

---

# Grafos

---

Notas para el curso de Matemática Discreta 2023, dictado por  
Mariana Haim y Santiago Robaina.  
(Extraído y adaptado de las notas del curso 2020)

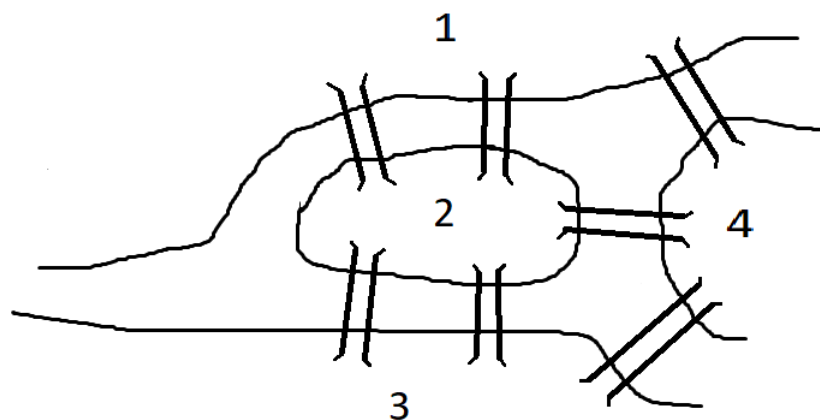
Centro de Matemática.  
Facultad de Ciencias - UdelaR

## 0.1. Generalidades

Para motivar este capítulo presentaremos dos problemas. El primero es un problema célebre que data del siglo XVI y que, según se considera, da origen a la teoría de grafos. El segundo es un problema lúdico que circula entre los escolares (o circulaba en alguna época y alguna escuela).

### 1. Problema de los puentes de Königsberg

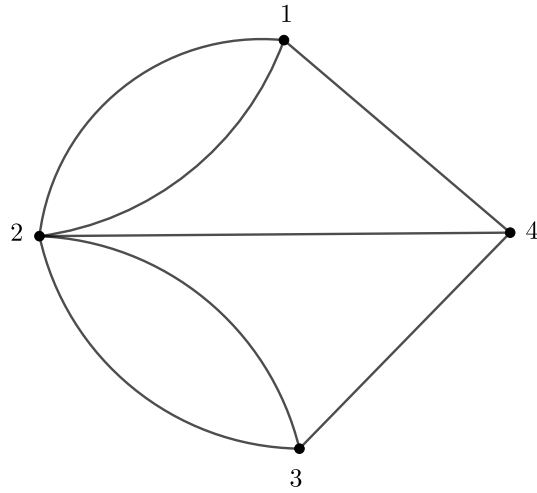
La ciudad de Königsberg (antigua capital de Prusia Oriental, hoy llamada Kaliningrado) estaba atravesada por el río Pregel, sobre el que se disponían siete puentes como se muestra a continuación:



En este escenario se plantea el siguiente problema: ¿Es posible recorrer todos los puentes pasando por cada uno una única vez y terminando el recorrido en el punto de partida?

Es posible resolver el problema listando todos los posibles recorridos que no repitan puentes y verificando si entre ellos hay uno que cumpla las condiciones. Sin embargo el matemático suizo Leonard Euler dio una solución en el año 1736 (en una publicación titulada *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*) que puede generalizarse a toda una familia de problemas similares a este.

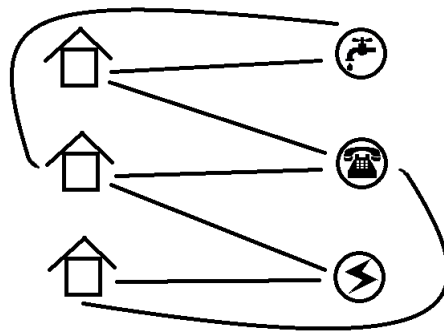
El primer paso en el análisis del problema consiste en simplificar el contexto hasta quedarse con los elementos esenciales del mismo. Observamos entonces que hay dos tipos de objeto en el problema: las regiones y los puentes. Se puede entonces representar el mapa anterior por medio de la siguiente figura, donde las regiones son representadas por puntos y los puentes por aristas. A los efectos del problema que estamos considerando no hay diferencia entre el mapa y esta figura (a la que vamos a denominar *grafo*, o más específicamente en este caso, *multigrafo*).



En la actualidad, la disposición de los puentes es diferente a la descrita, por lo que el problema ha cambiado. El lector puede plantearse entonces, además del propuesto, el problema de los puentes de Kaliningrado.

**2. Problema de la conexión de servicios básicos en el plano**

Se disponen en un territorio plano tres casas y tres usinas de servicios públicos: agua, telefonía y electricidad. El problema consiste en conectar las tres casas a los tres servicios mediante conectores independientes (cables o ductos) que no se corten entre sí. (Como nos encontramos en un mundo plano, no es posible pasar un cable por encima de otro.)



Hay una diferencia esencial entre el primer problema y el segundo. Mientras que el primero depende solamente de la estructura del grafo, es decir, de como están conectados los puntos mediante aristas, en el segundo se agrega una nueva circunstancia: el hecho de que el grafo está contenido en el plano. Veremos más adelante que estos

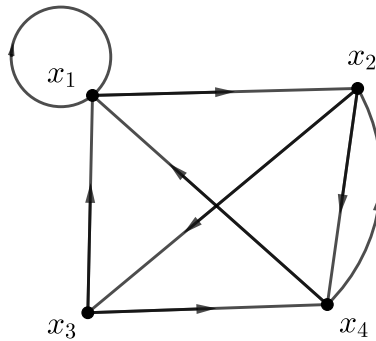
corresponden a dos tipos diferentes de problemas más generales y mostraremos sus soluciones.

### 0.1.1. Primeras definiciones y ejemplos

Un **grafo dirigido** es un par  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito al que llamamos conjunto de **vértices** y  $E$  es un subconjunto de  $V \times V$  al que llamamos conjunto de **aristas**.

Observar que el conjunto de aristas es una relación en el conjunto de vértices. Tenemos una nueva representación (esta vez geométrica) de las relaciones definidas en un conjunto. Por ejemplo, para el conjunto  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  podemos representar la relación  $\mathcal{R} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2)\}$  como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Nos interesa sobretodo definir grafos no dirigidos, es decir, que tengan aristas no orientadas. Para esto debemos reemplazar los pares ordenados por pares no ordenados.

Dados dos conjuntos  $X$  e  $Y$  consideramos el conjunto

$$X \cdot Y = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}$$

y el conjunto  $X_s = \{\{x\} \mid x \in X\}$ . Observar que  $X_s \subseteq X \cdot X$ . Un **grafo no dirigido** (también llamado simplemente **grafo**) es un par  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E \subset V \cdot V - V_s$ .

Decimos que dos vértices  $x$  y  $y$  de un grafo no dirigido  $G$  son **adyacentes** si  $\{x, y\}$  es una arista del grafo.

Si bien, todas estas nociones generales se adaptan al caso dirigido, nos concentraremos en grafos no dirigidos (a los que llamaremos, como dijimos antes, simplemente **grafos**)

Dado un grafo  $G = (V, E)$  y un vértice  $v \in V$ , el **grado de**  $v$  se define como

$$gr(v) = \#\{w \in V \mid v \text{ y } w \text{ son adyacentes}\}$$

Notar que el grado de un vértice  $v$  coincide con la cantidad de aristas  $e$  tales que  $v \in e$ . El primer resultado, simple y útil en Teoría de grafos es el que se conoce como *Hand-shaking Lemma* o Lema del *apretón de manos*.

**Lema 0.1.1.** *Lema de hand-shaking* Dado un grafo  $G = (V, E)$ , se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2\#E$$

*Demostración.* Cada sumando de la izquierda coincide con la cantidad de aristas que “tocan.” a  $v$ . En la suma, cada arista  $\{v, w\}$  está considerada dos veces, una en  $gr(v)$  y otra en  $gr(w)$ , por lo que el término de la izquierda es exactamente el doble de la cantidad total de aristas.  $\square$

La definición de grado de un vértice se extiende al caso de multigrafos (caso en que se permiten varias aristas entre dos vértices fijos y aristas de un vértice a sí mismo que llamamos lazos), y vale el lema de hand-shaking, como veremos en el próximo capítulo.

## 0.1.2. Isomorfismos de grafos

Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  dos grafos. Una función  $f : V_1 \rightarrow V_2$  es un **isomorfismo de grafos** si

- (i)  $f$  es biyectiva, y
- (ii)  $\{x, y\} \in E_1$  si y sólo si  $\{f(x), f(y)\} \in E_2$ . Es decir, dos vértices son adyacentes si y sólo si sus imágenes por  $f$  lo son.

