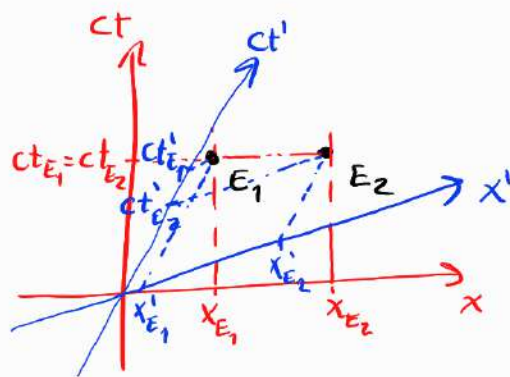


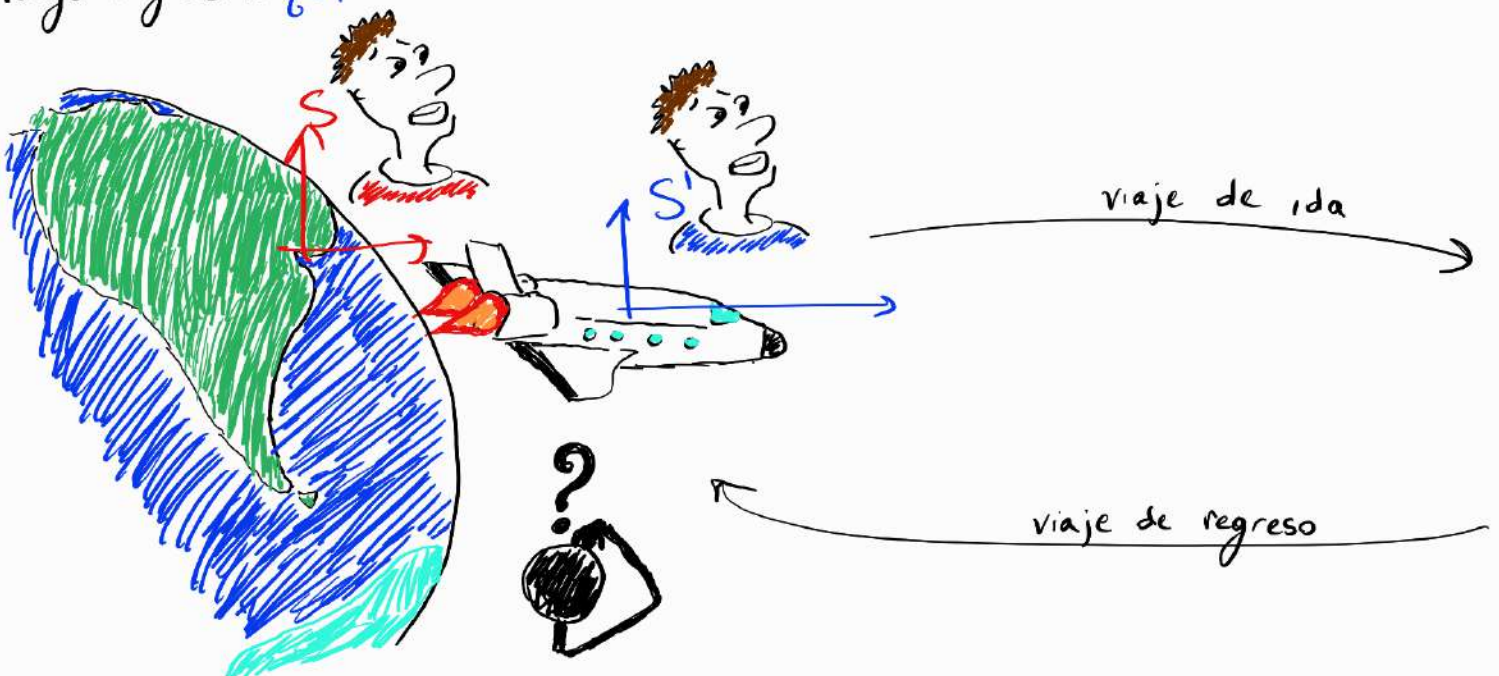
Como hemos visto, desde el diagrama de Minkowski es claro que la simultaneidad de los eventos es relativo al observador. Si tenemos 2 eventos E_1 y E_2 simultáneos de acuerdo a un referencial S pero en diferentes puntos del espacio, estos no lo serán desde un referencial S' que se mueve respecto a S (siendo precisos, si los eventos ocurren con la misma coordenada espacial en la dirección del movimiento relativo entonces también serán simultáneos en S').



