

Recapitulando, estamos deduciendo cual debe ser la forma de la relación entre las coordenadas que dos observadores inerciales S y S' asignan a un evento.

La hipótesis de homogeneidad del espacio y el tiempo implican que esta relación debe ser lineal



$$\begin{aligned}x'_E &= a_{11}x_E + a_{12}y_E + a_{13}z_E + a_{14}ct_E + b_1 \\y'_E &= a_{21}x_E + a_{22}y_E + a_{23}z_E + a_{24}ct_E + b_2 \\z'_E &= a_{31}x_E + a_{32}y_E + a_{33}z_E + a_{34}ct_E + b_3 \\ct'_E &= a_{41}x_E + a_{42}y_E + a_{43}z_E + a_{44}ct_E + b_4\end{aligned}$$

los coeficientes b_1, b_2, b_3, b_4 están relacionados con la posición relativa del punto elegido como origen, las orientaciones de los ejes y el origen del tiempo.

→ Eligiendo los orígenes tales que $x_E = y_E = z_E = ct_E = 0$ implica $x'_E = y'_E = z'_E = ct'_E = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$

→ Tomemos los ejes paralelos entre sí: $x \parallel x', y \parallel y', z \parallel z'$ y, sin pérdida de generalidad, consideremos que el movimiento relativo de los referenciales es en la dirección $x-x'$ esto implica que $a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{34} = 0$ ya que si algo ocurre en el eje x , con $y_E = z_E = 0 \Rightarrow$ debe ocurrir en el eje x' ($y'_E = 0, z'_E = 0$).

→ De igual forma, los planos $x'y'$ (caracterizados con $z'=0$) y $x'z'$ (caracterizado por $y'=0$) se mueven en la dirección $x \Rightarrow$ esto implica que $a_{23} = a_{32} = 0$ y

→ Por simetría el tiempo que S' asigne a un evento no puede depender de las coordenadas y_E y z_E ya que eventos que ocurran simultáneamente $ct_{E_1} = ct_{E_2} = ct_{E_3} = \dots$ a una distancia radial fija del eje x ($y_{E_i}^2 + z_{E_i}^2 = c^2 t_{E_i}^2$) asignarían ct'_{E_i} diferentes. Por lo que $a_{42} = a_{43} = 0$.

con esto llegamos a que

$$\begin{aligned}x'_E &= a_{11}x_E + a_{14}ct_E \\y'_E &= a_{22}y_E \\z'_E &= a_{33}z_E \\ct'_E &= a_{41}x_E + a_{44}ct_E\end{aligned}$$

→ Ahora bien, eventos consecutivos E_1 y E_2 que ocurran en el origen de coordenadas de S' deben ser tales que $x'_{E_1} = x'_{E_2} = 0$

$$\Rightarrow x'_{E_2} - x'_{E_1} = a_{11}(x_{E_2} - x_{E_1}) + a_{14}(ct_{E_2} - ct_{E_1}) = 0$$

$$\Rightarrow a_{11} \frac{x_{E_2} - x_{E_1}}{c(t_{E_2} - t_{E_1})} = -a_{14} \quad \text{pero } \frac{x_{E_2} - x_{E_1}}{t_{E_2} - t_{E_1}} \text{ no es otra cosa que}$$

la velocidad del origen O' : $v \Rightarrow a_{14} = -a_{11} \beta$ donde definimos $\beta \equiv \frac{v}{c}$ la velocidad en unidades de la velocidad de la luz, c .

→ Además, si colocamos una barra en reposo en S , de largo L_0 con un extremo en el origen y el otro en $y=L_0$ entonces, un evento cualquiera, en cualquier momento que ocurra en dicho extremo será

$$y'_E = a_{22} L_0,$$

de forma similar, si la barra está en reposo en S' , de largo L_0 con un extremo en el origen y el otro en $y'=L_0$ entonces será, para un evento en este extremo.

$$L_0 = a_{22} y_E$$

Pero por simetría entre las situaciones debe ser $y'_E = y_E$ y, por lo tanto $L_0 = a_{22}^2 L_0 \Rightarrow a_{22} = 1$ (por continuidad a velocidad relativa nula).