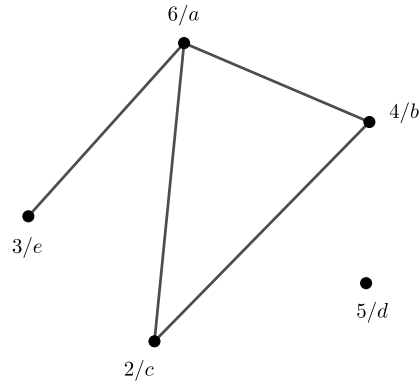
Observar que si  $f : V_1 \rightarrow V_2$  es un isomorfismo de grafos, entonces queda definida una función biyectiva  $f : E_1 \rightarrow E_2$  (usamos la misma notación que para la función en los vértices) que asocia a la arista  $\{x, y\} \in E_1$  la arista  $\{f(x), f(y)\} \in E_2$ . Luego notamos al isomorfismo por  $f : G_1 \rightarrow G_2$  entendiendo esto como una correspondencia tanto entre los vértices como entre las aristas de ambos grafos. Emplearemos la notación  $G_1 \cong G_2$  para indicar que ambos grafos son **isomorfos**, es decir, si existe un isomorfismo entre ellos.

**Ejemplo 0.1.2.** Consideramos los siguientes grafos:

- $V_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $E_1$  definido por  $x$  e  $y$  son adyacentes si  $x$  e  $y$  tienen algún divisor primo en común.

- $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$  y  $E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}\}$ .

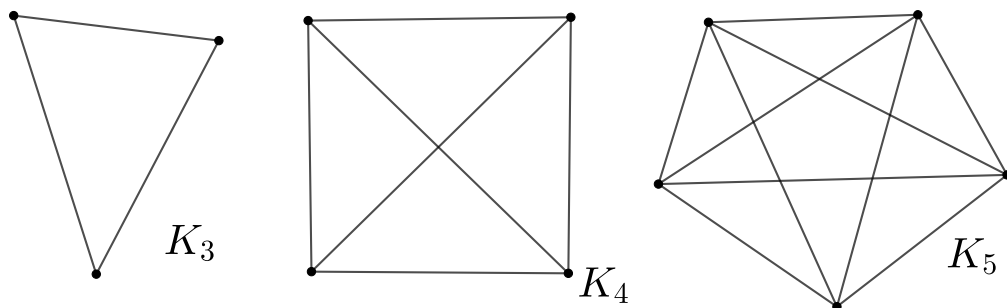
Definimos  $f : V_1 \rightarrow V_2$  por  $f(2) = c$ ,  $f(3) = e$ ,  $f(4) = b$ ,  $f(5) = d$  y  $f(6) = a$ . Puede verse que  $f$  es un isomorfismo entre los grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$ .



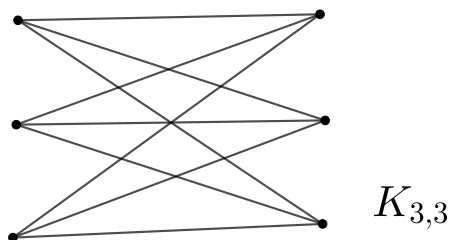
Observar que  $f$  no es el único isomorfismo entre ambos grafos. Por ejemplo uno puede considerar  $g : V_1 \rightarrow V_2$  por  $g(2) = b$ ,  $g(3) = e$ ,  $g(4) = c$ ,  $g(5) = d$  y  $g(6) = a$ . ¿Hay algún otro isomorfismo?

En general nos interesarán, más que los grafos, las clases de isomorfismo de grafos. Por ejemplo, al mirar los grafos del Ejemplo 0.1.2, veremos los números y las letras simplemente como puntos que están unidos de a pares, sin importar el nombre de los vértices o la representación de las aristas.

Un grafo  $G = (V, E)$  se dice **completo** si  $E = (V \cdot V) \setminus V_s$ , donde. Es decir que es el grafo de vértices  $V$  con el máximo número de aristas. Podemos observar que la clase de isomorfismo de un grafo completo sólo depende del número de vértices, es decir para cada  $n \geq 1$  todos los grafos completos con  $n$  vértices son isomorfos. Luego notamos por  $K_n$  a cualquiera de ellos (o a todos ellos).



Un grafo  $G = (V, E)$  es **bipartito** si  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y  $E = V_1 \cdot V_2$ . Haciendo la misma consideración que para el grafo completo, ponemos la notación  $K_{n,m}$  para referirnos al grafo bipartito con vértices  $V = V_1 \cup V_2$  con  $\#V_1 = n$  y  $\#V_2 = m$ .



### 0.1.3. Subgrafos

Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Decimos que el grafo  $G' = (V', E')$  es un **subgrafo** de  $G$  si  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ . Si fijamos un grafo  $G$ , podemos notar el conjunto de los subgrafos de  $G$  como  $\mathcal{S}(G)$  y definir en este la siguiente relación de orden:

$$G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow G_1 \text{ es subgrafo de } G_2.$$

Puede verse que en general esta relación de orden no es total y que tiene al grafo vacío como mínimo y al grafo  $G$  como máximo.

Un **encaje** de un grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$  en otro grafo  $G_2 = (V_2, E_2)$  es una función inyectiva  $f : V_1 \rightarrow V_2$  tal que si  $\{x, y\} \in E_1$ , entonces  $\{f(x), f(y)\} \in E_2$ . Denotamos también al encaje por  $f : G_1 \rightarrow G_2$ , y por  $f : E_1 \rightarrow E_2$  a la función inducida en las aristas.

Dados dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  escribimos

$$G_1 \preceq G_2 \Leftrightarrow \text{existe un encaje de } G_1 \text{ en } G_2.$$

**Observación 0.1.3.** La relación  $\preceq$  es reflexiva y transitiva pero no es antisimétrica. De todas maneras se tiene un resultado en la dirección de la antisimetría que es el siguiente:

$$G_1 \preceq G_2 \preceq G_1 \Rightarrow G_1 \cong G_2$$

En efecto, probaremos que el encaje  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un isomorfismo: como hay una función inyectiva ( $f$ ) de  $V_1$  a  $V_2$  y una función inyectiva ( $g$ ) de  $V_2$  a  $V_1$ , se deduce que  $\#V_1 = \#V_2$  y por tanto  $f : V_1 \rightarrow V_2$  es biyectiva.

Por otra parte, notar que  $f$  induce una función  $f_E : E_1 \rightarrow E_2$  definida por  $f(\{x, y\}) = \{f(x), f(y)\}$ . Es claro que  $f_E$  es inyectiva. De la misma manera se tiene una función inyectiva  $g_E : E_2 \rightarrow E_1$ . Se deduce que  $\#E_1 = \#E_2$  y por lo tanto  $f_E$  es biyectiva. A partir de esto es claro que  $f$  es un isomorfismo.

**Proposición 0.1.4.** *Se tiene que  $G_1 \preceq G_2$  si y sólo si existe  $G'_1$  un subgrafo de  $G_2$  que es isomorfo a  $G_1$ .*

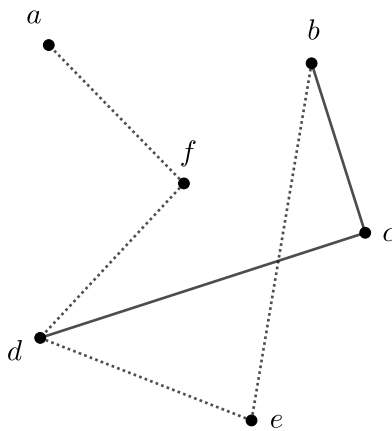
*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que tenemos  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$ , y que  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un encaje. Luego definimos el subgrafo  $G'_1 = (f(V_1), f(E_1))$ . Es claro por la definición de encaje que  $f$  define un isomorfismo entre  $G_1$  y  $G'_1$ .

( $\Leftarrow$ ) Un isomorfismo  $f : G_1 \rightarrow G'_1$  (con  $G'_1 \leq G_2$ ) se extiende de forma obvia a un encaje  $f : G_1 \rightarrow G_2$ . □

Sean  $G = (V, E)$  un grafo y  $V' \subset V$  un subconjunto cualquiera. El **subgrafo inducido** por  $V'$  es el máximo (bajo el orden  $\leq$  definido al comienzo de esta sección) subgrafo de  $G$  que tiene a  $V'$  como conjunto de vértices.

