



ESCALAS ANATÓMICAS: CONSECUENCIAS DE LAS DIFERENCIAS DE TAMAÑO

Gustavo Grinspan
Sección Biofísica y Biología de Sistemas

1º de junio de 2023

ITINERARIO DE LA CLASE:

- CONSECUENCIAS DEL TAMAÑO SOBRE EL CRECIMIENTO
 - CRECIMIENTO ISOMÉTRICO
 - CRECIMIENTO ALOMÉTRICO

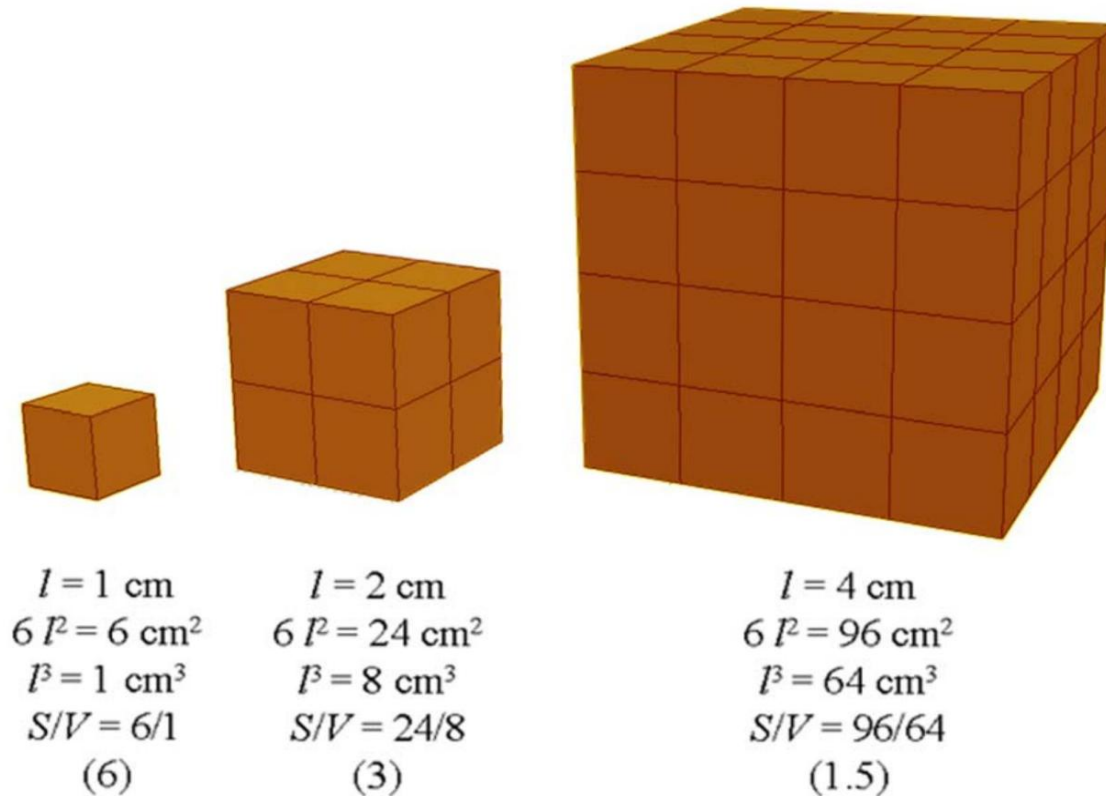
- CONSECUENCIAS DEL TAMAÑO SOBRE LAS TENSIONES
 - SIMILITUD DE TENSIÓN

- CONSECUENCIAS DEL TAMAÑO SOBRE EL MOVIMIENTO
 - SIMILITUD DINÁMICA

CONSECUENCIAS DEL TAMAÑO SOBRE EL CRECIMIENTO

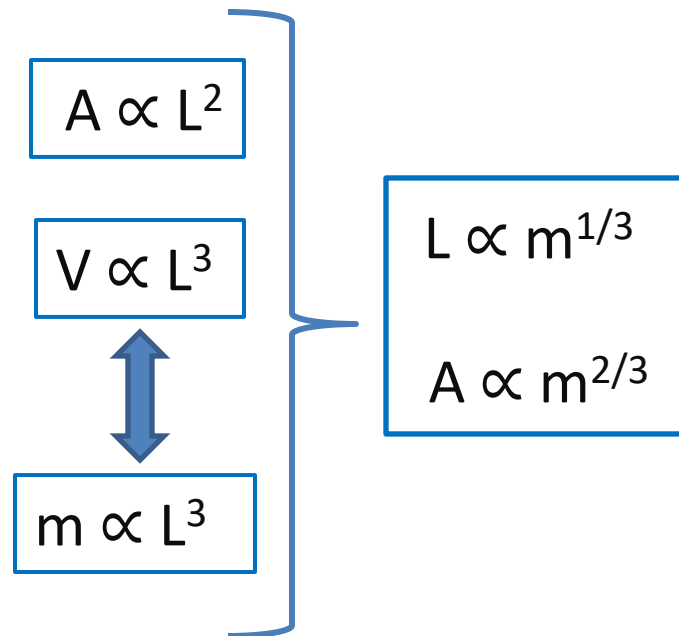
CRECIMIENTO ISOMÉTRICO O SIMILITUD GEOMÉTRICA:

- Dos formas son geoméricamente similares, si una puede hacerse idéntica a la otra mediante la multiplicación de todas sus longitudes por el mismo factor.



Si duplicamos la longitud de un cubo y después la volvemos a doblar, los cambios en superficie y volumen son proporcionalmente mayores. Así, si el largo de una arista se multiplica por 1, 2, y 4 cm, la superficie de las caras se multiplica por el cuadrado de su longitud y el volumen por el cubo de su longitud. La forma del cubo permanece constante, pero el cubo menor tiene relativamente más superficie por unidad de volumen que el cubo más grande.

- Claramente, en términos absolutos, un cuerpo grande tiene más superficie y más volumen que un cuerpo pequeño.
- Pero hay que fijarse en los cambios relativos entre longitud, superficie y volumen. Estos son consecuencia directa de los cambios de tamaño.
- El argumento clásico de la similitud geométrica aplicada a los animales, es que si éstos fueran símiles geoméricamente, las áreas (A) aumentan en proporción (\propto) al cuadrado de sus dimensiones lineales (L) y los volúmenes al cubo:



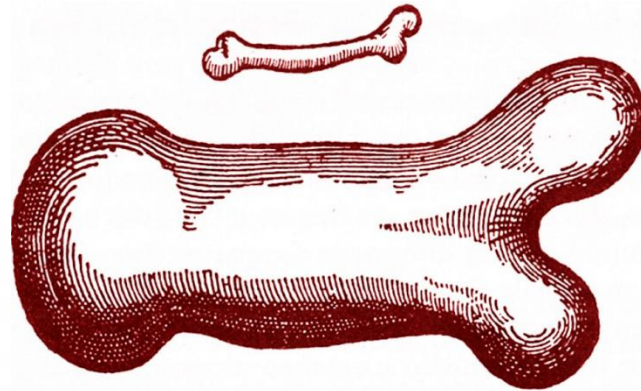
PRINCIPIO DE SIMILITUD GEOMÉTRICA

“...Ni la naturaleza puede producir árboles de extraordinario tamaño, porque las ramas se romperían bajo su propio peso. Así, también sería imposible reforzar las estructuras óseas de los hombres, de los caballos y de los otros animales de manera que se mantuvieran juntas y cumplieran sus funciones normales si estos animales tuvieran que incrementar enormemente su altura; ya que este incremento de altura se conseguiría solamente empleando un material mucho más duro y fuerte que el usual, o agrandando el tamaño de los huesos y cambiando, de esta manera, su figura hasta que la forma y apariencias de los animales sugiriera una monstruosidad. Quizás esto es lo que pensaba nuestro docto poeta cuando al describir un enorme gigante dice:


*Imposible reconocer su altura,
Tan inmensamente grande es su grosor.*

Gallileo Galilei

“...Para poner un breve ejemplo, dibujemos la figura de un hueso alargado solamente tres veces más de lo que era, pero habiendo agrandado su grosor en tal proporción que pudiese realizar en el animal grande la función que correspondería al hueso más pequeño en el animal también más pequeño.”



