infinito en las direcciones x e y . (a) Mostrar que la relación de dispersión para esta onda es $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$. (b) Hallar la velocidad de fase y la velocidad de grupo. (c) Hallar el límite de ambas velocidades en los casos $kh \gg 1$ y $kh \ll 1$. (d) Suponiendo que la onda se propaga en la dirección x y que es independiente de y , hallar la energía cinética y la energía potencial de la onda por unidad de longitud transversal y por unidad de longitud de onda.

2. (a) Suponga un tanque de bordes rígidos y dimensiones (Lx, Ly, h) que está abierto en la parte superior. Hallar el potencial de velocidades para la onda de gravedad. (b) Suponga un tanque circular con borde rígido de radio a y profundidad h abierto en la parte superior. Hallar el potencial de velocidades para la onda de gravedad.

3. Suponga que en la superficie de un líquido en aguas profundas se propaga una onda que es combinación lineal de dos ondas armónicas de la misma amplitud pero con longitudes de onda diferentes, λ_1 y λ_2 (a) Halle la onda resultante que se propaga en el medio. (b) Interprete los resultados obtenidos en la parte anterior.

4. Un paquete de ondas gaussiano se define como:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

con $a(k) = A_0 e^{-\sigma(k-k_0)^2}$. Considere que $\omega(k)$ se puede expresar como $\omega(k) = \omega_0 + c_g(k - k_0) + \gamma(k - k_0)^2$ con $\omega_0 = \omega(k_0)$, $c_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{\omega_0}$ y $\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{\omega_0}$. (a) Muestre que, si se desprecia el término de segundo orden, el paquete conserva su forma a medida que se propaga y hallar la velocidad de propagación. (b) Si ahora se incluye el término de segundo orden en el desarrollo, muestre que el ancho del paquete aumenta y la amplitud disminuye a medida que se propaga.

5. Generalmente en un problema de propagación ondulatoria la relación dispersión $\omega(k)$ queda determinada de manera implícita a partir de las condiciones de borde del problema de la manera $\Omega(k, \omega) = 0$, donde Ω es una función diferenciable. Encuentre una expresión general para la velocidad de grupo conociendo la función Ω .

6. Halle la velocidad de grupo para una onda que cumple con la ecuación:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 u = 0$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

7. Muestre que para cualquier guía de onda rectangular de paredes rígidas se cumple

$$\frac{c_g}{c_f} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{lm}}{\omega}\right)^2}$$

8. Considere una guía de ondas de sección circular de radio a y paredes rígidas. La guía es infinita en la dirección z . (a) Mediante separación de variables, encuentre una expresión para la presión acústica dentro de la guía. (b) Hallar la frecuencia de corte del modo 1,1 y realizar un gráfico de velocidad de fase en función de la frecuencia para ese modo.

9. Considere una guía de ondas de sección circular de radio $a=15 \text{ cm}$ y paredes rígidas. La guía es infinita en la dirección z . Hallar la frecuencia máxima para la onda acústica que se puede propagar en la guía sin dispersión.

10. Considere la propagación de una onda acústica a través de un fluido con pérdidas. Dicho fluido sigue el modelo de Stokes. Esto determina la siguiente relación entre la presión acústica y la variación de densidad:

$$P' = c^2 \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho'$$

donde τ es un tiempo de relajación asociado a las pérdidas. (a) Mostrar que, para una onda armónica, existe una diferencia de fase entre la presión acústica y la densidad y hallarla. (b) Muestre que para esta ecuación de estado la condensación obedece la siguiente ecuación de ondas:

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 \rho' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0$$

(c) Utilizando la transformada de Fourier en el tiempo, muestre que la ecuación anterior se puede expresar como una ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{\rho}' + \kappa^2 \tilde{\rho}' = 0$$

donde $\kappa^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{i\omega\tau+1}$ y $\tilde{\rho}'$ representa la transformada de Fourier de ρ' . (d) Expresando $\kappa = \kappa_0 - i\alpha$, hallar una expresión para κ_0 y α en función de ω y τ . Interpretar el significado físico de κ_0 y α (e) Hallar la velocidad de fase y la velocidad de grupo para esta onda. (f) Mostrar que si $\omega\tau \ll 1 \rightarrow \alpha \propto \omega^2$. (g) Describa como obtendría los parámetros κ_0 y α a partir de medidas de laboratorio.