→ Análogamente es $a_{33} = 1$.

→ Ahora bien, si un pulso de luz emerge en los orígenes en el instante en que estos se cruzaban ($x_P = x'_P = y_P = y'_P = z_P = z'_P = ct_P = ct'_P = 0$) entonces el frente de onda en S debe satisfacer:

$$x_{F0}^2 + y_{F0}^2 + z_{F0}^2 = (ct_{F0})^2 \quad \textcircled{I}$$

Por el postulado de la invarianza de la velocidad de la luz, también debe ser cierto para S' :

$$x_{F0}'^2 + y_{F0}'^2 + z_{F0}'^2 = (ct_{F0}')^2$$

Sustituyendo las relaciones previas es:

$$a_{11}^2 (x_{F0} - \beta ct_{F0})^2 + y_{F0}^2 + z_{F0}^2 = (a_{41} x_{F0} + a_{44} ct_{F0})^2$$

$$\Rightarrow (a_{11}^2 - a_{41}^2) x_{F0}^2 + y_{F0}^2 + z_{F0}^2 - 2(a_{11}^2 \beta + a_{41} a_{44}) x_{F0} ct_{F0} = (a_{44}^2 - \beta^2 a_{11}^2) (ct_{F0})^2 \quad \textcircled{II}$$

comparando $\textcircled{I}$ y $\textcircled{II}$ vemos que debe ser

$$(A) \quad a_{11}^2 - a_{41}^2 = 1$$

$$(B) \quad a_{11}^2 \beta + a_{41} a_{44} = 0$$

$$(C) \quad a_{44}^2 - \beta^2 a_{11}^2 = 1$$

Despejando a_{41} de (A) y a_{44} de (C) es:

$$a_{41} = \pm \sqrt{a_{11}^2 - 1}$$

$$a_{44} = \pm \sqrt{1 + \beta^2 a_{11}^2}$$

Sustituyendo en (B) es

$$a_{11}^2 \beta \pm \sqrt{a_{11}^2 - 1} \sqrt{1 + \beta^2 a_{11}^2} = 0 \Rightarrow a_{11}^4 \beta^2 = -1 + \beta^2 a_{11}^4 + a_{11}^2 (1 - \beta^2)$$

$$\Rightarrow a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \equiv \gamma(v) \quad \text{donde definimos el factor}$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De aquí que

$$a_{41} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2} - 1} = \pm \beta \gamma(v)$$

$$a_{44} = \pm \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}} = \pm \gamma(v)$$

Siguiendo el origen de S es $ct'_E = \pm \gamma(v) ct_E$ por lo que tomaremos el signo positivo. Ahora, volviendo a (B) es:

$$\gamma^2 \beta \pm \gamma^2 \beta = 0 \Rightarrow \text{debemos tomar el signo negativo para } a_{41}.$$

Con esto concluimos que:

$$\left. \begin{aligned} x'_E &= \gamma (x_E - \beta ct_E) \\ y'_E &= y_E \\ z'_E &= z_E \\ ct'_E &= \gamma (ct_E - \beta x_E) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct'_E \\ x'_E \\ y'_E \\ z'_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_E \\ x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix}$$

Estas expresiones se conocen como Transformaciones de Lorentz.

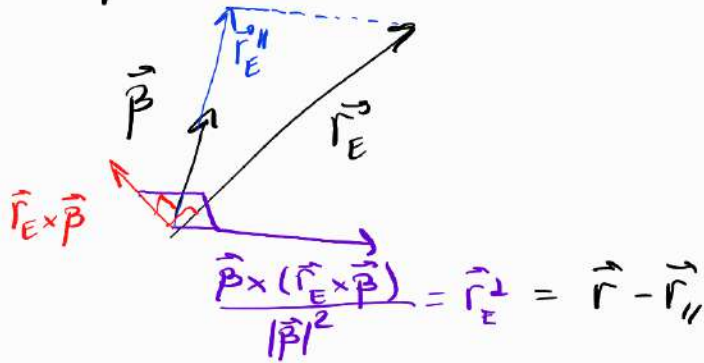
Expresiones generales

Lo recién discutido significa que la dirección en la que se da el movimiento relativo se da una alteración mientras que en las direcciones perpendiculares no cambia nada.