Gallileo Galilei

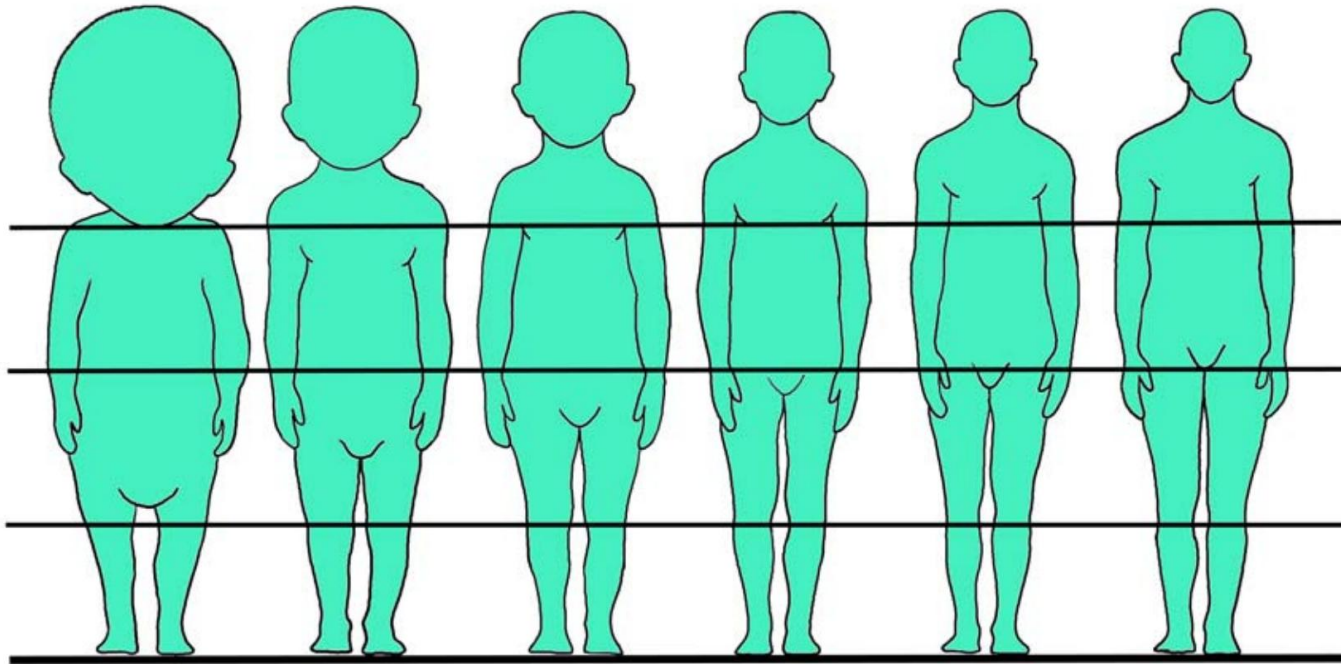
A scroll of parchment with a quote by Galileo Galilei. The scroll is unrolled, showing the text in the center. The parchment is aged and has some creases and discoloration. The text is written in a black, serif font. The quote is: "Por las figuras podéis ver que desproporcionada es la figura del hueso agrandado. De aquí se deduce que quien quisiera mantener, en su inmenso gigante, las proporciones que se dan entre los miembros de un hombre normal, tendría o bien que encontrar un material mucho más duro y resistente para formar así los huesos, o bien que admitir una disminución de su potencia en relación con la de los hombres de estatura normal; de otro modo, si su altura creciese de manera desmesurada, acabaría derrumbándose por obra de su propio peso."

“Por las figuras podéis ver que desproporcionada es la figura del hueso agrandado. De aquí se deduce que quien quisiera mantener, en su inmenso gigante, las proporciones que se dan entre los miembros de un hombre normal, tendría o bien que encontrar un material mucho más duro y resistente para formar así los huesos, o bien que admitir una disminución de su potencia en relación con la de los hombres de estatura normal; de otro modo, si su altura creciese de manera desmesurada, acabaría derrumbándose por obra de su propio peso.”

Gallileo Galilei

CRECIMIENTO ALOMÉTRICO:

- Para mantener un diseño funcionalmente equilibrado, los seres vivos optimizan las magnitudes de diferentes variables anatómicas o fisiológicas con respecto al tamaño.
- Este comportamiento se desvía de la proporcionalidad directa característica de la similitud geométrica.



Cambios de proporciones en el cuerpo humano durante su crecimiento.

- La alometría permite entonces estudiar, por ejemplo, como dependen ciertas magnitudes (ej. energía consumida, superficie de la piel, tamaño del cráneo, ritmo cardiaco, etc.) del tamaño de los organismos.
- Esto implica que las relaciones de tales magnitudes en animales de diferente tamaño, pueden generalizarse con la siguiente expresión matemática:

$$y = aX^b$$

donde:

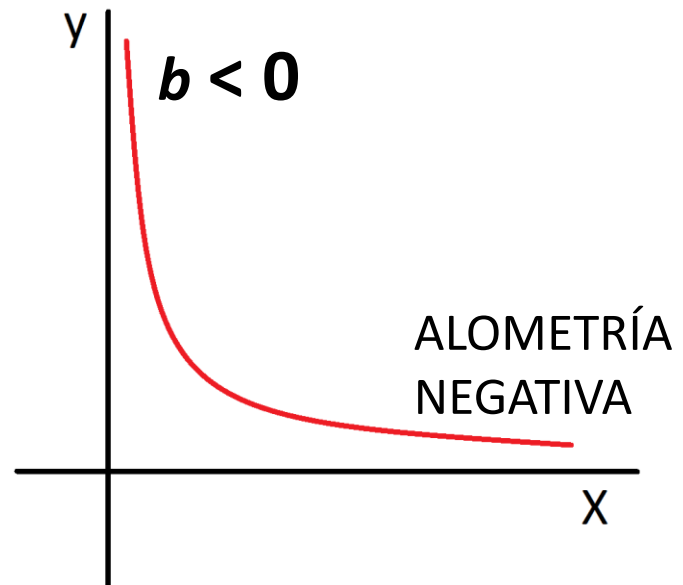
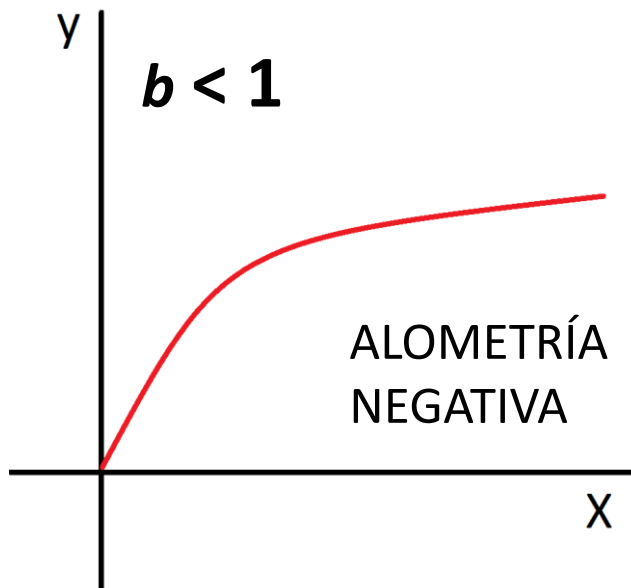
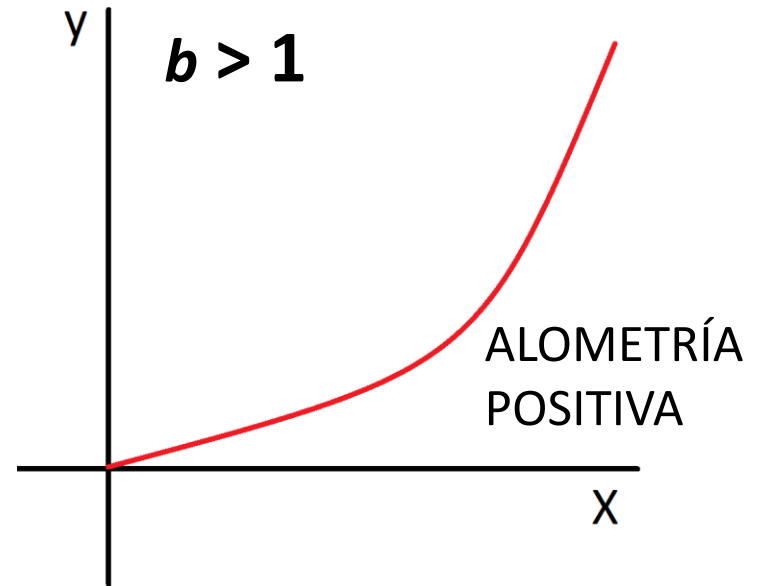
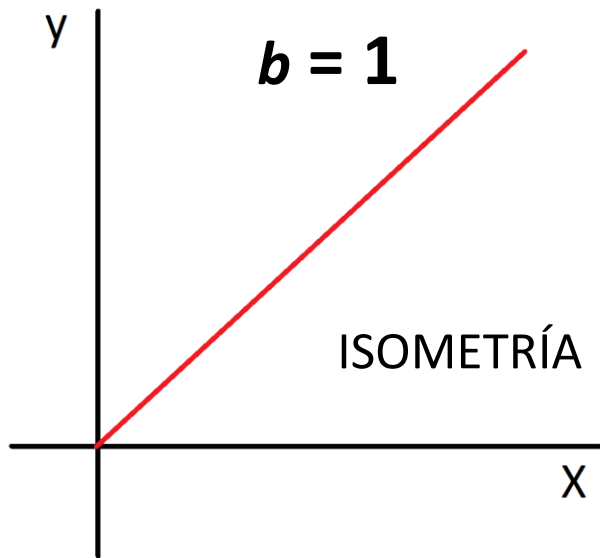
y: variable dependiente (magnitud o dimensión corporal cuya variación queremos estudiar)

