Práctico 8

Generadores, bases y operaciones con subespacios

1. En los casos siguientes se considera el espacio V y el subconjunto A de V.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(0,1,1),\ (0,0,1),\ (1,1,1),\ (1,-1,1)\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,2,-3),\ (4,-1,0),\ (1,-1,1),\ (3,0,-1)\}$.

   c) $V = M_2$, $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

   d) $V = M_2$, $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

   Se pide:

   a) Determinar si A es un generador de V.

   b) Determinar si A es una base de V.

2. Hallar una base del subespacio W en los casos siguientes.

   a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x+y+z=0\}$.

   b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0,\ x+y-z-t=0\}$.

   c) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] :\ p(0)=0\}$.

   d) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] :\ p(1-x) = p(1+x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

   e) $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) :\ A \text{ es simétrica}\}$.

   f) $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) :\ A \text{ es antisimétrica}\}$.

3. En los casos siguientes, sea W el subespacio generado por el conjunto A. Se pide eliminar elementos de A, cuando sea necesario, hasta conseguir una base de W.

   a) $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subset M_2$.

   b) $A = \left\{x,\ x^2-1,\ 2x^2-1,\ x^3+2x,\ x^3+x\right\} \subset \mathbb{R}[x]$.

4. En los casos siguientes se considera el espacio V, el subespacio W y el conjunto A.

   a) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x+y+z+t=0\}$ y $A = \{(1,1,0,-2)\}$.

   b) $V = M_2$, $W = \{X \in M_2 :\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$ y $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

   Verificar que A está contenido en W y que es LI. Luego encontrar una base B de W que contenga a A.

5. En cada uno de los casos siguientes, se considera el espacio V y los subespacios W_1 y W_2.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x=z\}$ y $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z=0\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = [(1,-1,1),\ (1,2,-3)]$ y $W_2 = [(1,1,1),\ (-1,-8,11)]$.

   c) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = [(0,0,1)]$ y $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x=z\}$.

   d) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ y=t=x+z\right\}$ y $W_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x=t=y+z\right\}$.

   e) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = [(2,2,2,1), (1,2,2,1)]$ y $W_2 = [(1,1,1,1), (1,1,2,1), (1,1,3,1)]$.

   f) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x+2y-z+t=0\}$ y $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x+y+z=0\}$.

   g) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W_1 = \left[1-x,\ 1+x^3\right]$ y $W_2 = \left[1+x+x^3,\ 4x\right]$.

   h) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W_1 = \mathbb{R}_2[x]$ y $W_2 = \left[2-x^3\right]$.

   i) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{X \in M_2(\mathbb{R}) :\ \mathrm{tr}(X)=0\}$, $W_2 = \{X \in M_2(\mathbb{R}) :\ X \text{ es una matriz diagonal}\}$.

   j) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{X \in M_2(\mathbb{R}) :\ \mathrm{tr}(X)=0\}$, $W_2 = [I_2]$, I_2 es la matriz identidad.

   Se pide:

   a) Determinar $W_1 \cap W_2$; en los casos donde $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, determinar una base de $W_1 \cap W_2$.

   b) Determinar $W_1 + W_2$; en los casos donde $V \neq W_1 + W_2$, determinar una base de $W_1 + W_2$.

   c) Determinar si es $V = W_1 \oplus W_2$; en los casos donde $V = W_1 \oplus W_2$, encontrar cómo escribir un vector genérico $v \in V$ como suma de un vector en W_1 con uno en W_2.

6. Probar $M_n(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$, siendo W_1 el subespacio de $M_n(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas y W_2 el subespacio formado por las matrices antisimétricas. *Sugerencia:* recordar el práctico 5.
7. Se considera en M_3 el subespacio W_1 formado por las matrices triangulares superiores y W_2 el subespacio de las matrices triangulares inferiores.
   a) Determinar $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.
   b) ¿Vale $M_3 = W_1 \oplus W_2$? Justificar la respuesta.
8. Se consideran $W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) :\ f \text{ es par}\}$[1] y $W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) :\ f \text{ es impar}\}$.
   a) Probar que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   b) Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Definimos $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $g(x) = f(x) + f(-x)$ y $h(x) = f(x) - f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Investigar si g y h están en W_1 o en W_2.
   c) Probar $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$. *Sugerencia:* razonar como en el ejercicio 6.
9. Sea $V = \mathbb{R}^4$ y los subespacios $W_1 = [(1,0,-1,0)]$, $W_2 = [(1,0,1,0),(1,1,1,1)]$, $W_3 = [(0,1,2,1)]$.
   a) Determinar $W_1 + W_2 + W_3$.
   b) Probar $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{(0,0,0,0)\}$.
   c) ¿La suma $W_1 + W_2 + W_3$ es directa?
10. Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n$ se dice que es *estrictamente triangular superior* si verifica $a_{ij} = 0$ para todo $i \geq j$ y que es *estrictamente triangular inferior* si verifica $a_{ij} = 0$ para todo $i \leq j$. Sean W_1 y W_2 los subconjuntos de M_3 formados por las matrices estrictamente triangulares superiores y por las matrices estrictamente triangulares inferiores, respectivamente.
    a) Probar que W_1 y W_2 son subespacios de M_3.
    b) Probar $M_3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, siendo W_3 el subespacio de M_3 formado por las matrices diagonales.

