

Práctico 7: Grafos, generalidades

1. Se considera el conjunto $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y el subconjunto E dado por $\{x, y\} \in E$ si y sólo si $x - y$ es un entero par no nulo. Representarlo.
2.
 - a) Contar la cantidad de aristas de K_n y de $K_{n,m}$.
 - b) El grafo C_n se define como (V, E) donde $V = \{1, \dots, n\}$ y E es el conjunto cuyos elementos son $\{i, i + 1\}, \forall i \in \{1, \dots, n - 1\}$ y $\{n, 1\}$.
 - (i) Representar C_4 .
 - (ii) ¿Cuántas aristas tiene C_n ?
 - c) El grafo de *Petersen* P es el de la Figura 1.

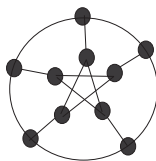
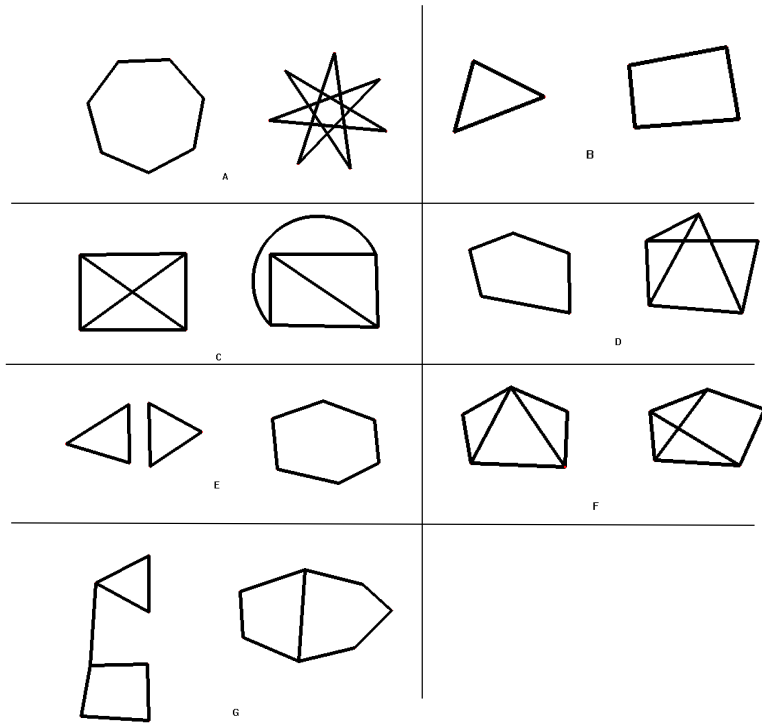


Figura 1: Grafo de Petersen

- (i) ¿Cuántas aristas tiene P ?
 - (ii) Observar que todo los vértices tienen el mismo grado.
3. Para cada par de grafos de la siguiente figura determinar si los grafos son o no isomorfos.

FIGURA 1



4. Un grafo es *regular* si todos los vértices tienen el mismo grado. Averiguar cuáles de los grafos del ejercicio 3 son regulares.
5. Hallar los complementos de los grafos del ejercicio 3.
6. Observar que si G y G' son isomorfos bajo $f : G \rightarrow G'$, entonces G y G' tienen la misma cantidad de vértices y la misma cantidad de aristas y además $gr_G(v) = gr_{G'}f(v)$ para todo vértice v .
¿Vale un recíproco de la afirmación anterior?
7. Probar que un grafo bipartito no puede tener caminos cerrados de largo impar.
8. Dado un grafo $G = (V, E)$ se define la relación en V “estar conectado a” como sigue: v está conectado a w si existe un camino entre v y w .
 - a) Observar que se trata de una relación de equivalencia en el conjunto de vértices. A cada clase de equivalencia le llamamos **componente conexa** del grafo.
 - b) Observar que G es conexo si y sólo si hay una única clase de equivalencia.
 - c) Probar que la componente conexa de un vértice x es el mayor subgrafo conexo que contiene a x .
9. Sea G un grafo k -regular con n vértices (es decir que cada vértice tiene grado k). Probar que su complemento es k' -regular para cierto natural k' .
10. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?
11.
 - a) Sea G un grafo con n vértices con un solo vértice de grado par. ¿Qué se puede afirmar sobre la paridad de n ?
 - b) Construir un grafo con n vértices para cualquier n impar, que tenga un solo vértice de grado par y al menos dos vértices de grado $n - 2$. Se sugiere trabajar por recurrencia en n impar.
12.
 - a) ¿Cuál es el máximo número de vértices posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?
 - b) ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo, construirlo.
13. Para el grafo de la Figura 2, determinar:
 - a) Un camino $b - \dots - d$ que no sea un recorrido
 - b) Un recorrido $b - \dots - d$ que no sea simple

- c) Un camino simple $b - \dots - d$
- d) Un camino cerrado $b - \dots - b$ que no sea un circuito
- e) Un circuito $b - \dots - b$ que no sea ciclo.
- f) Todos los ciclos $b - \dots - b$
- g) Todos los caminos simples $b - \dots - f$.

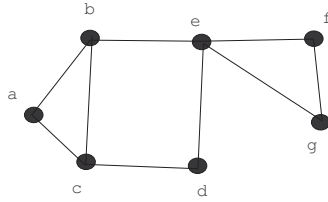
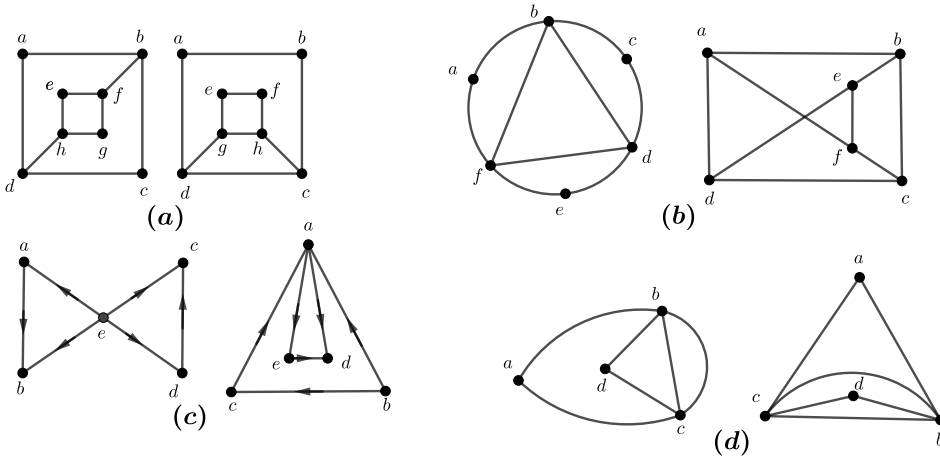


Figura 2:

- 14. Observar que $K_{2,2}$ y C_4 son isomorfos entre sí pero no son isomorfos a K_4 .
- 15. Representar el grafo $K_{2,3}$ y determinar los posibles subgrafos inducidos por subconjuntos de 3 vértices.
- 16. Para cada par de grafos (o multigrafos) de la siguiente figura determinar si los grafos son o no isomorfos.



17. Determinar si se cumple o no que:

- a) K_4 contiene un camino que no es un recorrido.
- b) K_4 contiene un recorrido que no es ni un circuito ni es camino simple.
- c) K_4 contiene un circuito que no es ciclo.