X: variable independiente (otra magnitud o dimensión que tomamos como referencia, normalmente una medida del tamaño «global» del organismo como la masa o el volúmen).

a: constante

b: constante (“coeficiente alométrico”)

$$y = aX^b$$

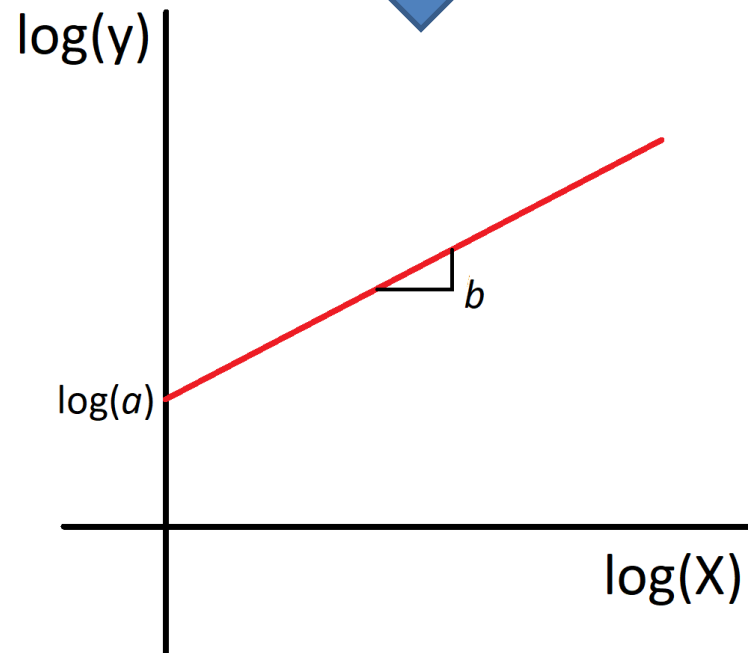


- Obtención de los coeficientes a y b a partir de datos experimentales

$$y = aX^b$$

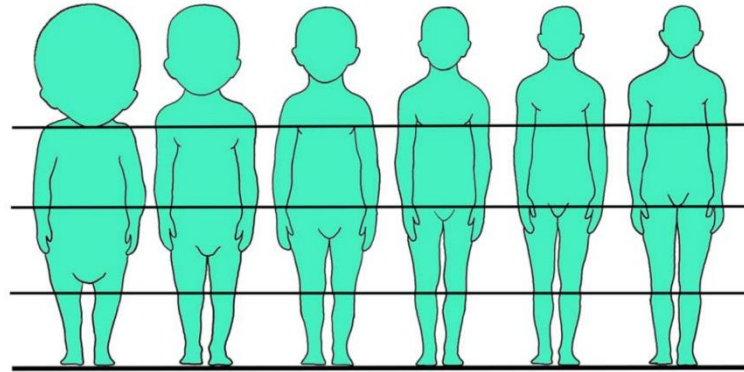
$$\log(y) = \log(aX^b) = \log(a) + \log(X^b) = \log(a) + b.\log(X)$$

$$\log(y) = \log(a) + b.\log(X)$$



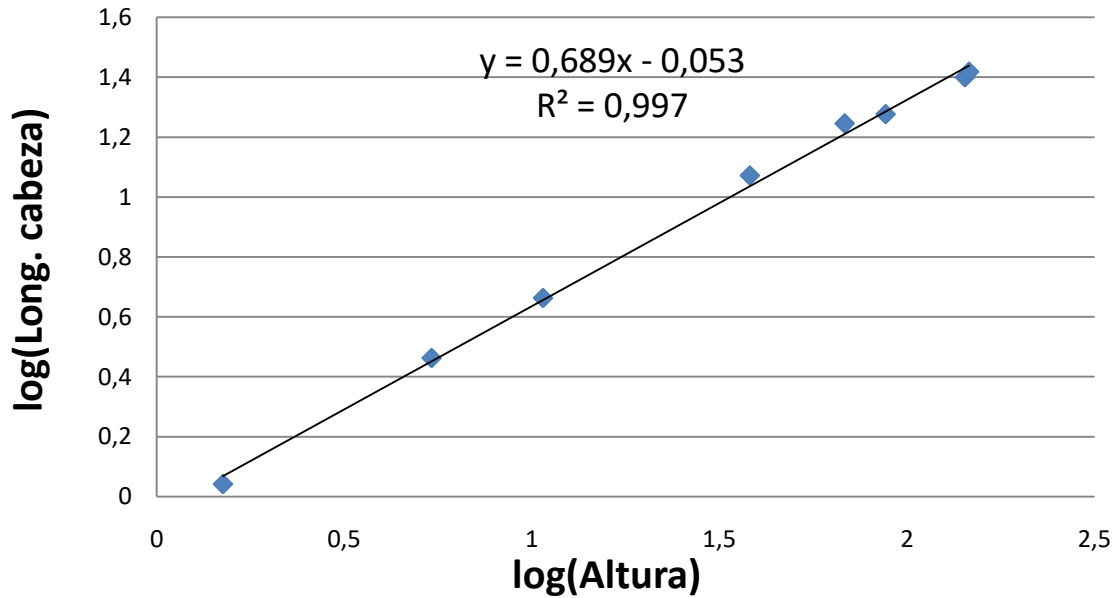
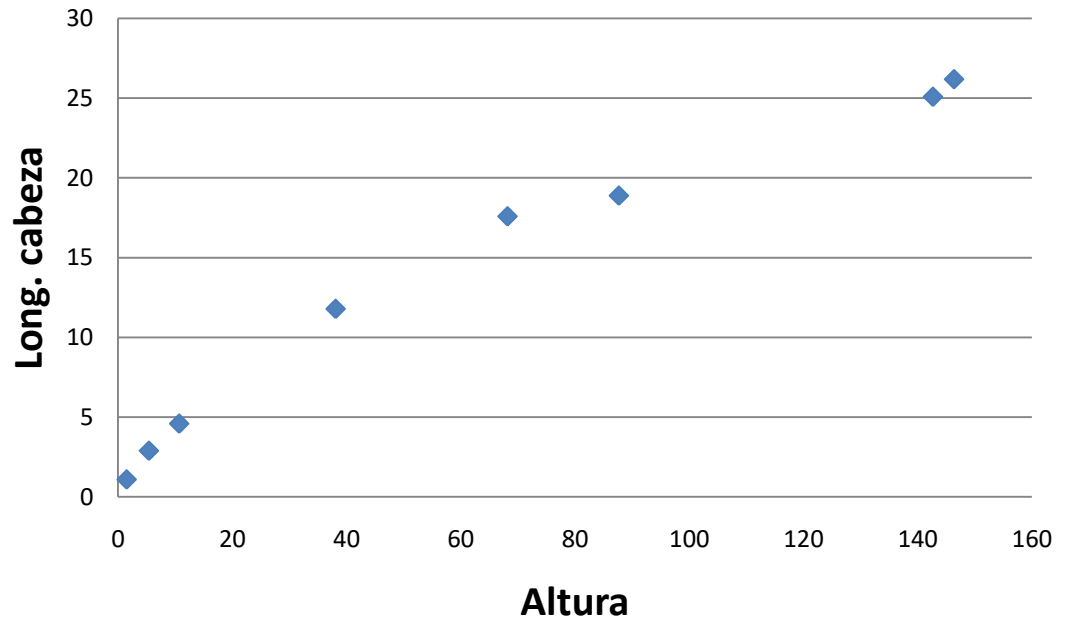
• Ejemplo:

Los bebés y los niños tienen cabezas proporcionalmente más grandes que los adultos. Utilizando los datos de la tabla siguiente, vamos a determinar el tipo de crecimiento (alométrico/isométrico) entre la longitud de la cabeza y la altura (longitud) hasta los hombros.



edad	longitud total	Longitud cabeza	Longitud hombros
8 semanas	2.5 cm	1.1 cm	1.5 cm
12 semanas	8.1 cm	2.9 cm	5.4 cm
16 semanas	15.2 cm	4.6 cm	10.7 cm
nacimiento	50.0 cm	11.8 cm	38.1 cm
2 años	87.0 cm	17.6 cm	68.2 cm
5 años	108.0 cm	18.9 cm	87.7 cm
15 años	170.0 cm	25.1 cm	142.7 cm
adulto	177.0 cm	26.2 cm	146.4 cm

Medidas corporales humanas en diferentes edades.



$$b = 0.69$$

Alometría negativa:
la cabeza crece más despacio que el resto del cuerpo.