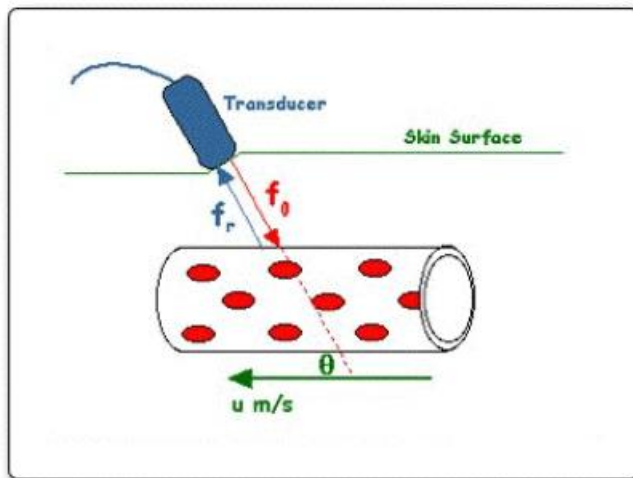
11. La relación $\omega = ck$ entre la frecuencia y el número de onda es válida solamente para una onda armónica que se propaga en un fluido en reposo. Consideremos ahora que el fluido tiene un flujo homogéneo y estacionario con velocidad \vec{v}_0 . (a) Mostrar que, desde un sistema de coordenadas fijo, la ecuación anterior queda expresada como $\omega = ck + \vec{v}_0 \cdot \vec{k}$

(b) **Efecto Doppler.** Mostrar que el resultado anterior implica que cuando el sonido emitido por una fuente armónica en reposo (respecto al medio) de frecuencia ω_0 es recibida por un observador que se mueve con una velocidad relativa \vec{v}_0 respecto al medio, éste percibe una frecuencia ω dada por:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \left(\frac{v_0}{c}\right) \cos(\theta)\right)$$

donde θ es el ángulo formado entre los vectores \vec{v}_0 y \vec{k} . (c) Mostrar que si ahora es la fuente la que se mueve con respecto al medio mientras que el observador está en reposo la relación anterior cambia a:

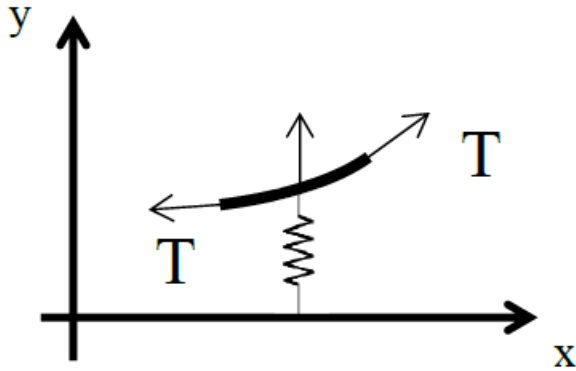
$$\omega = \omega_0 \left(1 + \left(\frac{v_0}{c}\right) \cos(\theta)\right)$$



(d) Una aplicación típica del efecto Doppler en medicina consiste en estimar el flujo sanguíneo a través de los vasos. Para ello se utiliza un transductor doble en el que uno de ellos emite una onda de frecuencia ω_0 , que se refleja en los constituyentes sanguíneos (típicamente glóbulos rojos) y retorna al transductor de recepción que recibe una frecuencia ω_r . Mostrar que el corrimiento frecuencial $\Delta\omega = \omega_r - \omega_0$ viene dado por:

$$\Delta\omega = \pm 2\omega_0 \left[\frac{\left(\frac{v_0}{c}\right) \cos(\theta)}{1 + \left(\frac{v_0}{c}\right) \cos(\theta)} \right] \cong \pm 2\omega_0 \left(\frac{v_0}{c}\right) \cos(\theta)$$

Donde el signo + vale cuando el flujo se acerca a la fuente y el signo – cuando se aleja. La aproximación final es válida si $v \ll c$ como efectivamente ocurre en la aplicación médica. Por lo tanto, conociendo el corrimiento frecuencial y el diámetro del vaso sanguíneo, se puede estimar el flujo.