Paradoja de los gemelos

La paradoja de los gemelos fue propuesta por Paul Langevin en 1911 y hace referencia al tiempo propio y al diferente paso del tiempo para dos observadores con movimiento relativo.

Si tenemos 2 observadores, cada uno ve al otro como si el tiempo le pasara más lento en un factor $\frac{1}{\gamma}$. La paradoja toma su forma al considerar dos observadores, popularmente gemelos, en el que uno parte en un viaje a velocidades relativistas (respecto al otro) y luego regresa. **¿QUIÉN SERÁ MÁS JOVEN?**

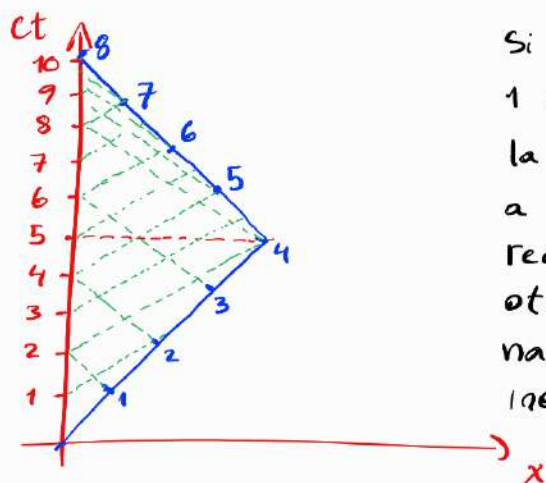


sin un cuidadoso escrutinio, uno/a podría pensar que tanto para el viajero como para el terrestre el otro gemelo es el más joven lo cual da origen a la paradoja.

En realidad, el problema está en que los dos observadores no son simétricos e intercambiables.

La descripción que venimos haciendo, y los diagramas de Minkowski está realizada para observadores inerciales y, por lo tanto, no podemos extrapolar de la descripción que hace el gemelo en la tierra a la que hace el de la nave. Para la descripción real de ambos referenciales uno/a debe utilizar la relatividad general.

La descripción del gemelo terrestre da la respuesta correcta



Si los gemelos se envían señales cada 1 año entonces la situación inicial es simétrica: la señal enviada al año, por ejemplo, es recibida a los 2 años, la enviada a los 2 años es recibida a los 4 años, tanto para uno como otro gemelo. Sin embargo, el gemelo de la nave hace un cambio a otro referencial inercial provocando una asimetría entre ambos.

Analicemos el tiempo propio de un observador, el cual depende de su trayectoria en el espacio-tiempo.

El paso del tiempo para un observador S' es

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c}) \quad \text{---} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pero como } \Delta x' = 0 = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) \Rightarrow \Delta x = \beta c \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t (1 - \beta^2) = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

en el límite de eventos "cercaños" $\Delta t \rightarrow 0$ es $dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Lo cual quiere decir que visto desde un referencial inercial, el paso del tiempo en S' es:



$$\tau' = \int_{E_1 \rightarrow E_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq \int_{E_1 \rightarrow E_2} dt = \tau$$