- Más ejemplos de escalado de diferentes variables anatómicas/fisiológicas:

Longitud vs. masa corporal en ballenas

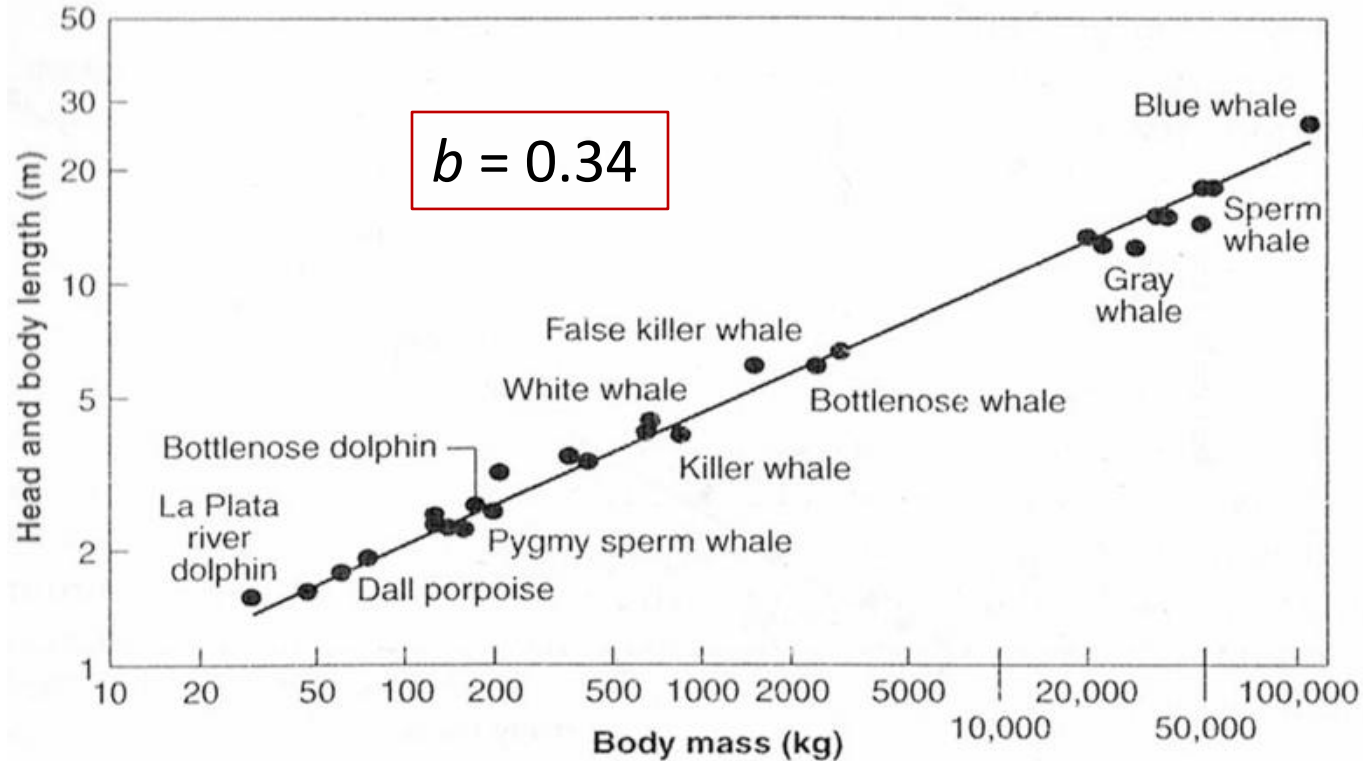


Fig. 4.1. A graph on logarithmic coordinates of length against body mass for whales. The slope of the regression line is 0.34. From Economos (1983).

Nota: las distancias a lo largo de los ejes son proporcionales a los logaritmos de las respectivas masas y las longitudes. Así, notar por ejemplo que la distancia a lo largo del eje horizontal de 10-100 es la misma que de 100-1000 y 1000-10000 Kg. Graficar de esta forma, es equivalente a graficar $\log(\text{largo})$ vs. $\log(\text{masa})$.

Área alar vs. masa corporal en colibríes y otras aves.

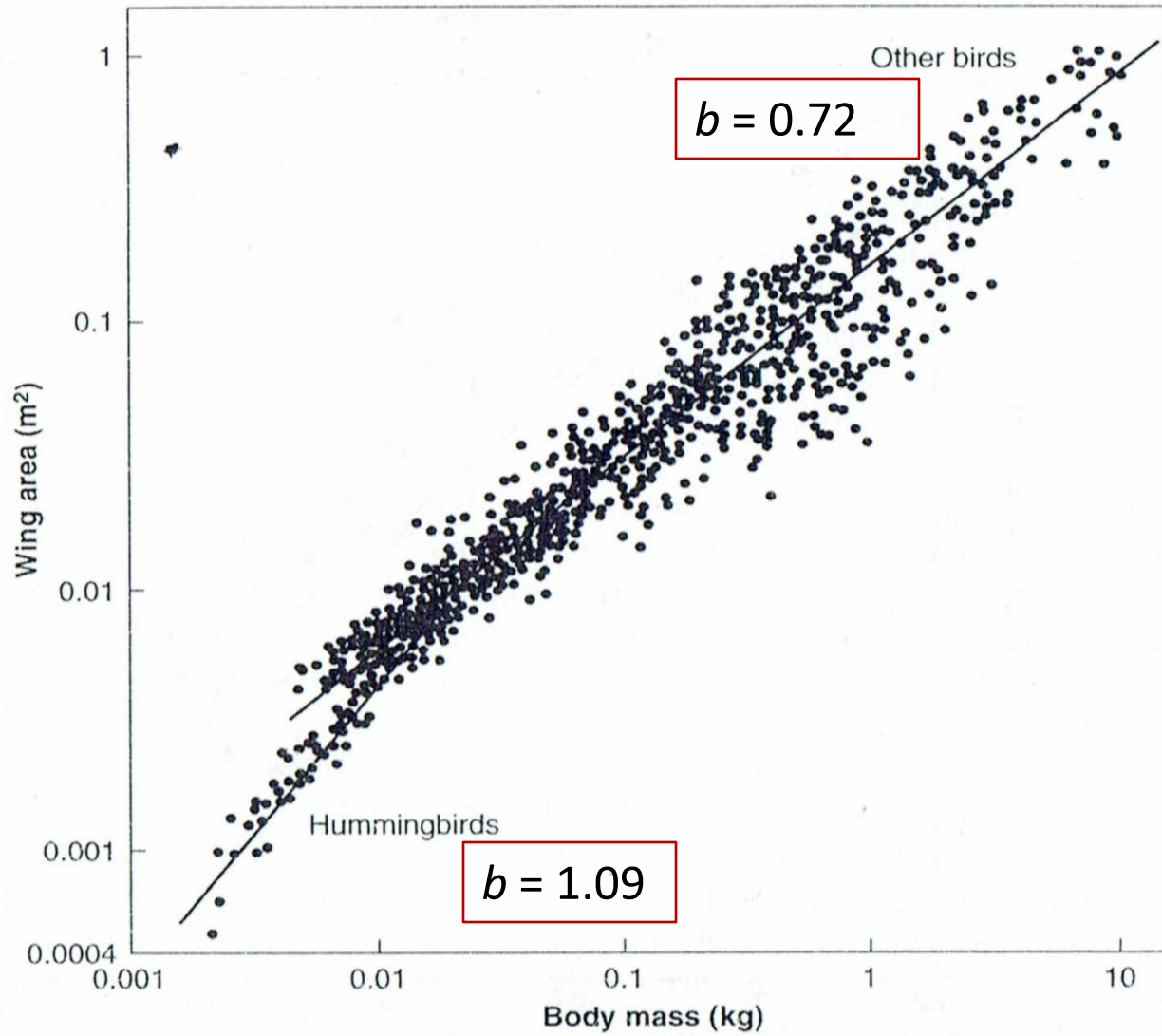


Fig. 4.2. A graph on logarithmic coordinates of wing area against body mass for birds. The slopes of the lines, fitted by reduced major axis regression, are 1.09 for hummingbirds and 0.72 for other birds. From Rayner (1987).