En la siguiente figura puede verse el grafo inducido por los vértices  $b, c$  y  $d$  de un grafo  $G = (V, E)$  con  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  y  $E = \{\{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$ .

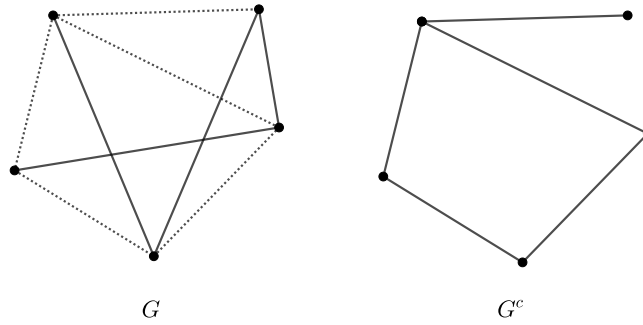




Definimos el **complemento** de un grafo  $G = (V, E)$  como el grafo

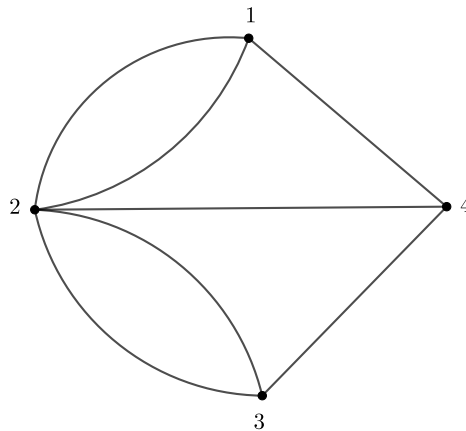
$$G^c = (V, (V \cdot V) \setminus (E \cup V_s))$$

. Es decir que es el grafo que resulta de sacarle a  $K_n$  las aristas de  $G$ , donde  $n = \#V$ .



#### 0.1.4. Multigrafos

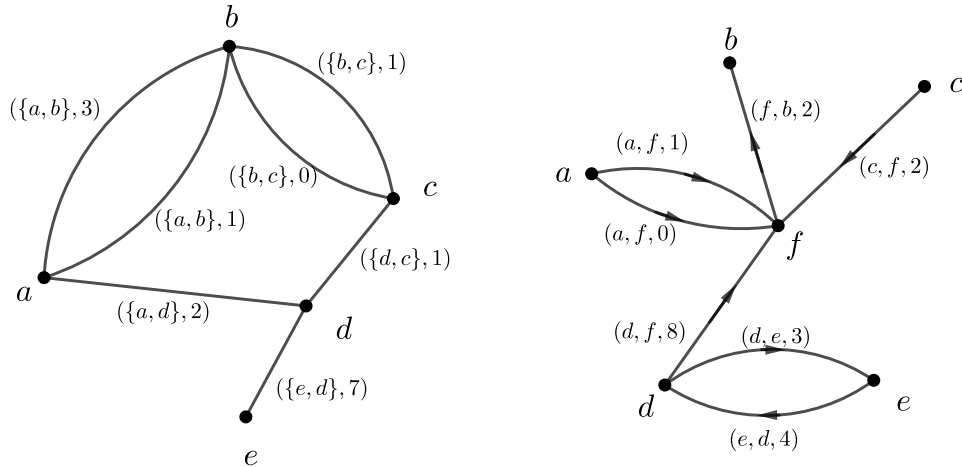
Volvamos al problema de los puentes de Königsberg y a la forma de modelarlo.



Como podemos ver, hay dos aristas entre 1 y 2 y dos aristas entre 2 y 3, luego la figura anterior no se ajusta a nuestra definición de grafo. Haremos entonces las siguientes definiciones:

Un **multigrafo** es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es un subconjunto finito de  $(V \cdot V) \times \mathbb{N}$ .

Un **multigrafo dirigido** es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es un subconjunto finito de  $(V \times V) \times \mathbb{N}$ .



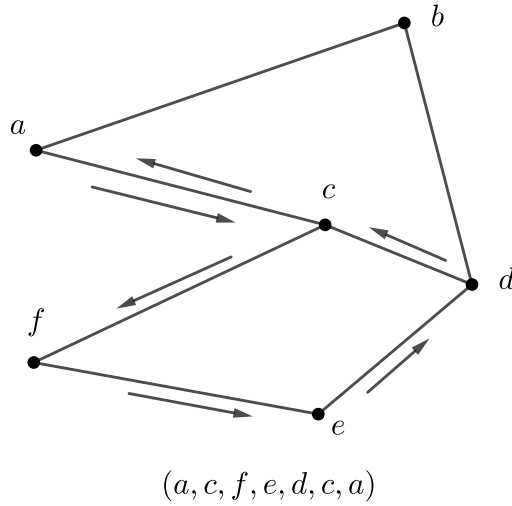
Las definiciones generales dadas anteriormente pueden extenderse (tanto en el caso dirigido como en el caso no dirigido) para definir:

- isomorfismo de multigrafos,
- encaje de un multigrafo en otro,
- sub-multigrafo, y
- sub-multigrafo inducido por un subconjunto de vértices.

No lo hacemos para no entrar en detalles técnicos, pero invitamos al lector interesado a intentarlo.

### 0.1.5. Caminatas en grafos

Un **camino** en un grafo  $G = (V, E)$  es una secuencia de vértices  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que  $\{x_{i-1}, x_i\} \in E$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . En este caso decimos que el camino une  $x_0$  con  $x_n$ . Si  $x_0 = x_n$  el camino se dice **cerrado**.



La **longitud** del camino es, en este caso, el número  $n$  (la cantidad de aristas por las que se pasa). El camino cerrado  $(x_0)$  se dice **trivial** y su longitud es 0.

Decimos que un camino es un **recorrido** si no repite aristas, y que es un **camino simple** si no repite vértices con excepción de que se repitan los extremos.

Llamaremos **circuito** a un recorrido cerrado y **ciclo** a un camino simple cerrado.

Observar que un camino simple abierto (no cerrado) es un recorrido. También sucede que un ciclo de longitud mayor o igual a tres es un circuito.

Para dar un camino en un multigrafo, debemos especificar cuál de las aristas se toma al unir dos vértices adyacentes. Teniendo esto en cuenta definimos un **camino** en un multigrafo  $G = (V, E)$  como una secuencia

$$(x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n)$$

donde  $x_1, \dots, x_n \in V$  y para cada  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $e_i$  es una arista que une  $x_i$  con  $x_{i+1}$ .

También de manera análoga, se definen **camino**, **recorrido**, **circuito**, **camino simple** y **ciclo** en multigrafo o en un multigrafo dirigido.

Enunciamos y probamos el siguiente resultado para grafos, aunque vale (y la prueba también) para grafos dirigidos, multigrafos, multigrafos dirigidos.

**Proposición 0.1.5.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo y  $x, y \in V$ . Si existe un camino que une  $x$  con  $y$ , entonces existe un camino simple que une ambos puntos.*

*Demostración.* Supongamos que tenemos un camino de largo  $n$  desde  $x$  a  $y$ . Consideremos entonces el conjunto de todos los caminos de  $x$  a  $y$  con longitud menor o igual a  $n$ , al que notamos por  $\mathcal{C}_n$ . Es claro que este conjunto es no vacío, además es finito porque  $V$  es finito. Luego existe un camino  $c = (x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$  que minimiza

la longitud de todos los elementos de  $\mathcal{C}_n$ .

Si  $c$  no es un camino simple, entonces existen dos índices diferentes  $i, j \in \{0, \dots, k\}$  tal que  $x_i = x_j$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer  $i < j$ .

Si  $j < n$ , podemos observar que  $c' = (x_0, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_k)$  es un camino en  $\mathcal{C}_n$  de longitud estrictamente menor a  $k$ .

Si  $j = n$ , se tiene que  $i \neq 0$  (la repetición es  $x_i = x_n$ ) y por tanto el camino  $c' = (x_0, \dots, x_i)$  es un camino en  $\mathcal{C}_n$  de longitud estrictamente menor a  $k$ .

En ambos casos, se construyó un camino  $c'$  en  $\mathcal{C}_n$  de longitud estrictamente menor a  $k$ , lo que contradice el hecho de que  $k$  es el mínimo de las longitudes de los caminos en  $\mathcal{C}_n$ .

Concluimos entonces que  $c$  debe ser un camino simple.  $\square$

### 0.1.6. Conexión

Diremos que un grafo  $G = (V, E)$  es **conexo** si para todo par de vértices  $x, y \in V$ , existe un camino que los une.