$v = \frac{dx}{dt}$

lo cual muestra, manifiestamente que $\tau' \leq \tau$ para toda trayectoria entre los eventos E_1 y E_2 . Es decir, el tiempo pasa "más lento" entre dos eventos si nos "movemos/activamos" y ÉSTA es la verdadera paradoja:

"El tiempo pasa más lento si te divertís"

II.2.3 - Transformaciones de velocidades y aceleraciones

Hasta ahora nos hemos centrado en la asignación de coordenadas espacio-tiempo a los eventos (por ejemplo, a partículas pasando por ciertos puntos/locaciones en el espacio). Ahora vamos a seguir el movimiento de las partículas con el paso del tiempo desde uno u otro referencial inercial para hacer una descripción cinemática más completa y conectaremos estas descripciones.

Transformaciones de velocidades

Vimos en la mecánica Newtoniana que las velocidades que dos referenciales S y S' asignan a una partícula se relacionaban mediante

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \quad \text{siendo } \vec{v}_0 \text{ la velocidad de } S' \text{ respecto de } S.$$

Si esto fuera así no habría problemas en encontrar o acelerar objetos hasta velocidades mayores a la de la luz, y esto no sucede.

Comencemos por plantear las transformaciones de Lorentz para las coordenadas asignadas por S y S' a los eventos de una partícula

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Si una partícula P tiene, en cierto instante, una velocidad $\vec{u}'$ en S' , un tiempo $\Delta t'$ luego estará en la posición $\vec{r}'$ dada por

$$\vec{r}' = (x' + u'_x \Delta t') \hat{i} + (y' + u'_y \Delta t') \hat{j} + (z' + u'_z \Delta t') \hat{k}$$

$$\text{siendo } u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, \quad u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}$$

pero entonces, ¿Cómo son $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ y $\frac{\Delta z}{\Delta t}$?

$$\left[u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + \beta c \Delta t')}{\frac{\gamma(c \Delta t' + \beta \Delta x')}{c}} = \frac{(\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + \beta c) \Delta t'}{\frac{1}{c}(c + \beta \frac{\Delta x'}{\Delta t'}) \Delta t'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \right]$$

de forma similar,

$$\left[u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta y'}{\Delta t'}}{\frac{\gamma(c \Delta t' + \beta \Delta x')}{c}} = \frac{\frac{\Delta y'}{\Delta t'}}{\gamma(1 + \frac{\beta \Delta x'}{c \Delta t'})} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{u'_x v}{c^2})} \right]$$

análogamente es:

$$\left[u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{u'_x v}{c^2})} \right]$$

Veamos algunos ejemplos:

Consideremos una partícula P que se mueve con velocidad $\vec{u}$ respecto a S' y el referencial S' se mueve con velocidad $\vec{v} = v\hat{i}$ respecto de S .

$$i) \left. \begin{array}{l} \vec{u}' = 0,8c \hat{i} \\ v = 0,8c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_{y,z} = 0 \text{ ya que } u'_{y,z} = 0 \\ u'_x = \frac{0,8c + 0,8c}{1 + 0,8 \cdot 0,8} = \frac{1,6}{1,64} c \approx 0,976c < c! \end{array}$$

No se sobrepasó la velocidad de la luz.

$$ii) \left. \begin{array}{l} \vec{u}' = c \hat{i} \\ v = 0,8c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_{y,z} = 0 \text{ ya que } u'_{y,z} = 0 \\ u'_x = \frac{c + 0,8c}{1 + 1 \cdot 0,8} = \frac{1,8}{1,8} c = c! \end{array}$$

si se mide a algo a la velocidad de la luz en un referencial $\Rightarrow$ sigue teniendo la velocidad de la luz!