Frecuencia de batido de alas vs. masa corporal en abejas euglossinas (o abejas de las orquídeas).

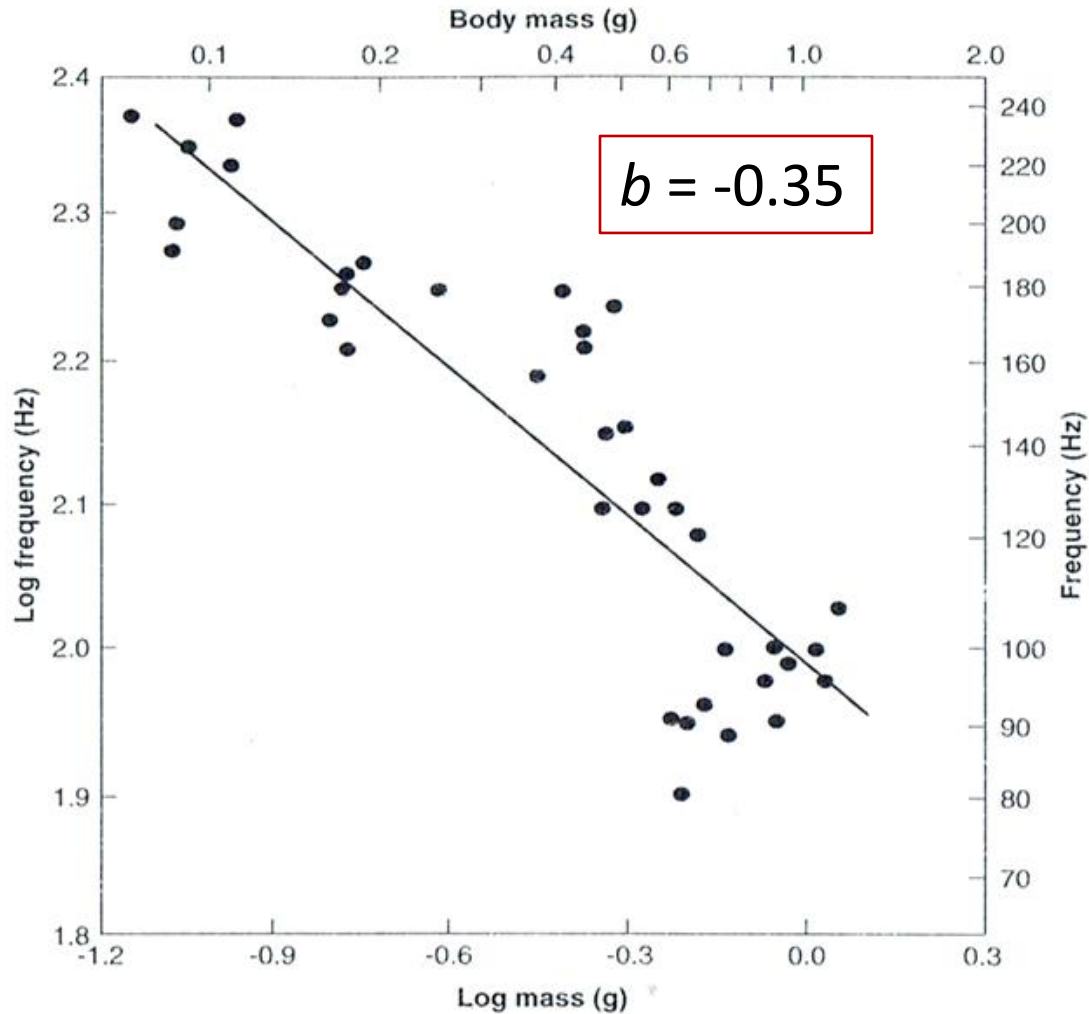


Fig. 4.3. A graph of the logarithm of wing beat frequency against the logarithm of body mass for euglossine bees. Scales of frequency and mass are also shown. From Casey et al. (1985).

LEY DE KLEIBER:
Tasa metabólica vs. masa corporal en mamíferos

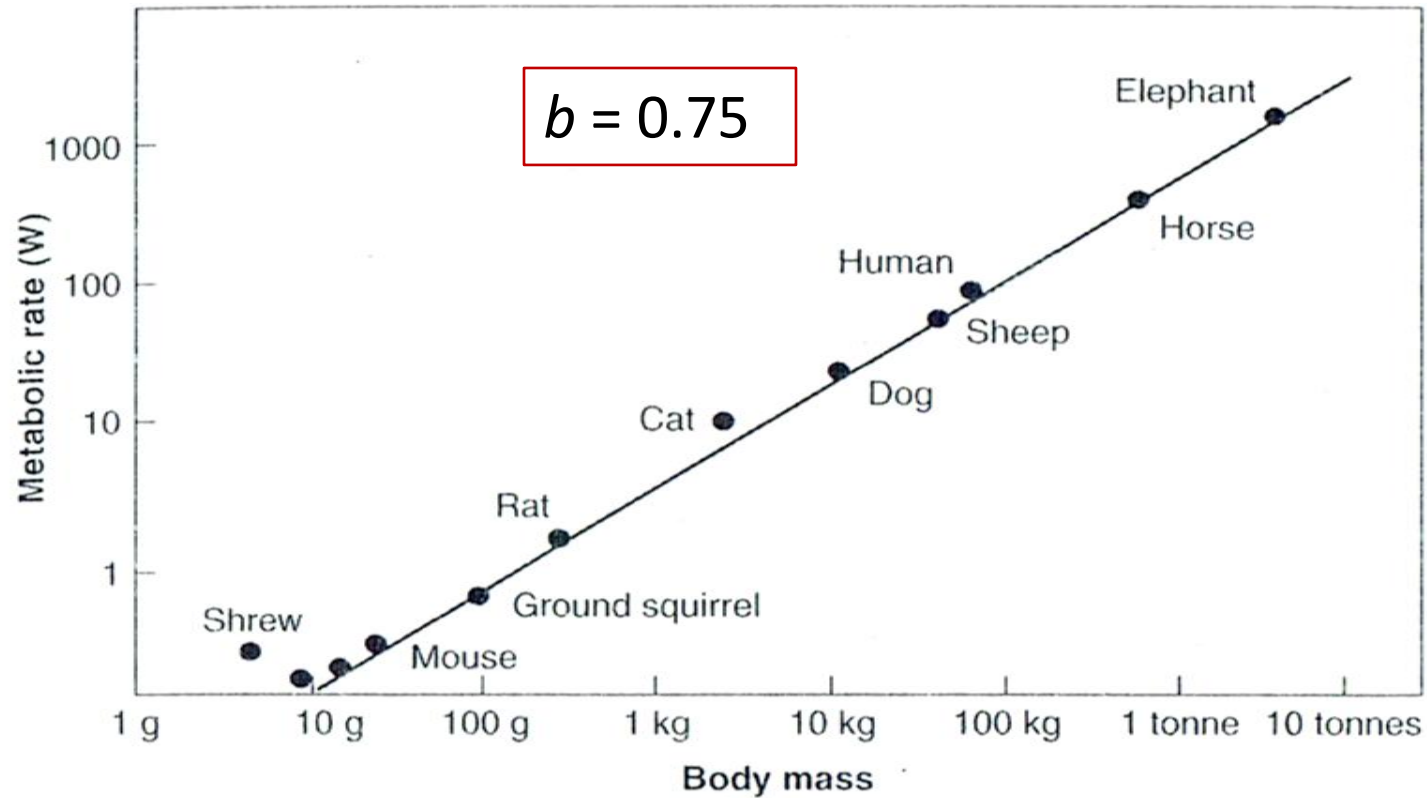


Fig. 4.4. A graph of logarithmic coordinates of resting metabolic rate against body mass for mammals. From Alexander (1999).

