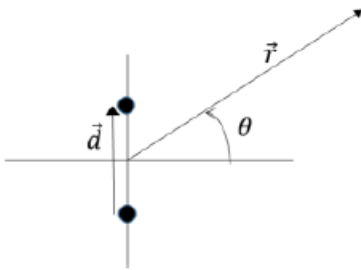


### Práctico 7



**1. Dipolo acústico.** Considere dos fuentes simples monocromáticas en el espacio libre. Las fuentes operan a la misma frecuencia  $\omega$  y con la misma amplitud  $A = i\omega\rho_0 Q_s$  pero están desfasadas  $180^\circ$  entre sí. Sea  $\vec{d}$  el vector separación entre las fuentes. (a) Mostrar que, en campo lejano,  $r \gg d$ , la presión acústica se puede expresar como:  $P'(r, \theta, t) = P'_s(r)H(\theta)$ , Donde  $r$  es la distancia desde el punto medio entre las fuentes y el punto

de observación y  $\theta$  es el ángulo respecto a la mediatriz del eje del dipolo como se muestra en la figura,  $P'_s(r)$  es el campo acústico de una fuente simple y  $H(\theta)$  es la función de directividad que deberá hallar explícitamente. Para campo lejano hallar: (b) la velocidad particular  $\vec{u}$  (c) la impedancia acústica del dipolo y (d) el diagrama de directividad de la intensidad acústica  $\langle I \rangle$ . (e) Hacer un bosquejo del diagrama de directividad anterior para el caso  $kd=3\pi/2$ .

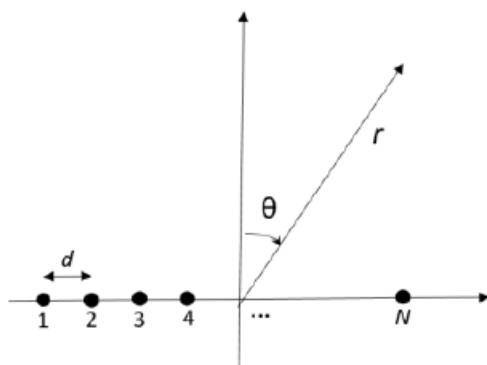
**2** El principio de reciprocidad acústica establece que:

$$\int [P'_1 \vec{u}_2 - P'_2 \vec{u}_1] \cdot \hat{n} dS = 0$$

donde la integral refiere a las superficies que rodean las fuentes 1 y 2. Aplicar este principio a dos fuentes pequeñas de geometría arbitraria y separadas varias longitudes de onda entre sí para mostrar la equivalencia entre fuentes simples:

$$\frac{Q_1}{P'_1} = \frac{Q_2}{P'_2}$$

donde  $Q = \int \vec{u} \cdot \hat{n} dS$  es el poder de la fuente.



**3. Arreglo lineal de fuentes simples.** Considere un arreglo lineal de  $N$  fuentes simples discretas como se muestra en la figura. La separación entre fuentes es  $d$ . Todas las fuentes emiten con la misma frecuencia y la misma fase. (a) Muestre que en el campo lejano, la presión acústica se puede expresar como  $P'(r, \theta, t) = P'_s(r)H(\theta)$ . Hallar las expresiones para  $P'_s(r)$  y  $H(\theta)$ . (b) **Ejercicio numérico** Hallar  $H(\theta)$  para  $kd=3/2$  y  $N = 11$  y para  $kd=1/2$  y  $N = 11$ .

Realizar un gráfico de  $H(\theta)$  en cada caso (c) Para el caso  $kd=1/2$ , idear una manera de que el lóbulo principal de se emita con un ángulo  $\theta_0 \neq 0$  sin girar físicamente el arreglo lineal.