$$iii) \left. \begin{array}{l} \vec{u}' = \alpha c \hat{i} + \sqrt{1-\alpha^2} c \hat{j} \rightarrow |\vec{u}'| = c \\ v = 0,7c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_z = 0 \text{ ya que } u'_z = 0 \\ u_y = \frac{\sqrt{1-\alpha^2} c}{\gamma(0,7c)[1+\alpha \cdot 0,7]} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-0,49}}{1+\alpha \cdot 0,7} c \\ u_x = \frac{\alpha c + 0,7c}{1 + \alpha \cdot 0,7} = \frac{\alpha + 0,7}{1 + \alpha \cdot 0,7} c \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{u}|^2 &= u_x^2 + u_y^2 = \frac{c^2}{(1+\alpha \cdot 0,7)^2} [(1-\alpha^2)(1-0,49) + (\alpha + 0,7)^2] \\ &= \frac{c^2}{(1+\alpha \cdot 0,7)^2} [1 - \cancel{\alpha^2} - \cancel{0,49} + 0,49\alpha^2 + \cancel{\alpha^2} + 2\alpha \cdot 0,7 + \cancel{0,49}] = \frac{c^2}{(1+\alpha \cdot 0,7)^2} [1 + 2 \cdot \alpha \cdot 0,7 + (\alpha \cdot 0,7)^2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\vec{u}|^2 = c^2 \rightarrow |\vec{u}| = c.$$

Esto muestra que no podemos sobrepasar la velocidad de la luz!!

Transformaciones de aceleraciones

De la misma forma podemos construir la transformación para las aceleraciones.

En la descripción Newtoniana esperábamos que $\vec{a} = \vec{a}'$, lo cual era fundamental para la segunda ley de la mecánica Newtoniana. Veamos qué sucede ahora:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \right) = \frac{d}{dt'} \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \right) \frac{dt'}{dt}$$

$$\Rightarrow a_x = \left[\frac{\frac{du'_x}{dt'}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} - \frac{\frac{du'_x}{dt'} \frac{v}{c^2} (u'_x + v)}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \right] \frac{dt'}{dt} \quad \textcircled{*}$$

Por otro lado, podemos ver de las transformaciones de Lorentz que:

$$\frac{dt'}{dt} = \left(\frac{dt}{dt'} \right)^{-1} = \left[\gamma \left(\frac{dt}{dt'} + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right)}$$

Sustituyendo esto en $\textcircled{*}$

$$\Rightarrow a_x = \frac{a'_x}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)^2} \left[1 - \frac{\frac{v}{c^2} (u'_x + v)}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \right] = \frac{a'_x}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)^3} \left(\overbrace{1 + \frac{u'_x v}{c^2} - \frac{u'_x v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}^{\gamma^{-2}} \right)$$

y finalmente concluimos que:

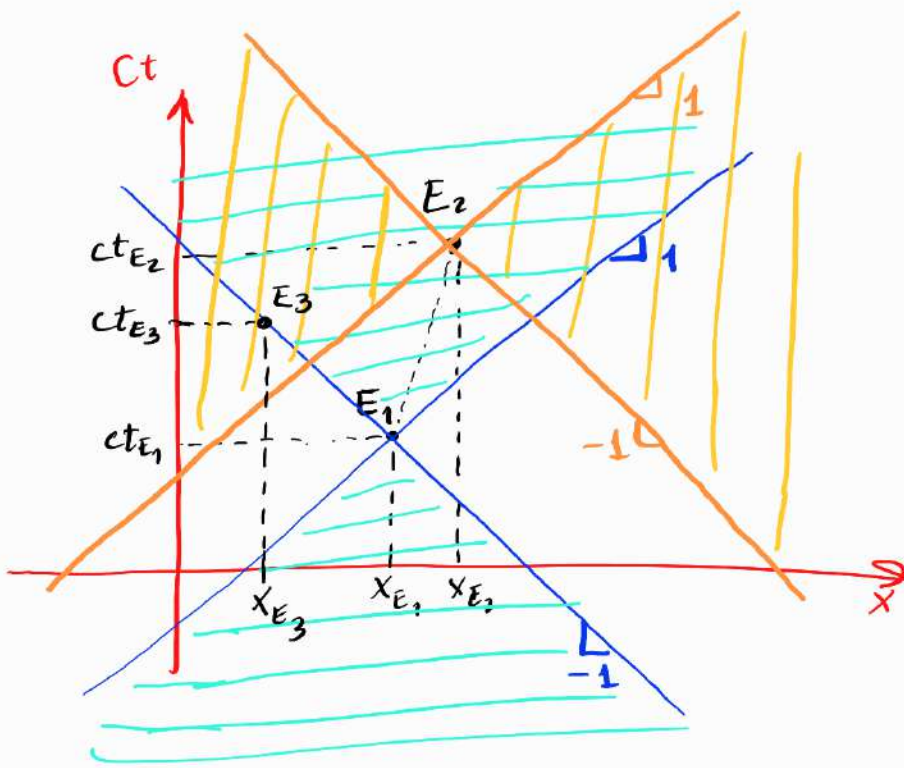
$$\boxed{a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)^3}}$$