TABLE 3.2. RELATIVE MAGNITUDES IN MAMMALIAN DESIGN: SCALING FACTORS FOR THE ALLOMETRIC EQUATION, $y = bx^a$. THE INDEPENDENT VARIABLE, x , IS THE CUBE ROOT OF BODY MASS; THE UNITS ARE SI (KILOGRAMS, SECONDS, METERS, WATTS). DATA EXCERPTED FROM PETERS (1983) AND SCHMIDT-NIELSEN (1984).

y	a	b
Surface area	1.95	0.11
Skeletal mass (terrestrial)	3.25	0.0608
Skeletal mass (cetaceans)	3.07	0.137
Muscle mass	3.00	0.45
Metabolic rate	2.25	4.10
Effective lung volume	3.09	0.0000567
Frequency of breathing	-0.78	0.892
Heart mass	2.94	0.0058
Frequency of heartbeat	-0.75	4.02
Kidney mass	2.55	0.00732
Liver mass	2.61	0.033
Brain mass (nonprimates)	2.10	0.01
Brain mass (humans)	1.98	0.085

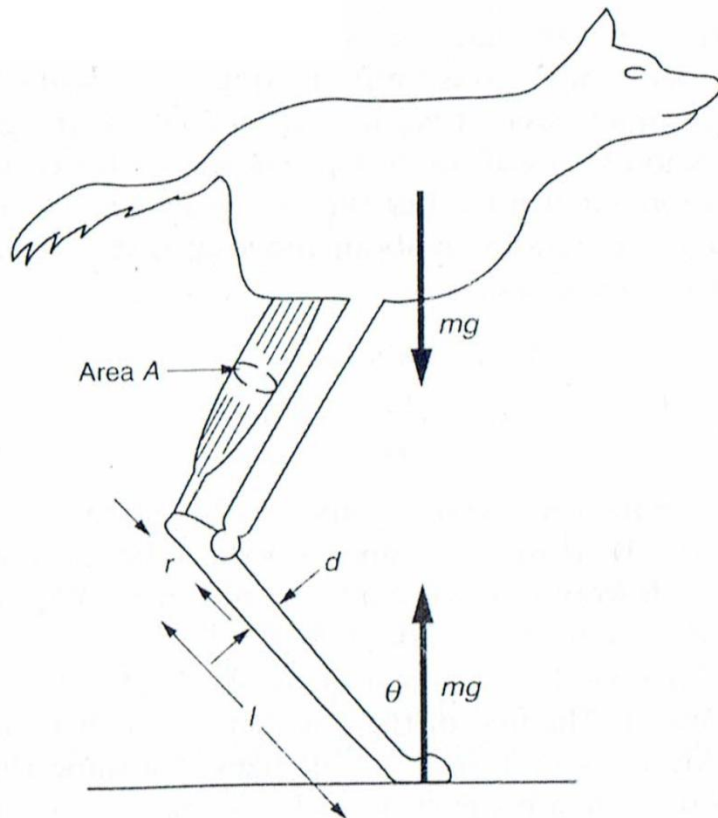
• EJERCICIO:

13. La masa del esqueleto de los mamíferos (M_e , en kg) se relaciona con su masa corporal (M_c , en kg) según la relación empírica: $M_e = 0.061 \cdot M_c^{1.09}$. ¿Cómo interpreta el valor del exponente 1.09? Estime el porcentaje de hueso que tiene un mamífero de 5000 kg y uno de 50 g. Nota: $5000^{0.09} = 2.15$ y $0.05^{0.09} = 0.764$.

CONSECUENCIAS DEL TAMAÑO SOBRE LAS TENSIONES

SIMILITUD DE TENSIÓN:

- Idea central: un animal grande debe poder moverse y mantenerse en pie con las mismas tensiones a nivel de los músculos y huesos que un animal chico; sino el animal grande se quebraría o el chico estaría sobreconstruido.



¿Qué tiene que pasar para que el animal esté en equilibrio?

- Torques a nivel de la articulación (determinados por las fuerzas de reacción del piso y por las fuerzas ejercidas por los músculos) sean iguales en módulo:

$$A\sigma r = mgl \sin \theta$$

$$\sigma = \frac{mgl}{Ar} \sin \theta$$

- ¿Cómo deberían variar las longitudes, áreas musculares y brazos de palanca para hacer a los animales grandes viables según la similitud de tensión (i.e. para que las tensiones musculares no cambien con el tamaño)?

$$\sigma = \frac{mgl}{Ar} \sin \theta$$

- $Ar \propto m \longrightarrow \sigma \propto l \sin \theta$
- $\sin \theta \propto 1/l$ (ángulo disminuye conforme el tamaño es mayor)
- Experimentalmente se ha determinado que:

$$\left. \begin{array}{l} r/(l \sin \theta) \propto m^{0.26} \\ A \propto m^{0.8} \end{array} \right\} \sigma \propto m / (m^{0.8} m^{0.26}) = m^{-0.06}$$

(experimentalmente las tensiones deberían ser casi iguales al variar la masa)

La solución para que los animales puedan mantener iguales las tensiones musculares conforme el aumento del tamaño, es que los miembros sean más rectos.

- ¿Cómo deberían ser las dimensiones (diámetros, longitudes) de los huesos para que las tensiones sobre ellos también sean constantes?

$$\sigma = \frac{mgl}{Ar} \sin \theta$$

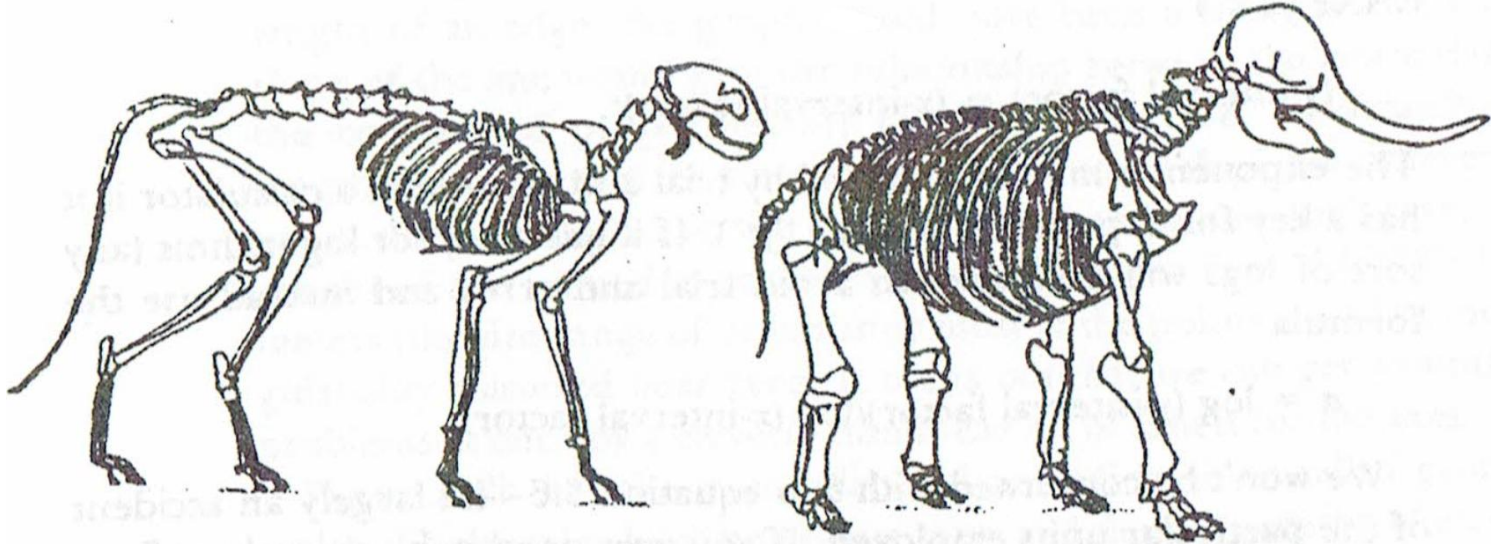
➤ Experimentalmente se ha determinado que:

$$\left. \begin{array}{l} l \sin \theta \propto m^{0.18} \\ d \propto m^{0.36} \end{array} \right\} \sigma = (mgl/d^3) \propto mm^{0.18} / (m^{0.36})^3 = m^{0.10}$$

Las tensiones sobre los huesos no son exactamente independientes de la masa, pero dan mucho menores respecto a lo esperado según la hipótesis de similitud geométrica ($\sigma \propto m^{1/3}$). Las tensiones crecen muy poco a medida que aumenta el tamaño.

- Por lo tanto, el elemento que se tiene en cuenta a la hora del diseño biológico de animales tales como los vertebrados terrestres, a efectos de que las tensiones sobre músculos y huesos sean independientes del tamaño, es el **ángulo** de las extremidades (> tamaño → extr. más rectas).
- Las extremidades de los animales con mayor tamaño no son mucho más gruesas relativamente, sino más rectas. Lo que cambia es la postura.

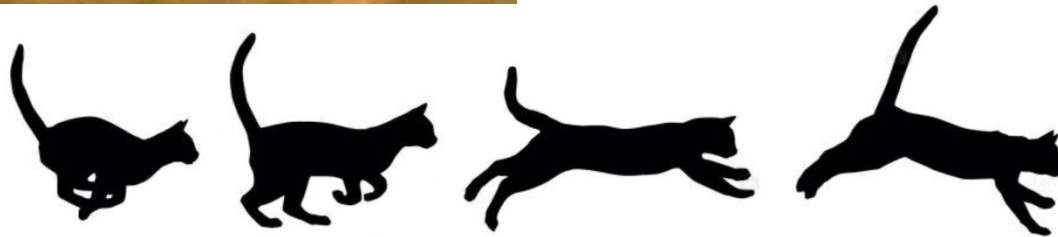
Esqueletos de un gato y un elefante representados a la misma escala.