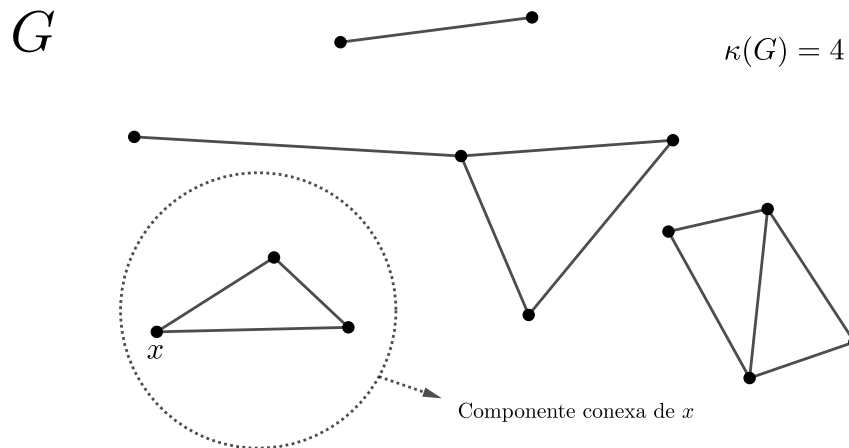
Dado un grafo  $G = (V, E)$ , podemos definir la relación  $\mathcal{R}$  en el conjunto de los vértices de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{existe un camino que une } x \text{ con } y.$$

La **componente conexa** de un vértice  $v \in V$  es el subgrafo de  $G$  inducido por el subconjunto de vértices

$$V' = \{x \in V \mid \text{existe un camino de } x \text{ a } v\}.$$

Usaremos la notación  $\kappa(G)$  para indicar el número de componentes conexas del grafo  $G$ , que coincide con el cardinal del cociente  $V/\mathcal{R}$ . Observar que  $G$  es conexo si y sólo si  $\kappa(G) = 1$ .



Puede observarse que la relación  $\mathcal{R}$  es de equivalencia cuyas clases de equivalencia son exactamente las componentes conexas (se deja como ejercicio).

La definición de conexión y de componente conexa vale para multigrafos. También vale que la relación  $\mathcal{R}$  es de equivalencia.

## 0.2. Recorridos y circuitos Eulerianos

Recordamos el problema de los puentes de Königsberg: se trata de encontrar (o probar la inexistencia de) un circuito que pase por todas las aristas de un multigrafo.

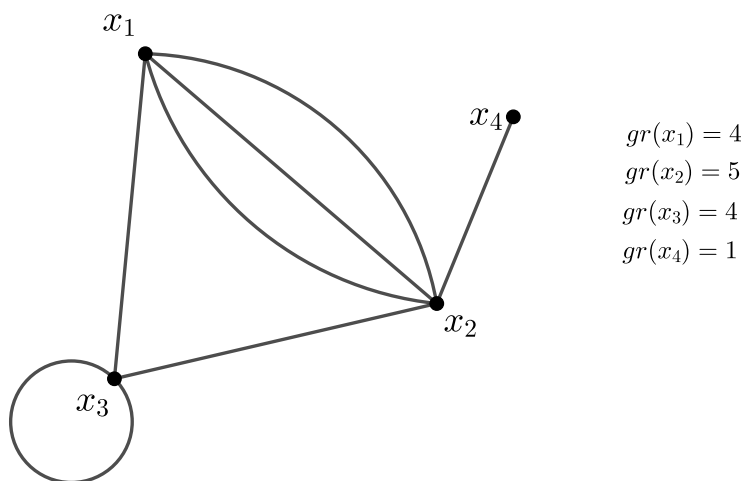
Diremos que un camino en un multigrafo (no dirigido)  $G$  es **Euleriano** si pasa por todas las aristas del multigrafo exactamente una vez.

**Observación 0.2.1.** Todo camino euleriano es un recorrido. Todo camino euleriano cerrado es un circuito.

La generalización del problema de los puentes de Königsberg puede enunciarse de la siguiente forma:

**Problema 0.2.2.** Sea  $G = (V, E)$  un multigrafo conexo. ¿Existe un recorrido Euleriano en  $G$ ? ¿Y un circuito Euleriano?

El **grado** de un vértice  $x$  en un multigrafo  $G$ , notado por  $gr(x)$ , es el número de aristas que inciden en el vértice. Un lazo en  $x$  cuenta doble para el grado de  $x$  (se entiende que incide dos veces en el vértice  $x$ ).



**Proposición 0.2.3.** Si  $G = (V, E)$  es un multigrafo, entonces

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2\#E.$$

*Demostración.* Simplemente observamos que cada lazo contribuye a sumar dos al grado de un vértice y cada arista que une dos vértices suma uno en el grado de cada uno de ellos.  $\square$

El siguiente teorema resuelve el Problema 0.2.2.

**Teorema 0.2.4.** Un multigrafo conexo  $G$  admite un circuito Euleriano si y solo si el grado de todos sus vértices es par.

Para simplificar la prueba, probaremos antes el siguiente resultado:

**Lema 0.2.5.** Sea  $G = (V, E)$  un multigrafo conexo. Existen al menos dos vértices que no desconectan a  $G$  (recordar que  $x$  no desconecta a  $G$  si el subgrafo de  $G$  inducido por  $V \setminus \{x\}$  es conexo).

*Demostración.* Probaremos por inducción en  $n = \#V \geq 2$ . Es claro para  $n = 2$ .

Supongamos que es cierto para  $m < n$  y tomemos  $x_0 \in V$ . Tenemos dos casos.

Caso 1:  $x_0$  no desconecta a  $G$ . Ya tenemos un tal vértice, y como  $V \setminus \{x_0\}$  tiene un vértice menos, por inducción, tenemos dos vértices  $x_1 \neq x_2$  en  $V$  que no desconectan el subgrafo inducido por  $V \setminus \{x_0\}$ . Ahora bien, tomemos  $(x_0, y)$  arista en  $G$ ; se tiene  $y \neq x_1$  o  $y \neq x_2$ . Si  $y = x_1$ , entonces  $x_2$  no desconecta a  $G$  y entonces ya tenemos dos vértices que no desconectan a  $G$ :  $x_0, x_2$ . Si llegara a ser  $y = x_2$ , se tiene  $y \neq x_1$  y

entonces  $x_0, x_1$  no desconectan a  $G$ .

Caso 2:  $x_0$  desconecta a  $G$ . Tomamos  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  componentes conexas del subgrafo inducido por  $V \setminus \{x_0\}$ . Como son conexos y tiene menos vértices que  $G$ , por hipótesis de inducción, tenemos  $x_1, x'_1$  vértices que no desconectan a  $G_1$  y  $x_2, x'_2$  vértices que no desconectan a  $G_2$ . Reconectando  $x_0$  con una arista hacia  $G_1$  y otra hacia  $G_2$  podemos ver que tenemos dos vértices (de los cuatro anteriores) distintos (uno en cada componente conexa) que no desconectan a  $G$ .  $\square$

Vamos ahora a la primera prueba del Teorema 0.2.4.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Asumimos que existe un circuito Euleriano y sea  $x$  un vértice de  $G$ . Notamos por  $E_x$  al conjunto de aristas que inciden en  $x$ . Para cada vértice  $x$ , podemos escribir el circuito Euleriano con extremos en  $x$ :

$$(x = x_0, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n = x).$$

Llamemos  $E_x$  al conjunto de aristas que inciden en  $x$ . Cada arista de  $E_x$  aparece exactamente una vez en el circuito. Alcanza entonces con verificar que la cantidad de aristas del circuito que inciden en  $x$  es par. Estas aristas son:  $e_1, e_{n-1}$  y por cada vez que aparezca  $x$  como vértice intermedio del circuito, un par de aristas consecutivas  $e_i, e_{i+1}$ .

Concluimos que  $gr(x) = \#E_x$  es par.

( $\Leftarrow$ ) Presentamos una prueba por inducción en la cantidad de aristas, que denotaremos por  $n$ . Se deja al lector observar que valen los primeros casos ( $n = 1, 2, 3$ ).

Supongamos que tenemos un multigrafo conexo  $G$  con  $n$  aristas tal que todos sus vértices tienen grado par, y que todo multigrafo conexo con  $m < n$  aristas que cumpla esta misma condición admite un circuito Euleriano.

Si  $G$  tiene un lazo, el multigrafo  $G'$  que resulta de quitarle a  $G$  dicho lazo admite un circuito Euleriano por hipótesis de inducción (puesto que es conexo con  $n - 1$  aristas). Suponemos entonces a partir de ahora que no hay lazos en  $G$ .