Ejercicios extra.

Se pide realizar lo mismo que en el ejercicio 5 en los casos siguientes.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = y\}$ y $W_2 = [(1,1,1)]$.
2. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ y = t = 0\}$, $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + y + z + t = 0\}$.
3. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) :\ x + y + z + t = 0,\ x + y + z = 0,\ x + y = 0\}$ y
   $W_2 = \{(x,y,z,t) :\ 2x + y + z + t = 0,\ z + t = 0\}$.
4. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) :\ x = y,\ t = 0\}$ y $W_2 = \{(x,y,z,t) :\ x + y = 0,\ z - t = 0\}$.
5. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) :\ t - x = 0, 2x + 2y - z + t = 0\}$ y $W_2 = \{(x,y,z,t) :\ x + y + z = 0\}$.

[1] Recordar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *par* o *impar* si verifica $f(-x) = f(x)$ o $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Soluciones (de algunos ejercicios)

1.

2.

3.

4.

5. *a)* $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = z = 0\} = [(0,1,0)]$; $\quad W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$; $\quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^3$.
   b) $W_1 \cap W_2 = [(-1,-8,11)] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 8x, \ z = -11x\}$; $\quad W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$; $\quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^3$.
   c) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$; $\quad (x,y,z) = (x,y,x) + (0,0,z-x)$.
   d)
$$W_1 \cap W_2 = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = y = t, \ z = 0\big\} = [(1,1,0,1)];$$
$$W_1 + W_2 = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z - 2t = 0\big\} = [(-1,1,0,0), \ (-1,0,1,0), \ (2,0,0,1)]; \ W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^4.$$
   e) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$; $\quad (x,y,z,t) = (x+y-2t, 2y-2t, 2y-2t, y-t) + (2t-y, 2t-y, 2t+z-2y, 2t-y)$.
   f) $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ t = -3z, \ x = -y-z\} = [(-1,1,0,0), \ (-1,0,1,-3)]$;
   $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$; $\quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^4$.
   g)
$$W_1 \cap W_2 = \big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \ b = c = 0, \ a = d\big\} = \big[1 + x^3\big] \, ;$$
$$W_1 + W_2 = \big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \ c = 0\big\} = \big[1, \, x, \, x^3\big] \, ; \quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}_3[x].$$
   h) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}_3[x]$; $\quad a + bx + cx^2 + dx^3 = a - 2d + bx + cx^2 + (-d)\left(2 - x^3\right)$.
   i) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \ y = z = 0, \ x + t = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$; $\ W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$; $\ W_1 \oplus W_2 \neq M_2(\mathbb{R})$
   j) $W_1 \oplus W_2 = M_2(\mathbb{R})$; $\quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-t}{2} & y \\ z & \frac{t-x}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x+t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{x+t}{2} \end{pmatrix}$.

6.

7.

8.

9. *a)* $W_1 + W_2 + W_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ y = t\}$.
   b)
   c) Vale $W_3 \subset W_1 + W_2$, luego la suma no es directa.

10.

Ejercicios extra.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y\}$ y $W_2 = [(1,1,1)]$.
$$W_1 \cap W_2 = W_1; \quad W_1 + W_2 = W_2; \quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^3.$$

2. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ y = t = 0\}$, $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z + t = 0\}$.
$$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ y = t = 0, \ x + z = 0\} = [(1,0,-1,0)]; \quad W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4; \quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^4.$$

3. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) : \ x + y + z + t = 0, \ x + y + z = 0, \ x + y = 0\}$ y
   $W_2 = \{(x,y,z,t) : \ 2x + y + z + t = 0, \ z + t = 0\}$.
$$W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0,0)\}; \quad W_1 + W_2 = \{(x,y,z,t) : \ z + t = 0\}; \quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^4.$$

4. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) : \ x = y, \ t = 0\}$ y $W_2 = \{(x,y,z,t) : \ x + y = 0, \ z - t = 0\}$.
$$W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0,0)\}; \quad W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4; \quad W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4,$$
$$(x,y,z,t) = \left(\frac{x+y}{2}, \ \frac{x+y}{2}, \ z - t, \ 0\right) + \left(\frac{x-y}{2}, \ \frac{y-x}{2}, \ t, \ t\right).$$

5. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x,y,z,t) : \ t - x = 0, \ 2x + 2y - z + t = 0\}$ y $W_2 = \{(x,y,z,t) : \ x + y + z = 0\}$.
$$W_1 \cap W_2 = \left\{(x,y,z,t) : \ y = -\frac{4}{3}x, \ z = \frac{1}{3}x, \ t = x\right\} = [(3,-4,1,3)]; \quad W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4; \quad W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}^4.$$