¿Cómo puede diferenciarse el gato del elefante?

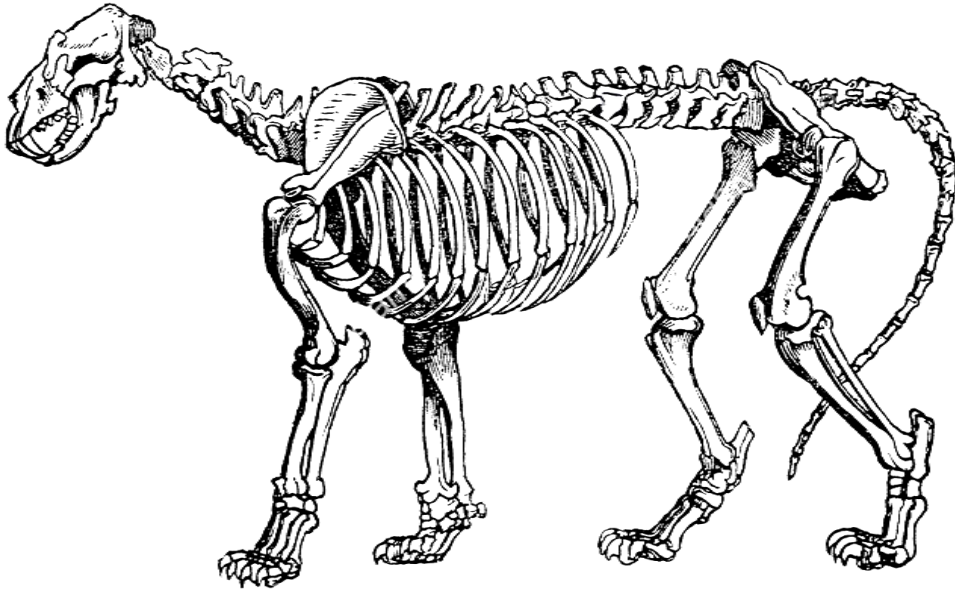
CONSECUENCIAS DEL TAMAÑO SOBRE EL MOVIMIENTO

SIMILITUD DINÁMICA:



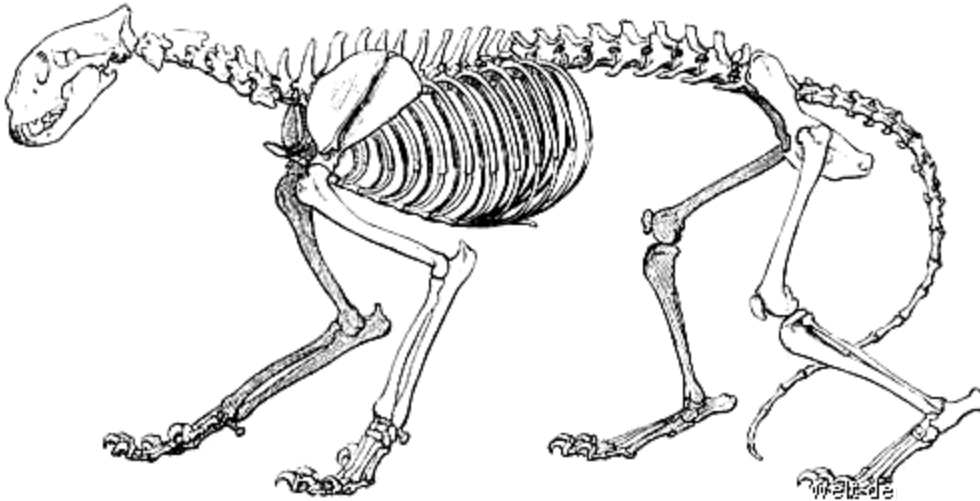
- Los leones son mucho más grandes que los gatos domésticos y realizan menos zancadas por segundo, pero aparte de eso, los movimientos de un león al galope son muy parecidos a los de un gato al galope.
- La **similitud dinámica** nos ayudará a realizar comparaciones como éstas y nos permitirá hacer generalizaciones sobre los movimientos de animales de diferentes tamaños.

León



Mamífero **cursorial**
(ej. ungulados, grandes carnívoros)

Gato doméstico



Mamífero **no cursorial**
(ej. roedores y pequeños carnívoros)

- Dos formas son **geoméricamente similares** si una pudiera hacerse idéntica a la otra multiplicando todas las longitudes por algún factor λ .



- Por una extensión del mismo tipo de pensamiento, dos movimientos son **dinámicamente similares** si uno pudiera hacerse idéntico al otro, multiplicando todas las longitudes por un factor λ , todos los tiempos por un factor τ , y todas las fuerzas por un factor ϕ .

- Si dos movimientos son dinámicamente similares, tiene que verificarse que:

$$\frac{m_1 v_1^2}{F_1 l_1} = \frac{m_2 v_2^2}{F_2 l_2} \longleftrightarrow \text{Ambos movimientos tienen que tener el mismo valor de } mv^2/Fl$$

- Dependiendo del tipo de movimiento considerado, y de las fuerzas que son relevantes en el mismo, la condición de arriba permite definir ciertos parámetros relevantes, como el **Nº de Froude (Fr)** o el **Nº de Reynolds (Re)**.

• **Nº de Froude (*Fr*):** el número de Froude es un número adimensional que relaciona el efecto de las **fuerzas inerciales** y las **fuerzas de gravedad**.

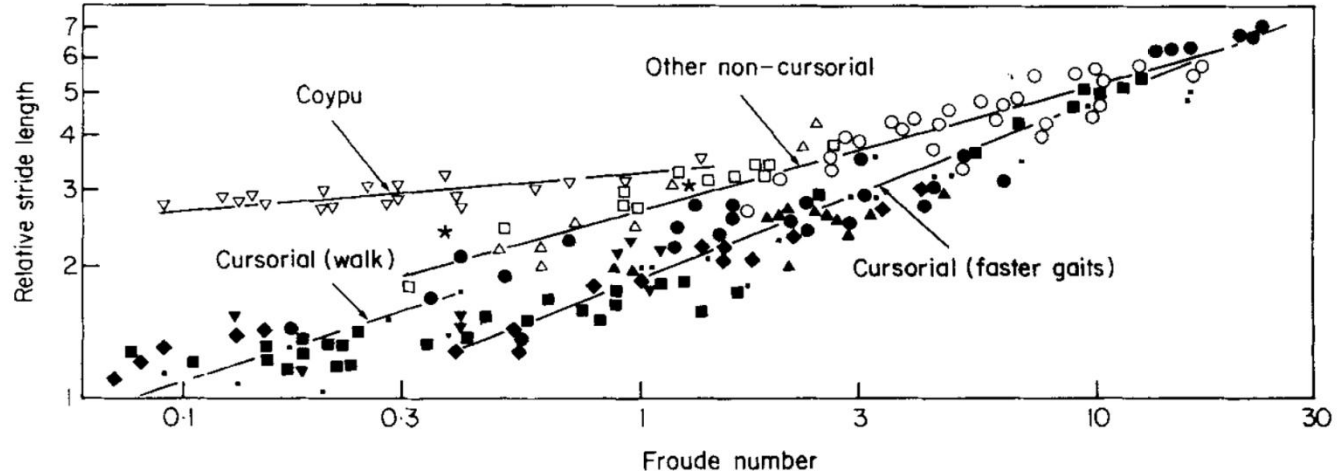
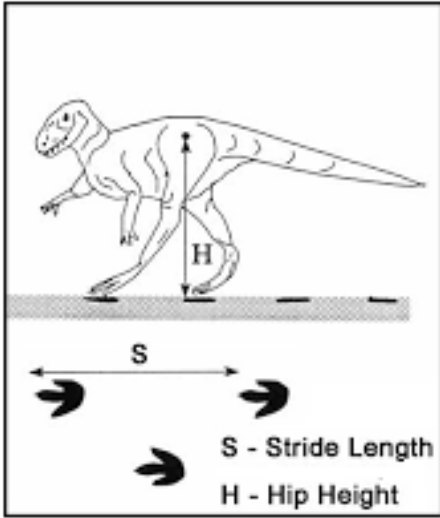