Análogamente es:

$$a_{y,z} = \dots \text{ EJERCICIO } \dots = \frac{a'_{y,z}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)^2} - \frac{a'_x \frac{u'_{y,z} v}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)^3}$$

Volvamos a discutir la noción del intervalo espacio-temporal ΔS^2 en el contexto de los diagramas de Minkowski.

Consideremos los eventos E_1, E_2 y E_3 / E_1 y E_2 están separados por un intervalo tipo tiempo, E_2 y E_3 por un intervalo tipo espacio y E_1 y E_3 por uno tipo luz.



Construyamos estos en el diagrama de Minkowski.

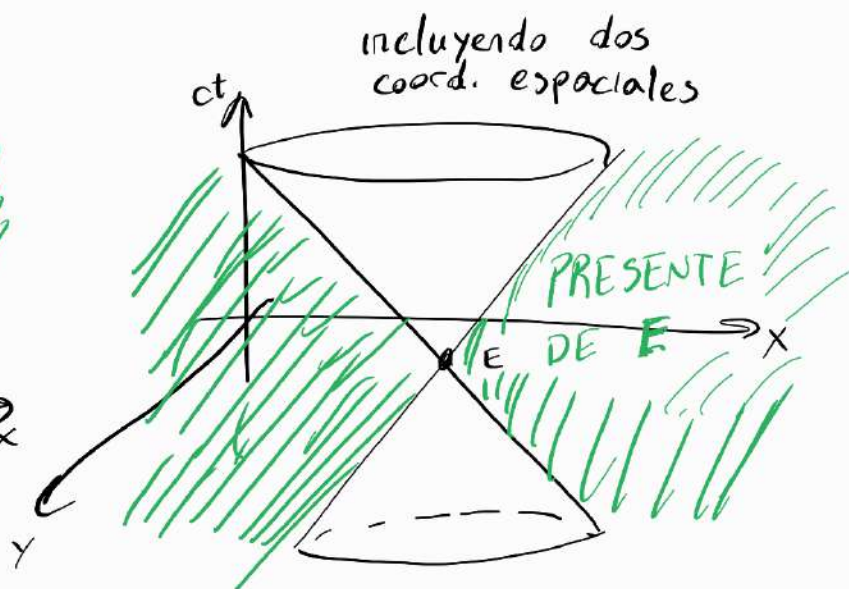
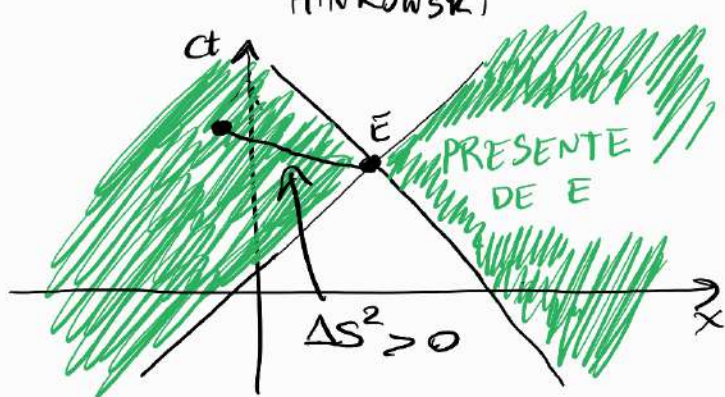
- Primero coloquemos E_1
- Luego, como ΔS_{12}^2 es tipo tiempo $\Rightarrow c|\Delta t_{12}| > |\Delta x_{12}|$. Por lo que E_2 debe estar en algún punto de la región celeste
- Ahora bien, $\Delta S_{13}^2 = 0 \Rightarrow c|\Delta t_{13}| = |\Delta x_{13}|$ lo cual indica que E_3 está en algún pto de las rectas azules
- Finalmente, $\Delta S_{23}^2 < 0 \Rightarrow c|\Delta t_{23}| < |\Delta x_{23}|$ Por lo que E_3 debe estar dentro de la región amarilla.