Por el Lema 0.2.5, existe un vértice  $x_0$  que no desconecta a  $G$ . Vamos a probar que existe un circuito  $C$  que empieza y termina en  $x_0$ .

Como  $gr(x_0)$  es par y  $G$  es conexo y sin lazos, se tiene que existen vértices  $v, w \neq x_0$  adyacentes a  $x_0$ . Como  $x_0$  no desconecta a  $G$ , existe un camino simple  $c$  de  $v$  a  $w$  que no pasa por  $x_0$ . Si  $e$  es una arista entre  $x_0$  y  $v$ , y  $f$  es una arista entre  $x_0$  y  $w$  se tiene que  $C = (x_0, e, c, f, x_0)$  es un circuito que empieza y termina en  $x_0$ .

Tomemos ahora  $G'$  el multigrafo que resulta de quitarle a  $G$  todas las aristas de  $C$  y los vértices que queden aislados luego de haber quitado esas aristas. El circuito  $C$  es un circuito Euleriano sobre sí mismo, por lo que  $gr_C(v)$  es par para cada vértice  $v$  en  $C$ . Como para cada vértice  $x$  en  $G'$  se tiene

$$gr_G(x) = gr_{G'}(x) + gr_C(x),$$

tenemos que  $G'$  tiene todos sus vértices de grado par.

Sean  $G_1, \dots, G_r$  las componentes conexas de  $G'$ . Tienen necesariamente menos aristas

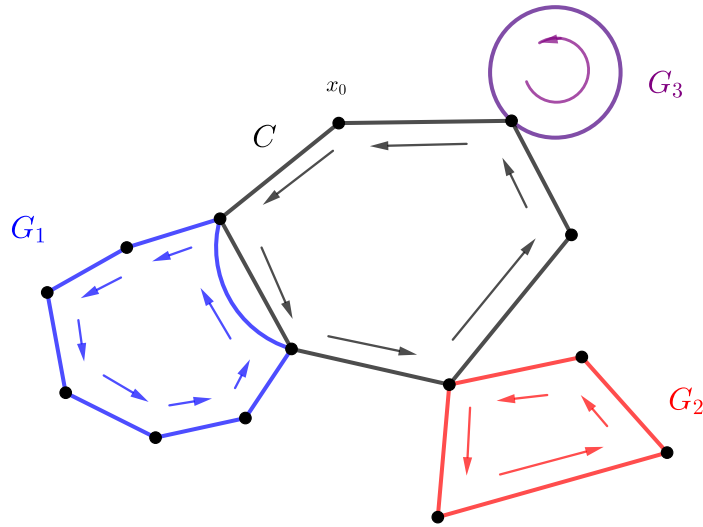
que  $G$ , además  $gr_{G_i}(v) = gr_{G'}(v)$  es par, para cada  $v$  vértice de  $G_i$ . Por hipótesis de inducción, en cada  $G_i$  hay un circuito Euleriano  $C_i$ .

Consideramos el circuito  $C$  y suponemos que tenemos índices  $j_1, \dots, j_r$  tal que  $x_{j_i}$  es el primer vértice de  $G_i$  que aparece en el circuito  $C$ . Tomamos  $\mathbf{c}_i$  un circuito Euleriano en  $G_i$  que comienza y termina en  $x_{j_i}$ .

Luego, construimos en  $G$  el ciclo

$$(x_0, e_1, \dots, e_{j_1-1}, \mathbf{c}_1, e_{j_1}, \dots, e_{j_r-1}, \mathbf{c}_r, e_{j_r}, \dots, x_m = x_0),$$

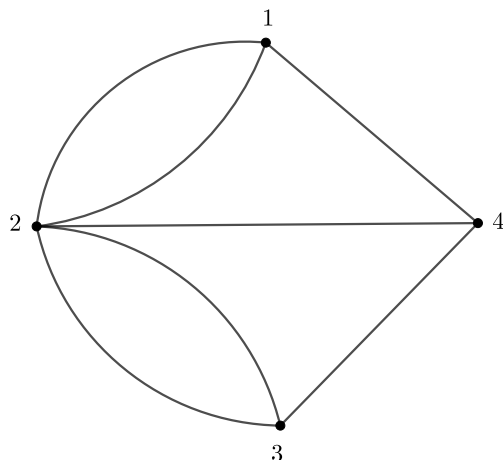
(como se ilustra en la figura). Este es necesariamente un circuito Euleriano pues pasa por todas las aristas de  $C$  y de los subgrafos  $G_1, \dots, G_r$  y no repite vértices.



□

Utilizando el Teorema 0.2.4 podemos rápidamente concluir la solución del problema de los puentes de Königsberg.





Vemos que  $gr(1) = gr(3) = gr(4) = 3$  y  $gr(2) = 5$ , por lo que no puede haber un circuito Euleriano. Como se ve en el siguiente corolario tampoco puede haber un recorrido Euleriano abierto.

**Corolario 0.2.6.** *Un multigrafo conexo  $G$  admite un recorrido Euleriano abierto si y sólo si dos de sus vértices tienen grado impar y el resto tienen grado par.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que existe un recorrido Euleriano  $(x_0, e_0, \dots, e_{n-1}, x_n)$ . Luego si agregamos al grafo  $G$  una arista que une  $x_0$  con  $x_n$  tenemos que existe un circuito Euleriano. Por el Teorema 0.2.4 se tiene que el grado de todas las aristas de este nuevo grafo es par. Por lo tanto el grado de todos los vértices del grafo original  $G$  es par, salvo para  $x_0$  y  $x_n$ , que tienen grado impar.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $x$  e  $y$  son los vértices que tienen grado impar. Se considera  $G'$  el grafo que resulta de agregarle una arista a  $G$  uniendo  $x$  con  $y$ . Luego los vértices de  $G'$  tienen todos grado par, por lo que existe un circuito Euleriano en  $G'$ . Es claro entonces que existe un recorrido Euleriano en  $G$  que une  $x$  con  $y$ .  $\square$

### 0.2.1. Caminos y ciclos Hamiltonianos

**Ejemplo 0.2.7.** Un grupo de personas va al cine y quiere ocupar una hilera de manera tal que cada uno esté sentado al lado de alguien a quién conoce. ¿Será esto posible? ¿Cómo puede modelarse en términos de un grafo?

Notar que si tomamos el grafo que tiene como vértices a las personas y una arista que los une cada vez que las personas se conocen, se trata de encontrar un camino simple en el grafo, que pase por todos los vértices.

Del ejemplo anterior podemos extraer el siguiente problema: dado un grafo  $G$ , ¿existe un camino simple que pasa por todos los vértices? Un tal camino se denomina **camino Hamiltoniano**. Un camino Hamiltoniano cerrado se dice **ciclo Hamiltoniano**.

En esta sección no consideramos multigrafos, si no únicamente grafos puesto que un camino o ciclo Hamiltoniano solo puede pasar por una arista que une dos vértices dados, luego un multigrafo admite un camino o ciclo Hamiltoniano si y sólo si lo admite su subgrafo subyacente.

El problema de la existencia de caminos o ciclos Hamiltonianos en un grafo es más difícil que el de la existencia de recorridos y circuitos Eulerianos. Presentaremos algunas condiciones suficientes.

Una idea general que engloba a estas condiciones es la siguiente: cuanto más aristas haya en el grafo, más probable será que admita un camino o ciclo Hamiltoniano. Existe una condición necesaria en este sentido pues un camino Hamiltoniano en un grafo de  $n$  vértices debe pasar por  $n - 1$  aristas diferentes, por lo que el número de aristas totales no puede ser menor en ese caso. Esta es también una condición necesaria para que el grafo sea conexo.

**Teorema 0.2.8.** *Teorema de Ore, 1960*

Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices.

1. Si para todo par de vértices  $x$  e  $y$ , distintos y no adyacentes, se tiene  $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$ , entonces  $G$  admite un camino Hamiltoniano.
2. Si para todo par de vértices  $x$  e  $y$ , distintos y no adyacentes, se tiene  $gr(x) + gr(y) \geq n$ , entonces  $G$  admite un ciclo Hamiltoniano.

*Demostración.* Empecemos probando la primera parte. Para eso veamos primero que  $G$  es conexo. Si no lo fuera tomamos dos componentes conexas  $G_1$  y  $G_2$  y dos vértices  $x$  e  $y$ , uno en cada una de estas componentes conexas. Si  $G_1$  tiene  $n_1$  vértices y  $G_2$  tiene  $n_2$  vértices, tenemos

$$gr(x) + gr(y) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2,$$

lo que contradice la hipótesis.