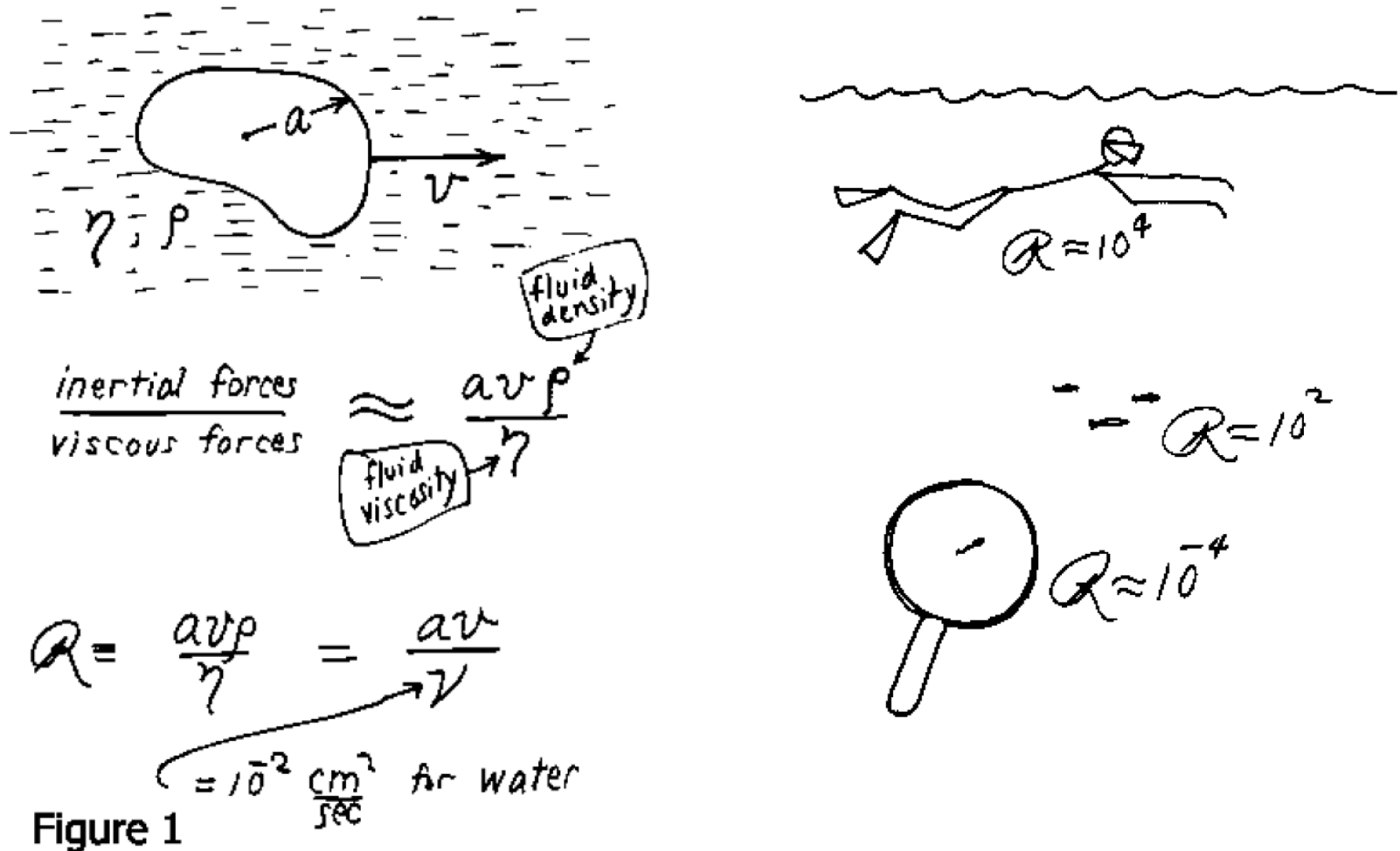
FIG. 3. A graph on logarithmic coordinates of relative stride length against Froude number, for quadrupedal mammals.

$$\frac{S}{H} = a(Fr)^b = a\left(\frac{v^2}{gl}\right)^b$$

	Factor a	Exponent <i>b</i> and 95% confidence limits	Standard deviation factor
Relative stride length			
Cursorial mammals, walking	2.4	0.34 ± 0.10	1.16
Cursorial mammals, faster gaits	1.9	0.40 ± 0.03	1.14
Coypu	3.3	0.09 ± 0.03	1.05
Other non-cursorial mammals	2.7	0.28 ± 0.03	1.10

Alexander y Jayes, 1983.

- **Nº de Reynolds (Re)**: el número de Reynolds es un número adimensional que establece la relación entre las **fuerzas inerciales** y las **fuerzas viscosas** de un fluido.



Properties of swimming in fluids

Reynolds number

Reynolds number stands for the ratio between the forces due to the mass and the viscous forces, for a body that is moving in a liquid or a gas.

SWIMMING:
moving forward through a *periodic motion* in the absence of external forces.

$$Re = \frac{\text{density} \times \text{speed} \times \text{length}}{\text{dynamic viscosity}}$$

	dynamic viscosity (Pa x s)	density (kg / m ³)
air	2×10^{-5}	1,2
water	3×10^{-4}	$1,0 \times 10^3$
quicksilver	2×10^{-3}	$1,4 \times 10^4$
oil	8×10^1	$8,0 \times 10^2$
coal tar	1×10^7	$1,1 \times 10^3$
sand	1×10^7	$1,6 \times 10^3$



bacterium in the water

little fish in the water

big fish in the water

man in the water

dolphin in the water

dynamic viscosity rules

mass rules

$Re = 10^{-5}$

10^1

10^2

10^3

10^5

10^6

10^8

10^{10}

laminar flow

turbulent flow

man in the sand

man in the oil

fly in the air

little bird in the air

eagle in the air



- Deducción del **número de Froude** y del **número de Reynolds** a partir del principio de similitud dinámica.

Pizarrón

Un ejemplo del cine:



• A la hora de diseñar el Godzilla del film de 1998, no se tuvieron en cuenta los efectos del tamaño sobre la anatomía y fisiología animal, haciéndolo poco plausible desde el punto de vista biológico.

Godzilla from a Zoological Perspective¹

Per Christiansen²

The 1998 TriStar movie Godzilla proved to be a major blockbuster, although not the financial success that was initially anticipated and movie critics have been rather unforgiving. Apart from a radically different external morphology compared to the classic Japanese movie monster, the new Godzilla character apparently was made different from the old version on a number of key points to make him more biologically probable. However, calculations show that his limbs and limb muscles must have been severely undersized to move his huge bulk around at even a leisurely pace, and most other biological problems with the old Godzilla, e.g., growth rates and reptilian physiology at such a massive size, have remained unaltered. The old Godzilla was actually the more plausible from a biomechanical point of view.

KEY WORDS: Godzilla, size, body mass, biomechanics, physiology.

INTRODUCTION

The 1998 TriStar blockbuster movie *Godzilla*, allegedly a retelling of the old 1954 Japanese *Gojira*, but in reality a rather different concept with obvious inputs from many other classic science-fiction movies, saw the emergence of a completely new Godzilla morphology. Many of the classic traits of the most famous of movie monsters were gone, e.g., the maple-leaf spines on the back, the atomic fire breath, and the upright dorsal posture with a dragging tail. The rubberized look has given way to an external covering more resembling a reptilian epidermis and cranial morphology has been extensively altered.

Gone were also the massive, columnar limbs, the wide, plate-like feet, and the heavy, lumbering gait. The monster was now able to move at highly impressive speeds, and even attain a gait with a fully suspended flight phase, by default an impossibility for the old Godzilla due to the suitmation technique (a man in a rubbersuit). The new slender, long-limbed, and significantly less monster-like Godzilla bore an uncanny resemblance to the larger theropod dinosaurs, portrayed with great skill and authenticity in the movie *Jurassic Park*, which of course are

¹Received 9 December 1998; accepted 29 June 1999.

²Zoological Museum, Department of Vertebrates, Universitetsparken 15, 2100 Copenhagen Ø., Denmark. e-mail: p2christiansen@zmuc.ku.dk

Bibliografía:

- Alexander, R. M. (2003). *Principles of animal locomotion*. Princeton University Press.
- Alexander, R. M., & Jayes, A. S. (1983). A dynamic similarity hypothesis for the gaits of quadrupedal mammals. *Journal of zoology*, 201(1), 135-152.
- McMahon, T. (1973). Size and shape in biology: elastic criteria impose limits on biological proportions, and consequently on metabolic rates. *Science*, 179(4079), 1201-1204.
- MacMahon, T. A., Bonner, J. T., & Silvestre, R. M. (1986). *Tamaño y vida*. Labor.
- S. Vogel, (1988). Size and Shape, cap. 3 de *Life devices*. Princeton University Press.
- J.B. S. Haldane, (1947). El Tamaño apropiado. En *Mundos posibles*. Janes, Barcelona.
- Christiansen, P. (2000). Godzilla from a zoological perspective. *Mathematical geology*, 32(2), 231-245.
- Purcell, Edward M. "Life at low Reynolds number." *American journal of physics* 45.1 (1977): 3-11.