Esto da pie a introducir el concepto del cono de luz y la noción de causalidad. Si pensamos en la construcción que hicimos previamente fueron cruciales las separaciones en las regiones (cuadrantes). Estas regiones representan todos los puntos del espacio-tiempo que puedan tener una relación causal con un cierto evento (por ejemplo las regiones celestes con el evento E_1) o que no puedan tener una relación causal con cierto evento (por ejemplo las regiones amarillas con el evento E_2).

En efecto, acabamos de mostrar que no es posible superar la velocidad de la luz. Esto implica que, dado un evento, hay regiones del espacio-tiempo no pueden ser afectadas por este evento dado que, para ello, deberían comunicarse a una velocidad superior a la de la luz.

Dado un evento E en el espacio-tiempo, todos los puntos de éste que tienen un intervalo de tipo espacio no pueden afectar a o ser afectados por el evento E . Más aún, es posible encontrar un referencial donde ambos eventos ocurren en simultáneo. Llamamos **PRESENTE del EVENTO E** a la región de todos estos puntos.

En el diag. de MINKOWSKI

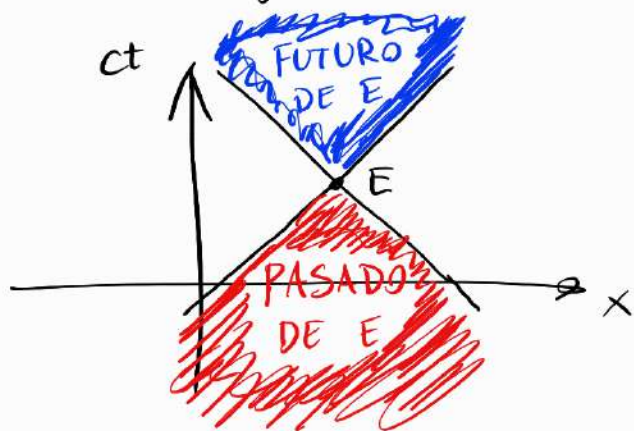


De forma similar los puntos del espacio-tiempo que tienen un intervalo tipo tiempo si pueden ser afectados por o afectar al evento E .

Más aún, dado un punto de esta región no pueden encontrarse dos referenciales con un ordenamiento temporal diferente entre el evento E y dicho punto. Es decir si E ocurre primero que dicho punto en un referencial $\Rightarrow$ esto es cierto para todo otro referencial.

Llamamos **FUTURO del EVENTO E** a aquellos puntos del espacio-tiempo que tienen un intervalo tipo tiempo con E y ocurren posteriormente a E , mientras que llamamos **PASADO del EVENTO E** a los que ocurren anteriormente.

En un diagrama de MINKOWSKI



Incluyendo dos coordenadas espaciales.