12. Una cuerda infinita de densidad lineal de masa ρ , se encuentra sujeta a una tensión \vec{T} e inmersa en un medio puramente elástico. Dicho medio ejerce sobre la cuerda una fuerza vertical por unidad de longitud de la forma $-\gamma y(x,t)$ donde $y(x,t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda con respecto a su posición de equilibrio y γ es una constante real positiva (ver esquema adjunto). (a) Deduzca la ecuación que describe el

movimiento vertical de la cuerda. *Nota: Asuma pequeñas oscilaciones.* (b) Buscando soluciones de la forma $y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ encuentre la relación $k(\omega)$. Discuta qué relaciones deben cumplir ω , γ , \vec{T} y $c_0 = \sqrt{|\vec{T}|/\rho}$ para que se cumplan las siguientes condiciones e interprételas físicamente:

- i. k es real
- ii. k es imaginario puro
- iii. $k=0$

(c) ¿Existe dispersión? En caso afirmativo bosqueje la curva de dispersión para la velocidad de fase y la velocidad de grupo.

Método de diferencias finitas 1D

En esta sección introduciremos el método de diferencias finitas para resolver la ecuación de ondas. El método fue introducido por Euler en el siglo XVIII pero su desarrollo y aplicación tomó interés y se analizó en profundidad recién en el siglo XX a partir de la utilización del cálculo numérico. Se utilizó fuertemente como un algoritmo para resolver las ecuaciones de Maxwell a través de un mallado espacial y temporal. En este curso, utilizaremos el método en 1D y 2D.

Comenzaremos por realizar la aproximación de la derivada de una función mediante diferencias finitas. Por definición tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Para calcular la derivada mediante diferencias finitas, supondremos que la función es derivable n veces en el punto x . Haciendo uso del teorema de Taylor podemos escribir:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 f''(x) + \frac{1}{3!} \Delta x^3 f'''(x) + \dots + \frac{1}{n!} \Delta x^n f^n(x) \quad (2)$$

Reordenando los términos tenemos:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{1}{2} \Delta x f''(x) + \dots \quad (3)$$

Si tomamos el límite $\Delta x \rightarrow 0$ recuperamos la definición (1). Sin embargo, en el cálculo numérico de la derivada, Δx puede ser pequeño, pero siempre es finito. Por lo tanto, al conservar el segundo término del lado derecho en (3) vemos que el error que cometemos al aproximar la derivada por diferencias finitas es del orden de $\Delta x f''(x)$. Por supuesto, si la función es lineal, el cálculo es exacto. Sin embargo, en un problema genérico, vemos que el error es proporcional al paso espacial Δx . La forma expresada en (3) no es la única posible para aproximar la derivada de una función. Consideremos la expansión de Taylor de $f(x - \Delta x)$:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 f''(x) - \frac{1}{3!} \Delta x^3 f'''(x) + \dots \quad (4)$$

Haciendo la diferencia entre (1) y (4) y reordenando los términos tenemos:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x) + \frac{1}{3!} \Delta x^2 f'''(x) + \dots \quad (5)$$

Vemos en este caso que el error que cometemos al aproximar la derivada de esta forma es del orden $\Delta x^2 f'''(x)$ que es menor al caso anterior. El “costo” de esta mejor estimación para la derivada es que debemos utilizar puntos de la grilla que están más espaciados entre sí.

Si lo que nos interesa es aproximar $f''(x)$ entonces sumamos (1) y (4). Luego de reordenar términos tenemos:

$$\frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} = f''(x) + \frac{2}{4!} \Delta x^2 f^{(4)}(x) + \dots \quad (6)$$

Debido a la simetría respecto al punto x , (6) se conoce como aproximación de diferencia central. El error en la aproximación es del orden $\Delta x^2 f^{(4)}(x)$. Este es el método que vamos a utilizar en este curso.

2.1 Solución de la ecuación de ondas 1D

La ecuación de ondas 1D la podemos escribir como:

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7)$$

donde y representa por ejemplo el desplazamiento transversal en una cuerda y c es la velocidad de propagación de la onda. Escribiremos ahora la ecuación (7) en términos de la aproximación de diferencia central. Usaremos la notación y_j^k para referirnos a la variable y en la posición $x(j) = (j - 1)\Delta x$ y el tiempo $t(k) = (k - 1)\Delta t$. Tenemos entonces:

$$c^2 \frac{(y_{j+1}^k - 2y_j^k + y_{j-1}^k)}{\Delta x^2} = \frac{(y_j^{k+1} - 2y_j^k + y_j^{k-1})}{\Delta t^2} \quad (8)$$