Supongamos ahora que no existe un camino Hamiltoniano en  $G$  y tomemos un camino simple abierto de longitud máxima. Lo notamos

$$c = (x_1, \dots, x_m).$$

Como estamos suponiendo que no hay caminos Hamiltonianos debe darse  $m < n$ .

Afirmación: Existe un ciclo que pasa por todos los vértices de  $c$ .

Si  $x_1$  o  $x_m$  es adyacente a algún vértice  $x$  fuera del camino  $c$ , entonces este puede prolongarse por alguno de los extremos, lo que contradice el hecho de que  $c$  tiene longitud

máxima. Por otro lado, si  $x_1$  y  $x_m$  son adyacentes no hay nada más que probar. En otro caso, todos los vértices adyacentes a  $x_1$  o  $x_m$  están en el conjunto  $\{x_2, \dots, x_{m-1}\}$ . Vamos a definir los siguientes conjuntos de índices:

$$S_1 = \{k \in \{3, \dots, m-1\} : x_k \text{ es adyacente a } x_1\}$$

$$S_m = \{k \in \{3, \dots, m-1\} : x_{k-1} \text{ es adyacente a } x_m\}.$$

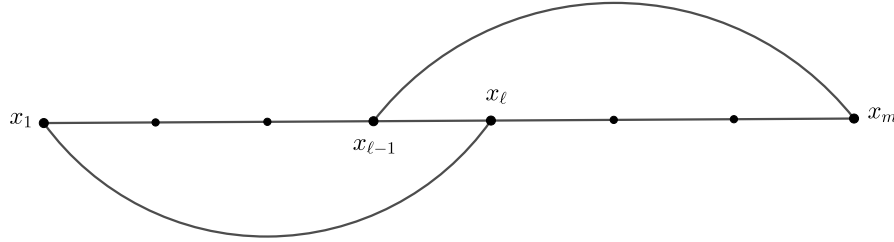
Como estamos en el caso en que  $x_1$  y  $x_m$  son no adyacentes (y distintos porque el camino es abierto)  $gr(x_1) + gr(x_m) \geq n - 1$ , entonces

$$\#S_1 + \#S_m \geq n - 3 > m - 3 = \#\{3, \dots, m-1\},$$

lo que implica que  $S_1 \cap S_m \neq \emptyset$ . Tomamos  $\ell \in S_1 \cap S_m$ , luego  $x_\ell$  es adyacente a  $x_1$  y  $x_{\ell-1}$  es adyacente a  $x_m$ . Obtenermos así el ciclo

$$(x_1, \dots, x_{\ell-1}, x_m, \dots, x_\ell, x_1).$$

Esto prueba la afirmación.



Ahora reescribimos el ciclo de largo  $m$  obtenido en la afirmación de la forma  $(y_1, \dots, y_m, y_1)$ . Como  $m < n$  y  $G$  es conexo, existe un vértice del ciclo  $y_k$  que es adyacente a un vértice  $x$  fuera del ciclo. Entonces existe un camino simple

$$(x, y_k, y_{k+1}, \dots, y_m, y_1, \dots, y_{k-1})$$

que es más largo que el camino  $c$  tomado al principio. Esto es absurdo porque este último tiene largo máximo. Concluimos entonces que  $m = n$  y por lo tanto  $c$  es un camino Hamiltoniano.

Para probar la segunda parte, observemos que, por la parte anterior, el grafo  $G$  admite un camino Hamiltoniano. Repitiendo el argumento utilizado para probar la afirmación, puede construirse un ciclo que pase por los mismos vértices que este camino Hamiltoniano. Este es claramente un ciclo Hamiltoniano.  $\square$

Notar que los grafos  $C_n$  sirven de contraejemplo, para  $n \geq 6$ , para ambas partes del Teorema anterior.

**Corolario 0.2.9.** *Teorema de Dirac, 195*

Si  $G = (V, E)$  es un grafo con  $n$  vértices tal que  $\forall v \in V, gr(v) \geq \frac{n}{2}$ , entonces  $G$  admite un ciclo Hamiltoniano

### 0.3. Planaridad

El segundo problema dado al principio del capítulo (conexión de servicios básicos) puede interpretarse de la siguiente manera: ¿Es posible dibujar en el plano el grafo bipartito  $K_{3,3}$  de forma tal de no intersectar sus aristas?

Podemos preguntarnos más en general qué grafos es posible dibujar en el plano sin intersectar aristas. Vamos a dar una definición más precisa de esto.

Una **curva plana** es una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Esto quiere decir que se escribe  $\alpha(t) = (f(t), g(t))$  donde las funciones  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  son continuas. Diremos en este caso que  $\alpha$  une  $x = \alpha(0)$  con  $y = \alpha(1)$ .

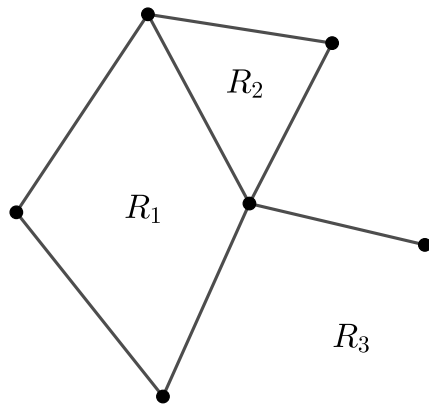
Para un par de puntos  $x, y \in \mathbb{R}^2$  denotamos por  $\mathcal{C}(x, y)$  al conjunto de curvas planas que unen  $x$  con  $y$ . El conjunto de todas las curvas planas será notado  $Curvas(\mathbb{R}^2)$ . Una **representación plana** de un grafo (o multigrafo)  $G = (V, E)$  es un par de funciones inyectivas  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $H : E \rightarrow Curvas(\mathbb{R}^2)$  tal que:

- $H(e) \in \mathcal{C}(F(x), F(y))$  si  $e$  es una arista entre  $x$  e  $y$ .
- Si  $e_1$  y  $e_2$  son dos aristas distintas en  $E$  y  $\alpha_1 = H(e_1)$  y  $\alpha_2 = H(e_2)$ , entonces  $\alpha_1((0, 1)) \cap \alpha_2((0, 1)) = \emptyset$ . Es decir que las imágenes de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pueden intersectarse solamente en los extremos.

Decimos entonces que el grafo  $G$  es **plano** (o **planar**) si admite una representación plana.

Cuando tengamos un grafo plano  $G = (V, E)$  con una representación plana fijada  $(F, H)$ , le llamaremos “vértice” tanto a los elementos de  $V$  como a los elementos de  $F(V)$ , y “arista” tanto a los elementos de  $E$  como a las imágenes de las curvas de  $H(E)$ .

Fijado un grafo plano junto con su representación plana observamos que los puntos del plano que no son vértices y no pertenecen a ninguna arista se distribuyen en lo que llamamos **regiones**. Podemos definir el **grado** de una región como la cantidad de aristas que la delimitan.



$$\begin{aligned} gr(R_1) &= 4 \\ gr(R_2) &= 3 \\ gr(R_3) &= 7 \end{aligned}$$

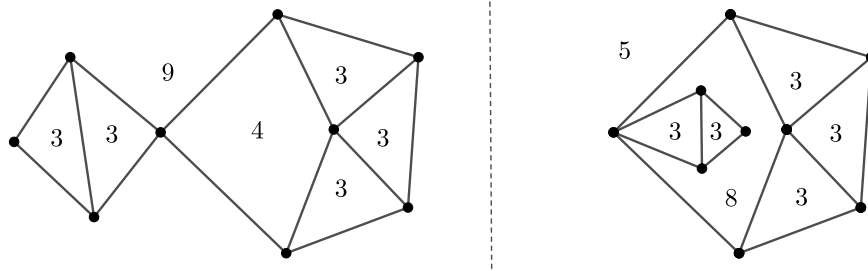
Hay dos cosas a tener en cuenta en la definición del grado de una región:

1. Si una región está delimitada por un vértice de grado 1 que no es aislado, entonces la arista que incide en ese vértice cuenta como dos lados de la región. Esto es lo que sucede con la región no acotada  $R_3$  de la figura anterior.
2. La definición de grado de una región no es intrínseca del grafo si no que depende de la representación plana. Podemos ver esto con el siguiente ejemplo, en el que tenemos dos representaciones planas del mismo grafo. El grado de cada región es indicado en su interior.

Notar que siempre hay una región no acotada, y que se tiene un resultado análogo al Lema de Handshaking:

$$\sum_R gr(R) = 2e$$

(que se prueba con argumentos análogos).