Relaciones útiles:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(N-1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(N-1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

**4. Fuente lineal.** Considere un cilindro de largo  $L$  y radio  $a$ , con  $L \gg a$ . La superficie cilíndrica vibra con velocidad  $\vec{u} = U_0 e^{i\omega t} \hat{r}$ . Este tipo de fuentes se conoce como fuente lineal (a) Hallar una expresión para la presión acústica en campo lejano. (b) Bosquejar el diagrama de directividad para la presión acústica. (c) Hallar la intensidad acústica  $\langle I \rangle$  en campo lejano. Comparar el resultado con el obtenido para el arreglo lineal de fuentes simples.

**5. Fuente circular.** La superficie de un pistón circular plano de radio  $a = 15$  cm vibra uniformemente con frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $U_0$  en aire ( $c = 340$  m/s). (a) Mostrar que en campo lejano el campo acústico se puede escribir como  $P'_s(r)H(\theta)$  y hallar explícitamente estas funciones. (b) ¿Para qué frecuencia  $\omega$  el diagrama de directividad no tiene lóbulos laterales? (c) Si el pistón vibra con una frecuencia  $f = \omega/2\pi = 3000$  Hz, ¿a qué distancia se encuentra aproximadamente el límite entre campo lejano y campo cercano? (d) Para la frecuencia de la parte anterior, hallar la relación en dB entre el lóbulo principal y el primer lóbulo secundario

Relaciones útiles:

$$J_m(x) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos(\phi)} \cos(m\phi) d\phi$$

$$\int x J_0(x) = x J_1(x)$$

**6. Fuente rectangular** (a) Hallar el diagrama de directividad en campo lejano de una fuente rectangular de lados  $L_x$  y  $L_y$  actuando en modo pistón (b) Estudiar el caso  $L_y \ll L_x$  y comparar el resultado con el de la fuente lineal.

7. El eje de una fuente lineal de largo  $L$  coincide con el eje  $x$  de manera que la fuente se extiende desde  $-L/2$  hasta  $L/2$ . La amplitud de vibración de la superficie cilíndrica de la fuente no es uniforme sino que tiene una apodización triangular dada por:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{2U_0}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right) & x < 0 \\ -\frac{2U_0}{L} \left(x - \frac{L}{2}\right) & x > 0 \end{cases}$$

Hallar el diagrama de directividad de esta fuente en campo lejano y compararlo con el obtenido para la fuente del ejercicio 4.

8. (a) Mostrar que la impedancia de radiación de una esfera pulsante se puede escribir como:

$$Z_r = \rho_0 c (4\pi a^2) \cos(\theta_a) e^{i\theta_a}$$

donde  $\cos(\theta_a) = \frac{ka}{[1+(ka)^2]^{1/2}}$  (b) Mostrar que en el límite  $ka \ll 1$ , la reactancia de radiación es equivalente a una masa de fluido  $m_r = \chi_r / \omega = 3\rho_0 V_a$ , donde  $V_a$  es el volumen de la esfera pulsante.

9. (a) A un tubo de paredes rígidas y sección transversal constante se le inserta un resonador de Hemholtz como rama lateral como se muestra en la figura 1. Mostrar que, en el límite de bajas frecuencias, el resonador actúa como un filtro suprime-banda, suprimiendo las frecuencias en torno a la frecuencia de resonancia del resonador de Hemholtz. (b) Si ahora la rama lateral es abierta como en la figura 2, mostrar que, en el límite de bajas frecuencias, ésta se comporta como un filtro pasa-altos.