Podemos reordenar la ecuación anterior para despejar y_j^{k+1} en términos de las otras cantidades:

$$y_j^{k+1} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (y_{j+1}^k - 2y_j^k + y_{j-1}^k) + 2y_j^k - y_j^{k-1} \quad (9)$$

Notemos que a partir de esta expresión podemos obtener el valor de y en la posición j y en el tiempo $k + 1$ conociendo el valor de esta variable en tiempos anteriores y posiciones vecinas. La ecuación (9) representa entonces la solución a la ecuación de ondas (7) con una aproximación de segundo orden y se denomina centrada en el espacio y en el tiempo. Para conocer y_j^3 (es decir $k = 2$), precisamos conocer y_j^2 , y_{j+1}^2 , y_{j-1}^2 e y_j^1 . Estas cantidades están dadas por las condiciones iniciales del problema:

$$y(x, t = 0) = \phi(x) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y(x, t = 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (11)$$

Por lo tanto, de (10) obtenemos:

$$y_j^1 = \phi_j \quad (12)$$

A partir de la ecuación (11) podemos obtener y_j^2 . Una forma sería:

$$y_j^2 = y_j^1 + \Delta t \psi_j \quad (13)$$

Volviendo a la ecuación (9) notamos que para obtener la solución en la posición j y en el instante $k + 1$ precisamos conocer la variable y en las posiciones adyacentes en un instante anterior. Sin embargo, esto no es posible en los puntos extremos $j = 1$ y $j = N_x$. Por lo tanto, su valor debe estar dado para todo instante de tiempo, es decir, para resolver el problema debemos especificar las condiciones de borde. Hay muchas condiciones de borde posibles que se clasifican conforme si conocemos el valor de y en el borde

(conocida como condición de Dirichlet) o el valor de $\partial y/\partial x$ en el borde (Conocida como condición de Neumann). Los casos más comunes son borde fijo $y(\text{borde}, t) = 0$ o borde libre $\partial y(\text{borde}, t)/\partial x = 0$. Estas dos condiciones se pueden implementar en la solución por diferencias finitas escribiendo:

$$y_1^k = 0 \text{ o } y_{N_x}^k = 0 \quad (14)$$

para la condición de Dirichlet, y :

$$y_1^k = y_2^k \text{ o } y_{N_x}^k = y_{N_x-1}^k \quad (15)$$

para la condición de Neumann.

También es posible simular una cuerda infinita con las condiciones de borde apropiadas.

2.2 Estabilidad numérica

Un último aspecto a tener en cuenta para implementar la solución numérica de (7) utilizando el esquema de diferencias finitas (9) es lo que se llama la estabilidad numérica de la solución. Para ello vamos a definir el número de Courant:

$$\Lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (16)$$

y la resolución de muestreo espacial:

$$N_\lambda = \frac{\lambda_{min}}{\Delta x} \quad (17)$$

donde λ_{min} es una cantidad del “mundo real” asociada a la menor longitud de onda que puede propagarse en la cuerda. Este número representa la cantidad de puntos de la grilla espacial que se necesitan para representar una longitud de onda.

Para que la solución sea numéricamente estable se debe cumplir la condición¹ $\Lambda \leq 1$, conocida como condición de Courant-Friedrichs-Lewy o CFL. En un problema en concreto la velocidad c de la onda y la longitud L de la cuerda son datos. El paso espacial Δx es de nuestra elección ya que su valor determina

¹ La demostración de esta condición escapa los cometidos del curso. Existen varios libros de texto donde se puede ver una demostración. Ver por ejemplo: Numerical Recipes, Cambridge University Press 3rd edition, (2007). Sin embargo, podemos tener una idea intuitiva de lo que significa la condición CFL. Notemos que el número de Courant Λ aparece en (9) como factor de la derivada segunda espacial. Recordemos que el error cometido en esta derivada es de segundo orden en Δx . Por lo tanto, al multiplicar la derivada segunda por Λ^2 el error pasa a ser del orden $(c\Delta t)^2$. La condición $\Lambda \leq 1$ impide entonces que los errores crezcan exponencialmente en cada iteración de (9).

la cantidad de puntos N_x de la grilla espacial. Por lo tanto la condición CFL se traduce en una condición para el paso temporal Δt :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (18)$$

Ejercicio numérico:

Considere una cuerda de longitud L con extremos fijos y condiciones iniciales

$$y(x, 0) = \phi(x)$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0$$

Resolver numéricamente el problema utilizando el método de diferencias finitas.