Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2023

Práctico 6: Diferenciación, Variación Acotada y Continuidad absoluta

1. (Ejercicio 10 cap. 3 [RA]). Construir una función estrictamente creciente F en $\mathbb{R}$ cuyos puntos de discontinuidad sean exactamente $\mathbb{Q}$.

2. (Ejercicio 11 cap. 3 [RA]). Si $a, b > 0$, sea

$$f(x) = \begin{cases} x^a \operatorname{sen}(x^{-b}) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Probar que f es de variación acotada en $[0,1]$ si y sólo si $a > b$.

   Dado $0 < \alpha < 1$ probar que existe $a = b$ tales que f satisface la condición de Lipschitz de exponente α para cierta constante $A > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$$

   pero que no sea de variación acotada.

   (Sugerencia: Notar que si $h > 0$, la diferencia $|f(x+h) - f(x)|$ puede ser estimada por $C(x+h)^\alpha$, o bien $C'h/x$ por teorema de valor medio. Luego, considerar dos casos, o bien $x^{a+1} \geq h$ o bien $x^{a+1} < h$. ¿Qué relación existe entre α y a?)

3. (Ejercicio 12 cap. 3 [RA]). Sea $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$. Probar que la derivada $F'(x)$ existe para todo x pero que F' no es integrable en $[-1,1]$.

4. (Ejercicio 13 cap. 3 [RA]). Probar que la función de Cantor-Lebesgue (Ejercicio 1.d del Práctico 1) no es absolutamente continua.

5. Mostrar que la función $x \mapsto \sqrt{x}$ es absolutamente continua en $[0,1]$ (Sugerencia: Es primitiva de una función en L^1). Notar que dado $\delta > 0$ se cumple que si se toma $(a_i, b_i) = (0, \delta/n)$ con $1 \leq i \leq n$ tenemos que la suma de las longitudes es δ pero $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| = \sqrt{N\delta}$. Esto muestra la importancia de que los intervalos sean disjuntos en la definición de continuidad absoluta.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que la derivada f' existe en **todo** punto y es una función integrable. Mostrar que f es absolutamente continua.

7. (Ejercicio 15 cap. 3 [RA]). Supongamos que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada y continua. Probar que $F = F_1 - F_2$, donde ambas F_1 y F_2 son monótonas y continuas.

8. (Ejercicio 16 cap. 3 [RA]). Probar que si F es de variación acotada en $[a,b]$ entonces:

   a) $\int_a^b |F'(x)|\, dx \leq T_F(a,b)$.

   b) $\int_a^b |F'(x)|\, dx = T_F(a,b)$ si y sólo si F es absolutamente continua.

9. (Ejercicio 19 cap. 3 [RA]) Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces

a) f lleva conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero.

b) f lleva conjuntos medibles (Lebesgue) en conjuntos medibles (Lebesgue).

10. (Ejercicio 20 cap. 3 [RA]) Se consideran funciones F crecientes y absolutamente continuas en $[a,b]$ tales que $F(a) = A$ y $F(b) = B$ para ciertos $A \leq B$ dados.

    a) Probar que existe una tal F que además es estrictamente creciente pero tal que $F'(x) = 0$ es un conjunto de medida positiva.

    b) Probar que la F de la parte anterior puede ser escogida de forma tal que existe $E \subset [A,B]$ medible con $m(E) = 0$, tal que $F^{-1}(E)$ no es medible.

    c) Probar que, sin embargo, para toda tal F creciente y absolutamente continua, y para todo $E \subset [A,B]$ medible, el conjunto $F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$ es medible.

    (Sugerencia: Para la parte *a*) considerar $F(x) = \int_a^x \chi_D$ con D el complemento de un conjunto de Cantor $C \subset [a,b]$ de medida positiva. Para la parte *b*) notar que $F(C)$ tiene medida 0. Para la parte *c*) probar primero que $m(\mathcal{O}) = \int_{F^{-1}(\mathcal{O})} F'(x)\,dx$ para todo abierto $\mathcal{O}$.)

11. **Funciones convexas** (recordar Ejercicio 11 de Práctico 5).

    a) (Problema 4 cap. 3 [RA]) Mostrar que $f : I \subset \mathbb{R}$ (con $I \subset \mathbb{R}$ conexo) es convexa si y sólamente si es absolutamente continua, su derivada f' existe para todo punto de I excepto a lo sumo en un conjunto numerable de puntos $X \subset I$ y f' restricta a $I \setminus X$ es no decreciente.

    (Sugerencia: En el libro [RA] este ejercicio está más guiado)

    b) Mostrar que si f es convexa entonces f'' existe ctp x y cumple que $f'' \geq 0$.

12. $(*)$ **Funciones continuas no derivables en todo punto.**

    a) Sean $a_n = 10^{-n}$ y $b_n = 10^{n^2}$. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

    $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(b_n x)$$

    es uniformemente continua, pero no es derivable en ningún punto. Este es un ejemplo de *función de Weierstrass*[1](ver Figura 1).

    b) La Figura 2 representa los gráficos de una sucesión de funciones f_n que converge uniformemente a una función continua f. Esta función límite f se denomina *función de Bolzano* y los docentes del curso creemos que es no derivable en todo punto. Es así? Imaginan una prueba de este hecho? (Nota: No sabemos si existe una prueba elemental o no.)

    c) Ahora sí, una función para la que sabemos que existe una prueba relativamente sencilla (de su no diferenciabilidad en todo punto):