En la situación de una velocidad genérica $\vec{v}$ (que define $\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}}{c}$) la transformación del tiempo será: $ct'_E = \gamma (ct_E - \vec{\beta} \cdot \vec{r}_E)$

Además la posición del evento es $\vec{r}_E = \vec{r}_E^\perp + \vec{r}_E^\parallel = \frac{\vec{\beta} \times (\vec{r}_E \times \vec{\beta})}{|\vec{\beta}|^2} + \frac{\vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{r}_E)}{|\vec{\beta}|^2}$

Esto se puede ver como:



Pero entonces $\vec{r}_E' = \vec{r}_E^\perp + \gamma (\vec{r}_E^\parallel - \vec{\beta} c t_E)$ o en términos de $\vec{r}_E$ es:

$\uparrow$
inalterado

En notación matricial esto es:

$$\vec{r}_E' = \vec{r}_E + (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{r}_E) \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} - \gamma \vec{\beta} c t_E$$

donde $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{\beta}|^2}}$

$$\begin{pmatrix} c t_E' \\ x_E' \\ y_E' \\ z_E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_x & -\gamma \beta_y & -\gamma \beta_z \\ -\gamma \beta_x & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_x^2}{|\vec{\beta}|^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_y}{|\vec{\beta}|^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_z}{|\vec{\beta}|^2} \\ -\gamma \beta_y & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_y}{|\vec{\beta}|^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_y^2}{|\vec{\beta}|^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_z}{|\vec{\beta}|^2} \\ -\gamma \beta_z & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_z}{|\vec{\beta}|^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_z}{|\vec{\beta}|^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_z^2}{|\vec{\beta}|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c t_E \\ x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix}$$

(T.de L. Ger.)

Comparación de las transformaciones de Lorentz y Galileo

Si tomamos el límite de $\frac{v_x}{c} \rightarrow 0, \frac{v_y}{c} \rightarrow 0, \frac{v_z}{c} \rightarrow 0$, entonces vemos que, a orden dominante, la ecuación (T.de L. Ger.) se convierte en

$$\begin{pmatrix} c t_E' \\ x_E' \\ y_E' \\ z_E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c t_E \\ x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{cases} t_E' = t_E \\ x_E' = x_E - v_x t_E \\ y_E' = y_E - v_y t_E \\ z_E' = z_E - v_z t_E \end{cases}$$

transformaciones
de Galileo!
(cuando coinciden los
orígenes en $t=0$)

II.2 - Cinemática Relativista

Dado un observador/referencial, los conceptos de posición, velocidad y aceleración se definen de forma análoga a lo discutido en la visión Newtoniana de la mecánica. Sin embargo, para ello debemos asignar correctamente las coordenadas espacio-temporales a las posiciones espacio-temporales de las partículas y dado que estas no están en la locación del observador, no debemos confundirnos la coordenada temporal de la partícula con el tiempo en que el observador recibe esta información.

Además, existen otras ambigüedades con la medición del tiempo en relatividad:

Ejemplo: ¿A qué velocidad se mueve un reloj si éste mide el tiempo a un ritmo de $\frac{1}{2}$ del ritmo de un reloj en reposo?

Un intervalo temporal Δt será $c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \frac{v}{c}\Delta x')$, siendo este intervalo temporal una cierta cantidad de "Tic-Toc"s del reloj, estos se dan en la misma coordenada espacial en el referencial del reloj $\Rightarrow \Delta x' = 0 \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \frac{1}{2} \Delta t$

$$\Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{v = c \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

II.2.1 - Mediciones y eventos

Con lo anterior surge la necesidad de precisar la medición y, con ello, como podemos describir los eventos.

Los puntos del espacio-tiempo los podemos describir imaginando eventos y las coordenadas del mismo describen la ubicación en cada sist. de referencia del evento en cuestión.

Esto es semejante al concepto de carga de prueba cuando una la define el campo eléctrico. Para definir el campo eléctrico imaginamos una part. con carga en una ubicación y tomamos el cociente de la fuerza y la carga en el límite de carga nula para que la misma no altere la distribución de cargas en el espacio. Aquí imaginamos el evento a fin de caracterizar un punto del espacio-tiempo.