### 0.3.1. Característica de Euler

Dado un grafo (o multigrafo) plano  $G$  notamos por  $v(G)$  a la cantidad de vértices de  $G$ , por  $e(G)$  a la cantidad de aristas de  $G$  y por  $r(G)$  a la cantidad de regiones de  $G$ . (Esta última depende a priori de la representación plana.)

El siguiente teorema de Euler relaciona las cantidades anteriores para grafos planos.

**Teorema 0.3.1.** *Sea  $G$  un grafo plano conexo. Fijamos una representación en el plano de  $G$ . Entonces*

$$v(G) - e(G) + r(G) = 2. \quad (1)$$

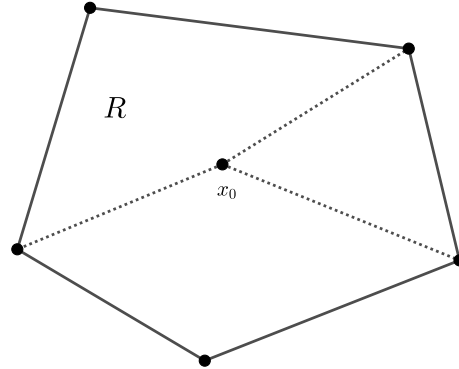
*Demostración.* Lo haremos por inducción en el número de vértices  $n$ .

Para  $n = 1$  y  $n = 2$  es claro. Supongamos ahora que la fórmula es cierta para todo grafo de  $n$  vértices y tomemos un grafo  $G = (V, E)$  con  $v = v(G) = n + 1$ . Notamos también  $e = e(G)$  y  $r = r(G)$ .

Tomemos  $x_0 \in V$  un vértice que no desconecta el grafo y notemos  $G'$  al subgrafo de  $G$  generado por  $V \setminus \{x_0\}$ . En este caso tenemos por hipótesis de inducción

$$2 = v(G') - e(G') + r(G') = (v - 1) - (e - gr(x_0)) + r(G'), \quad (2)$$

El vértice  $x_0$  pertenece a una región  $R$  del grafo  $G'$ .



Supongamos que  $gr(x_0) = k$ .

- Si  $k = 1$  entonces al agregar la única arista que incide en  $x_0$  la región  $R$  no se divide, luego  $r(G') = r$ .

- Si  $k > 1$ , cada arista que incide en  $x_0$  divide a la región  $R$  de  $G'$  en dos regiones de  $G$  y además cualquier región de  $G$  metida en  $R$  se obtiene de esta forma. Esto implica que  $R$  se divide en  $k$  regiones. Es decir que  $r = r' + k - 1$ . (Esto no cambia si  $R$  es la región no acotada).

Observar que en ambos casos la ecuación (2) implica que  $v - e + r = 2$ , luego por el principio de inducción queda demostrado el teorema.  $\square$

**Observación 0.3.2.** 1. El teorema anterior muestra que la cantidad de regiones no depende de la representación plana si no sólo del grafo  $G$ .

2. La fórmula (1) también es cierta para multigrafos (se deja como ejercicio).

**Corolario 0.3.3.** Sea  $G$  un grafo plano, conexo, con  $v \geq 3$  (notamos  $v = v(G)$ ,  $e = e(G)$  y  $r = r(G)$ ). Se tiene

$$(1) \quad 3r \leq 2e$$

$$(2) \quad 6 \leq 3v - e$$

*Demostración.* El grado de cada región es al menos tres (porque  $G$  no es un multigrafo). Observamos que cada arista es borde o bien de dos regiones o bien es dos veces borde de una región, luego

$$2e = \sum_{R \text{ región}} gr(R) \geq 3r.$$

Esto prueba (1). Por el Teorema 0.3.1

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{1}{3}e,$$

lo que implica (2).  $\square$

### 0.3.2. Grafos no planos

En este punto volvemos al segundo de los problemas presentados al principio del capítulo. La siguiente proposición responde a la pregunta planteada.

**Proposición 0.3.4.** Los grafos  $K_{3,3}$  y  $K_5$  no son planos.

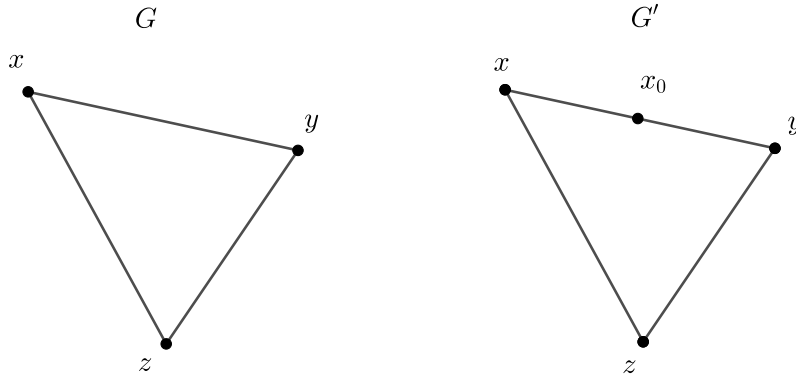
*Demostración.* Para ver que  $K_5$  no es plano, alcanza con ver que si lo fuera, tendríamos  $3v - e = 15 - 10 = 5$ , lo que contradice 0.3.3.(2).

Para ver que  $K_{3,3}$  no es plano, observemos que, si lo fuera, las regiones tendrían grado par (porque los ciclos de un grafo bipartito son de largo par) y por lo tanto mayor o igual a 4. Además, usando la característica de Euler, se tiene que  $r = 5$ .

La suma de los grados de las regiones sería entonces mayor o igual a 20, y tendríamos  $2e \leq 20$  mientras que  $e = 9$ .  $\square$

En realidad la proposición anterior es parte de un resultado más general que enunciaremos sin demostrar. Para esto necesitamos hacer primero algunas definiciones.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Decimos que el grafo  $G' = (V', E')$  es una **subdivisión elemental** de  $G$  si  $V' = V \cup \{x_0\}$  y existe un par de vértices  $x, y \in V$  tal que  $E' = (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, x_0\}, \{x_0, y\}\}$ . Dicho de otro modo,  $G'$  se obtiene al dividir en dos una arista de  $G$  poniendo en esta un nuevo vértice. De forma similar puede hacerse la definición para multigrafos.



Un grafo  $G'$  es una **subdivisión** de otro grafo  $G$  si existe una secuencia finita de grafos

$$G_0 = G, G_1, \dots, G_{k-1}, G_k = G'$$

tal que  $G_i$  es una subdivisión elemental de  $G_{i-1}$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Observar que  $G$  es (trivialmente) una subdivisión de sí mismo. Consideremos la relación  $G \mathcal{R} G'$  si  $G'$  es una subdivisión elemental de  $G$

**Definición 0.3.5.** Diremos que dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son **homeomorfos** si y sólo si ambos se obtienen de un mismo grafo, mediante aplicación de sucesivas subdivisiones elementales (posiblemente ninguna, admitiendo que un grafo sea homeomorfo a sí mismo).

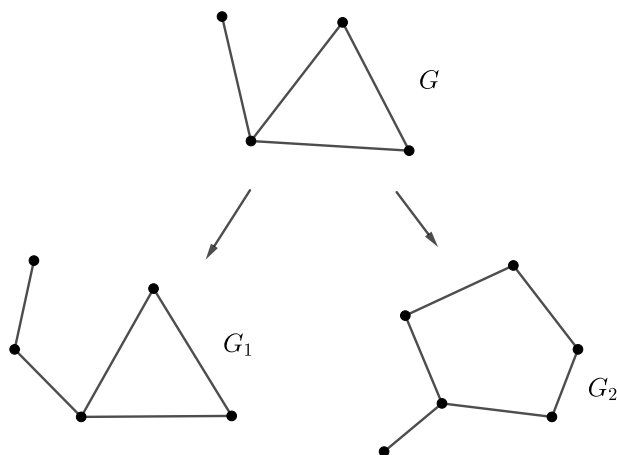
Es claro que la relación de homeomorfismo es simétrica y reflexiva. La transitividad es menos clara pero también vale.

$$G \mathcal{R} G_{11} \mathcal{R} G_{12} \mathcal{R} \dots \mathcal{R} G_{1k} \mathcal{R} G_1,$$

y

$$G \mathcal{R} G_{21} \mathcal{R} G_{22} \mathcal{R} \dots \mathcal{R} G_{2t} \mathcal{R} G_2$$





- Observación 0.3.6.**
- La relación de homeomorfismo define una relación de equivalencia en cualquier familia de grafos o multigrafos  $\mathcal{G}$ .
  - La condición de planaridad se preserva por homeomorfismo, es decir que si  $G_1$  y  $G_2$  son homeomorfos, entonces  $G_1$  es plano si y sólo si  $G_2$  lo es.
  - Todo multigrafo es homeomorfo a un grafo. Más precisamente todo multigrafo tiene una subdivisión que es un grafo. Luego el problema de la planaridad de multigrafos se reduce al caso de los grafos.