    Consideremos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x|$ para todo $x \in [-1,1]$ y $g(x+2) = g(x)$ para los restantes x. Para cada $k \geq 0$ sea

    $$g_k(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^k g(4^k x).$$

[1] Ver por ejemplo https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function

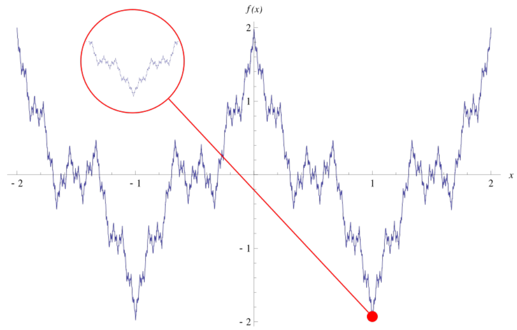

Figura 1: Gráfico de la función de Weierstrass. Es una curva fractal con marcadas autosimilitudes.

Figura 2

Para cada $n \geq 0$ sea

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

i) Graficar los primeros iterados g_0, g_1, g_2, etc...

ii) Graficar los primeros iterados f_0, f_1, f_2, etc...

iii) Probar que la sucesión de funciones continuas f_n converge uniformemente a una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

iv) Para cada $n \geq 0$ sea $A_n = \{\frac{k}{4^n}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Probar que para todo $m \geq n$ el valor de la función f_m en los puntos de A_n coincide con el valor de f_n en dichos puntos. Concluir que $f|_{A_n} = f_n|_{A_n}$.

v) Probar que si $[a_n, b_n] = [\frac{k_n}{4^n}, \frac{k_n+1}{4^n}]$ es una sucesión de intervalos para cierta sucesión de enteros k_n entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{4^n} \right| = \infty.$$

(Sugerencia: La función f_n restringida a $[a_n, b_n]$ es lineal. Ver que $|f_n'| > 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1}$ en $[a_n, b_n]$. Luego usar la parte anterior.)

vi) Dado x un punto de $\mathbb{R}$ cualquiera, sea k_n una sucesión de enteros tales que $x \in [a_n, b_n] = [\frac{k_n}{4^n}, \frac{k_n+1}{4^n}]$ para todo $n \geq 0$. Sean $h_n = b_n - x$ y $h_n' = a_n - x$. Probar que o bien

$$\lim_{h_n \xrightarrow{n} 0} \left| \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \right| = \infty$$

o bien

$$\lim_{h_n' \xrightarrow{n} 0} \left| \frac{f(x + h_n') - f(x)}{h_n'} \right| = \infty.$$

Concluir que f no es derivable en x. Como x era un punto cualquiera de $\mathbb{R}$, entonces f no es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$!

13. Probar que si f es absolutamente continua entonces:

    1. Es uniformemente continua.
    2. Es de variación acotada, y por lo tanto existe $f'(x)$ ctp x.
    3. La función $T_f(a, x)$ es absolutamente continua.
    4. Si descomponemos $f(x) = P_f(a, x) - N_f(a, x)$ entonces P_f y N_f son continuas.
    5. La función F dada por $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ es absolutamente continua (para esta parte, asumir sólamente que f integrable).

14. (Ejercicio 24 Cap. 3 de [RA]). Sea F creciente en $[a, b]$.

    a) Probar que se puede escribir
    $$F = F_A + F_C + F_J,$$
    donde cada función F_A, F_C y F_J es no decreciente y cumple:
    1) F_A es absolutamente continua.
    2) F_C es continua, pero $F_C'(x) = 0$ ctp x.
    3) F_J es una 'función salto'[2].

    b) Más aún, probar que cada componente F_A, F_C y F_J está unívocamente determinada a menos de una constante aditiva.

    Esta descomposición se denomina *descomposición de Lebesgue* de F.

15. Sea $(q_n)_{n\geq 1}$ una enumeración de los racionales. Considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2|x-q_n|^2}$. Mostrar que f está bien definida y es finita en m-ctp. Mostrar que es integrable pero que es no acotada en todo intervalo de $\mathbb{R}$.

16. (∗)

    a) Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{2^{n+1}\pi i x}$. Probar que f no es derivable en ningún punto.

    b) ¿Existe una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que sea derivable, con derivada acotada y tal que f' no es una función integrable Riemann? ¿Y si en la pregunta anterior sustituimos Riemann por Lebesgue?

17. (∗) Decimos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *Hölder continua* de exponente $\alpha \in (0, 1]$ si se cumple que existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$ (Nota: cuando $\alpha = 1$ esto también se conoce como *función Lipschitz*). Usando la desigualdad de Hölder mostrar que si f es absolutamente continua y $f' \in L^p$ entonces f es α-Hölder con $\alpha = 1 - 1/p$. Mostrar que si $p = \infty$ entonces f es Lipschitz y dar ejemplos donde $p = 1$ y f no es Hölder para ningún exponente.

---

[2] Decimos que F_J definida en $[a, b]$ es una *función salto* si existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de puntos en $[a, b]$ con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$, una sucesión de reales no negativos $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ con $\sum_{n\geq 0} \alpha_n < \infty$, y una sucesión de reales $(\theta_n)_{n\geq 0}$ con $0 \leq \theta_n \leq 1$ para todo $n \geq 0$, tales que
$$F_J(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n j_n(x)$$
para todo $x \in [a, b]$, siendo $j_n(x)$ igual a 0 si $x < x_n$, igual a θ_n si $x = x_n$ o igual a 1 si $x_n < x$. Ver Sección 3.3 de [RA].