Asignación de coordenadas

Al medir, un observador asignará a cierto evento las coordenadas (x, y, z, t) mientras que otro asignará las coordenadas (x', y', z', t') . Como mencionamos, dado que los eventos no ocurren en la ubicación del observador, no resulta evidente la forma en que éste asigna, en particular, el instante de tiempo en que el evento tuvo lugar.

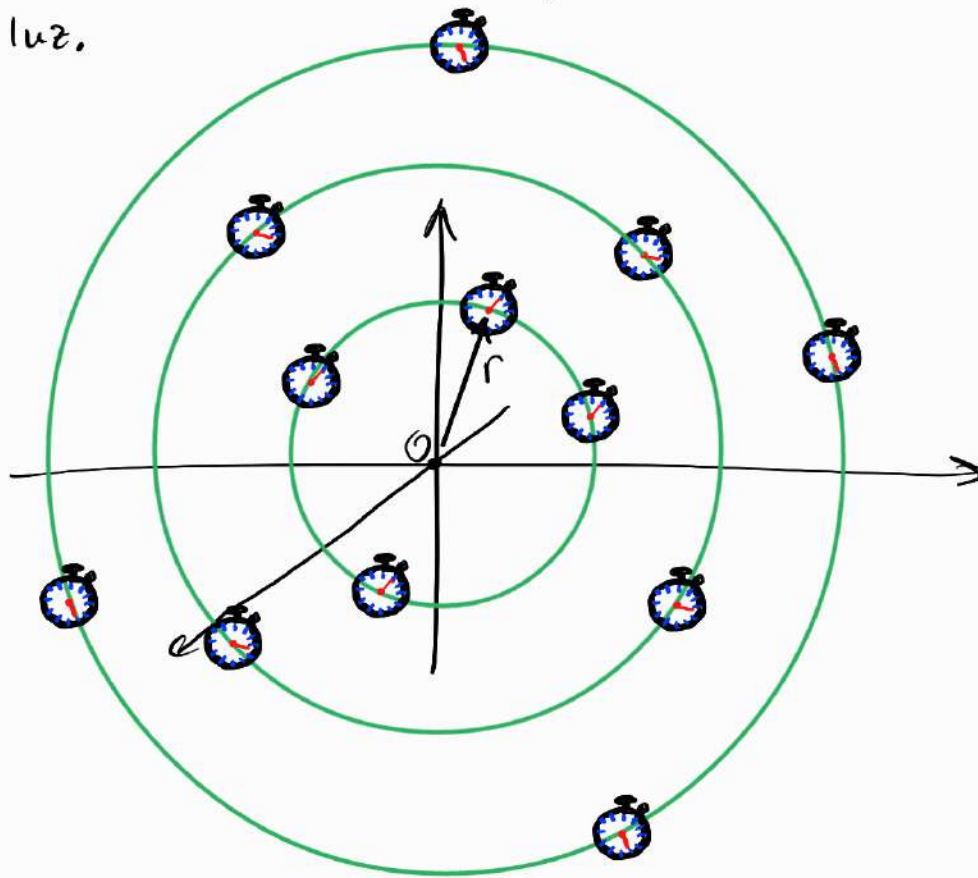
Para esto imaginamos que cada observador ha dispuesto en cada punto del espacio un reloj sincronizado con el suyo.

Esta sincronización puede pensarse de varias formas, por ejemplo comenzando a correr un reloj en $t=t_0$ y enviando un pulso de luz en todas las direcciones y que cada reloj marque el tiempo

$$t = t_0 + \frac{r}{c}$$

para el evento del pulso de luz llegando al reloj en cuestión.

siendo r la distancia del reloj al observador O y c la velocidad de la luz.



De esta forma podemos asignarle a cada evento que tiene lugar en cualquier punto del espacio las coordenadas espaciales en que tuvo lugar el evento (para ello imaginemos un grillado espacial fijo en el referencial del observador) y el tiempo t que marca el reloj en el lugar del evento al momento del evento.