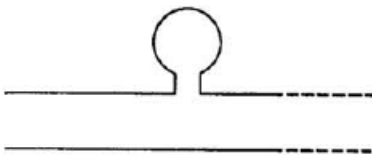


Figura 1

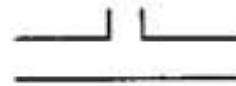


Figura 2

### Método de diferencias finitas 2D

La ecuación de ondas en 2D es una extensión de la ecuación 1D

$$\nabla^2 \phi(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

En este caso  $\phi(x, y, t)$  representa un campo escalar 2D que puede ser por ejemplo el desplazamiento vertical de una membrana o un campo de presión acústica y, como antes,  $c$  es la velocidad de propagación

de la onda. La aplicación del método de diferencias finitas a la ecuación (23) es una extensión de la ecuación (9). Si bien no es necesario, conviene que el paso espacial en las direcciones  $x$  e  $y$  tengan el mismo valor, es decir  $\Delta y = \Delta x$ . En este caso podemos escribir:

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\phi_{i+1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i-1,j}^k + \phi_{i,j+1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j-1}^k) + 2\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^{k-1} \quad (2)$$

Si se opta por utilizar pasos espaciales diferentes, hay que modificar la ecuación anterior en forma acorde. Además, el número de Courant se debe definir teniendo en cuenta las dimensiones espaciales de la ecuación:

$$\Lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} + \frac{c\Delta t}{\Delta y} \quad (3)$$

Si los pasos espaciales son iguales en ambas direcciones, la condición CFL implica  $\Delta t \leq \Delta x/2c$ . Al igual que en el caso 1D, para resolver la ecuación hay que especificar las condiciones iniciales, es decir  $\phi_{i,j}^1$  y  $\phi_{i,j}^2$  y las condiciones de borde  $\phi_{1,j}^k$ ,  $\phi_{N_y,j}^k$ ,  $\phi_{i,1}^k$  y  $\phi_{i,N_x}^k$ . También se pueden especificar condiciones de borde absorbentes si el medio es infinito en alguna de las direcciones espaciales.

### Ecuación de ondas con fuentes

La ecuación (23) expresa la ecuación de ondas homogénea, donde la fuerza que interviene es la fuerza restauradora interna del sistema. Sin embargo, podemos pensar en un medio donde actúa una fuerza externa. En este caso, debemos modificar la ecuación (23) para tener en cuenta la fuerza externa:

$$\nabla^2 \phi(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = -f(x, y, t) \quad (4)$$

En esta expresión la cantidad  $f$  no representa directamente a la fuerza externa sino a una cantidad relacionada a ella que depende del parámetro físico representado por el campo escalar  $\phi$ . La implementación de la ecuación (26) por DF es directa:

$$\phi_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\phi_{i+1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i-1,j}^k + \phi_{i,j+1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j-1}^k) + 2\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^{k-1} \quad (5)$$

Notemos que, a diferencia de lo que sucede en la ecuación homogénea, para la ecuación de ondas con fuente, las condiciones iniciales pueden ser nulas, llamadas “en reposo”. Es decir que tanto el desplazamiento como la velocidad pueden ser nulas en  $t = 0$ . Esto es así porque la fuente está definida para todos los valores de tiempo, incluyendo los índices  $k = 1$  y  $k = 2$ . Por lo tanto, a pesar de tener condiciones iniciales en reposo, la fuente asegura que existirá propagación de ondas en el medio.

**Ejercicio numérico**

Considere una grilla numérica 2D de dimensiones  $L_x, L_y$ . Colocar una fuente simple que emite un pulso breve de duración  $\tau$  en una posición arbitraria de la grilla. Colocar  $N$  receptores dentro de la grilla con separación  $\Delta x$  entre sí como se muestra en la figura y registrar el campo ondulatorio emitido por la fuente en cada uno. Suponiendo que desconoce la posición de la fuente, ¿es posible mediante el campo registrado en los receptores conocer esta posición? ¿Cuál es el número mínimo de receptores necesarios? El proceso de localización de la fuente se conoce como “formación de haz” o “beamforming” en inglés. **Consejo:** Para evitar la propagación de errores numéricos en el método de diferencias finitas, conviene que la emisión de la fuente sea “suave” en el tiempo. Una forma adecuada para esto es que la forma temporal de la fuente sea la derivada segunda de la función gaussiana con desvío estándar  $\tau$ .