Habiendo definido estas nociones, estamos listos para enunciar el siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en la literatura, pero obviamos acá.

**Teorema 0.3.7 (Kuratowski).** *Un grafo  $G$  es plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ni a  $K_{3,3}$ .*

## 0.4. Teorema de los colores

El origen los resultados que se prueban aquí se remonta al problema de averiguar la cantidad mínima de colores necesaria para colorear un mapa, de modo que dos países vecinos tengan colores diferentes. En 1852, Francis Guthrie (matemático británico) postuló la conjetura de que con a lo sumo cuatro colores es posible colorear cualquier mapa, observando que con solo cuatro colores es posible colorear los mapas de los condados de Inglaterra.

En 1879, Alfred Kempe anunció una demostración de esta conjetura. Durante más de una década, el problema se consideró resuelto. No fue sino hasta 1890 que Heawood mostró un error en la prueba de Kempe, pero al mismo tiempo probó que la conjetura

es cierta para cinco colores.

El problema de colorear un mapa con cuatro colores permaneció sin solución hasta la década del 60, cuando apareció un nuevo enfoque de demostración: las demostraciones asistidas por computadora.

Dado un mapa político, se tiene un grafo asociado cuyos vértices representan las regiones (pongamos países) y las aristas representan que sean límites. El problema de colorear el mapa se traduce al problema de colorear los vértices de su grafo asociado, de manera tal que vértices adyacentes no reciban el mismo color.

Consideremos las siguientes dos condiciones para un mapa:

- que los países sean conexos (no pudiendo tener una región como Alaska)
- que los límites entre los países no sean un punto.

Bajo estas condiciones (bien naturales) en un mapa, el grafo asociado resulta planar.

Una  $k$ -coloración es una forma de colorear un grafo con  $k$  colores, de modo que vértices adyacentes tienen colores diferentes. Formalmente,

**Definición 0.4.1.** Una  $k$ -coloración de un grafo  $G = (V, E)$  es una función  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que cumple que  $\forall u, v \in V$  adyacentes, se tiene  $f(u) \neq f(v)$ .

**Lema 0.4.2.** Si  $G$  es un grafo planar, entonces existe un vértice que tiene grado a lo sumo 5.

*Demostración.* Sean  $v$  el número de vértices y  $e$  el de aristas. Si todos los vértices tuviesen grado mayor a 5, por el **Lema de Handshaking** se deduce que  $2e \geq 6v$ . Por otro lado, por el **Lema 2** se tiene que  $3v \geq e + 6$ . Entonces, de ambas desigualdades se obtiene  $0 \geq 6$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto, existe un vértice que tiene grado a lo sumo 5.  $\square$

**Teorema 0.4.3** (Teorema de los 6 colores). *Todo grafo planar admite una 6-coloración.*

*Demostración.* Podemos hacer inducción en la cantidad de vértices y usar el Lema 0.4.2.

**Caso Base** Para el grafo con un solo vértice, el resultado es obviamente cierto.

**Caso Inductivo** Por hipótesis inductiva, cualquier grafo planar con  $n \geq 1$  vértices admite una 5-coloración.

Sea  $G$  un grafo planar con  $n + 1$  vértices. Se quiere probar que  $G$  admite una 5-coloración.

Como  $G$  es planar, existe un vértice  $v$  con grado a lo sumo 5.

Se considera el subgrafo de  $G$  inducido por  $V - v$ . Este grafo es un grafo planar (porque  $G$  lo es). Aplicando la hipótesis inductiva a  $G - v$ , se tiene una 5-coloración para cada una de ellas.

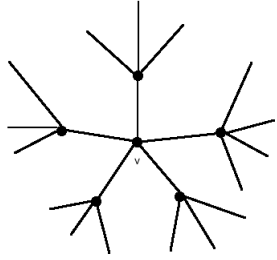


Figura 1: Caso inductivo

Extendemos dicha coloración a  $G$  como sigue: sólo hace falta colorear el vértice  $v$ . Miramos los colores usados para los vértices adyacentes a  $v$  (que son a los sumo 5) y coloreamos  $v$  con el color que no haya sido utilizado.  $\square$

**Teorema 0.4.4** (Teorema de los 5 colores). *Todo grafo planar admite una 5-coloración.*

*Demostración.* Aquí empezamos como en el Teorema anterior. El caso base es claro y, para el paso inductivo, también consideramos  $G, v$  y  $G'$  como antes y tomamos una 5-coloración de  $G'$ . Hay dos situaciones posibles:

**Caso 1:**  $gr(v) \leq 4$  Argumentamos como en el caso anterior y coloreamos  $v$  con un color no utilizado en los adyacentes a  $v$  (que son a lo sumo 4).

**Caso 2:**  $gr(v) = 5$  Llamemos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  a los vértices adyacentes a  $v$ . Si están pintados con 4 colores o menos, entonces usamos un color que no se haya usado para pintar a  $v$  y así obtener una 5-coloración de  $G$ .

Supongamos que  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  están pintados de 5 colores distintos que llamaremos respectivamente 1, 2, 3, 4, 5.

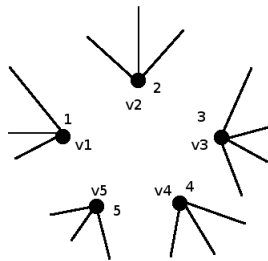


Figura 2: Todos los vecinos con colores distintos

Consideremos, para  $i, j \leq 5, i \neq j$ , el subgrafo  $G_{ij}$  de  $G'$  inducido por los vértices pintados por  $i$  o  $j$ . Observar que  $v_i$  y  $v_j$  son vértices de  $G_{ij}$ .

Tenemos dos posibilidades:

- si existe un par  $(i, j)$  tal que  $v_i$  y  $v_j$  están en componentes conexas distintas de  $G_{ij}$ , entonces se intercambian los colores  $i$  y  $j$  en la componente conexa de  $v_i$ , obteniendo una nueva coloración que no usa el color  $i$  en los vecinos de  $v$ . De este modo, el color  $i$  queda libre y se lo asigna a  $v$ .

- en el caso en que para todo par  $(i, j)$ , los vértices  $v_i$  y  $v_j$  están en la misma componente conexa de  $G_{ij}$ , en particular existen un camino  $c$  en  $G_{35}$  que une  $v_3$  con  $v_5$  y un camino en  $G_{14}$  que une  $v_4$  con  $v_1$ . En este caso, en la región encerrada por el ciclo formado por  $vv_3$ ,  $c$  y  $v_5v$  (ver Figura 3), tenemos a  $v_4$  dentro y a  $v_1$  fuera (el Teorema de la Curva de Jordan asegura que hay una parte dentro y una parte fuera de la poligonal determinada por el ciclo). Esto asegura que el camino entre  $v_1$  y  $v_4$  cruce el borde de la región.

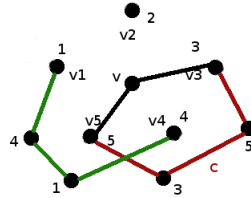


Figura 3: Los caminos de  $v_3$  a  $v_5$  y  $v_4$  a  $v_1$  se intersectan

Pero  $G$  (y por lo tanto  $G'$ ) es planar (las aristas no se cruzan), por lo que el camino entre  $v_4$  y  $v_1$  corta el borde de la región en un vértice, que debe ser  $v$  (que no está en  $G'$  y por tanto no está en  $G_{13}$ ) o un vértice  $x$  de  $G_{35}$ , pero esto no puede darse puesto que ya está en  $G_{14}$ . Este caso no puede darse.

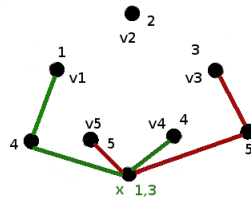


Figura 4: El vértice  $x$  común a los caminos tiene dos colores distintos

□

# Bibliografía

- [G] Ralph Grimaldi; *Matemática discreta y combinatoria: Una introducción con aplicaciones.*
- [H] Paul Halmos; *Teoría intuitiva de conjuntos.*
- [L] Chung Laung Liu; *Introduction to combinatorial mathematics.*
- [W] Douglas West; *Introduction to graph theory.*