

II.3- Dinámica relativista

Ya vimos como describir los eventos y los movimientos de las partículas así como relacionar las descripciones desde diferentes referenciales. Debemos ahora analizar como se generalizan las leyes de la mecánica Newtoniana cuando nos alejamos de los regímenes de velocidades bajas.

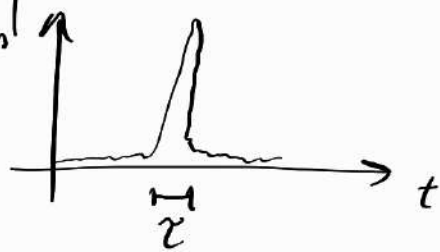
II.3.1 - Impulso y colisiones

En la mecánica relativista muchas cosas se vieron modificadas. Sin embargo, consideremos que el momento se conserva ¿qué debemos modificar para lograr esto?

Por un lado, las leyes de la mecánica Newtoniana eran invariantes ante transformaciones de Galileo y no ante transformaciones de Lorentz.

Por otro lado, el principio de acción y reacción, en este contexto, tiene sentido únicamente para fuerzas de contacto y no para acciones a distancia ya que entramos rápidamente en contradicciones con la relatividad de la simultaneidad y la causalidad.

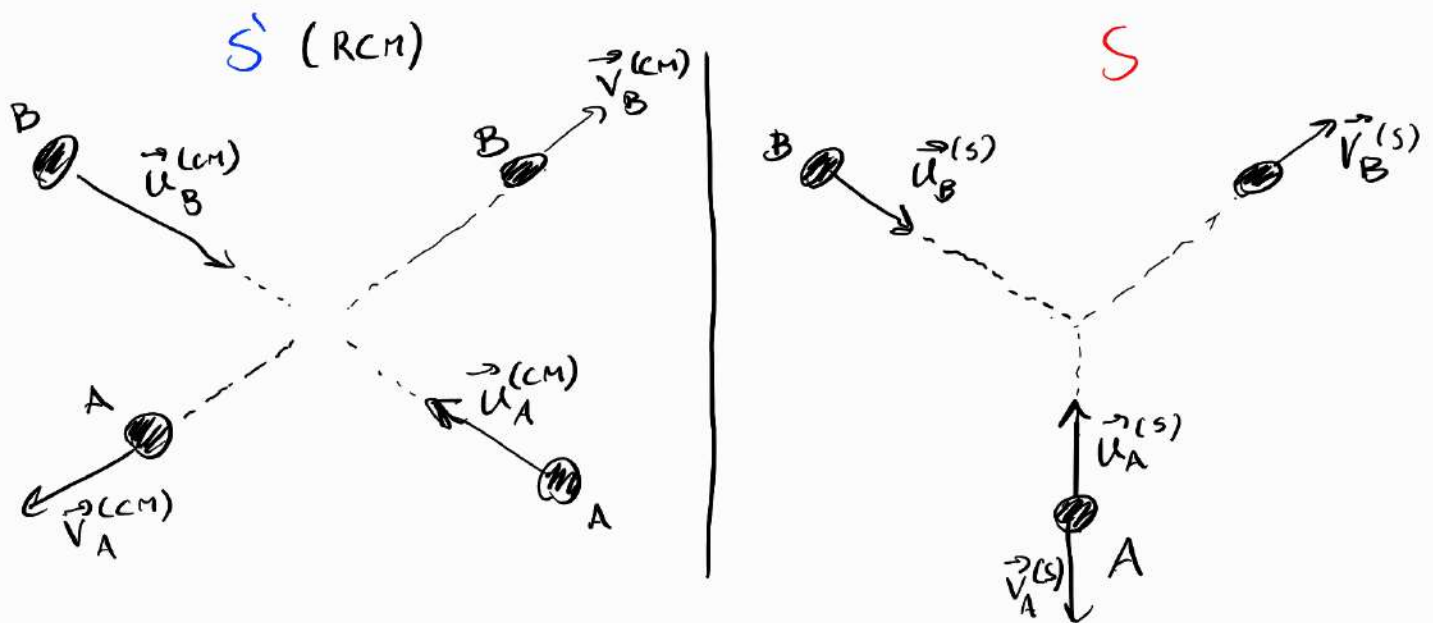
Recordemos de las colisiones en la mecánica Newtoniana que la interacción debía ser intensa respecto de otras fuerzas y estar "localizada" en el tiempo. Esto es, esquemáticamente



con $\tau \ll t_{\text{típicos}}$

Y sucedía que $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 = \int_{t_{ch}}^{t_{ch}+\tau} \vec{F}_{2/1} dt$ lo cual era válido desde cualquier referencial ya que $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$ en cualquier referencial.

Consideremos ahora, una colisión elástica con 2 partículas idénticas de igual masa m consideremos dos referenciales S y S' , y demandemos que se conserve la cantidad de movimiento del sistema antes y después del choque.



Como la colisión es elástica, en el referencial del centro de masas (S'), las velocidades antes y después son todas iguales y el momento neto es nulo:

$$u_{Ax}^{(RCM)} = -u_{Bx}^{(RCM)} \quad \text{y} \quad u_{Ay}^{(RCM)} = -u_{By}^{(RCM)}$$

Además, por las características de la colisión es:

$$u_{Ax}^{(RCM)} = v_{Ax}^{(RCM)} = -v_{Bx}^{(RCM)}$$

Ya que en S $u_{Ax}^{(S)} = v_{Ax}^{(S)} = 0$

Y, adicionalmente, debe ser $u_{Ay}^{(RCM)} = -v_{Ay}^{(RCM)} = v_{By}^{(RCM)}$
ya que el choque es elástico

Dado que A no tiene componente x en el referencial S, es

$$u_{Ax}^{(RCN)} = \frac{u_{Ax}^{(S)} + v_s^{(RCN)}}{1 + \frac{u_{Ax}^{(S)} v_s^{(RCN)}}{c^2}} = \frac{v_s^{(RCN)}}{1 + \frac{u_{Ax}^{(S)} v_s^{(RCN)}}{c^2}} = v_s^{(RCN)} = -V = -u_{Bx}^{(RCN)}.$$

Clásicamente, la componente vertical del momento no se ve afectada al

clásicamente (Newtoniano)

$$m u_{Ay}^{(S)} + m u_{By}^{(S)} = m v_{Ay}^{(S)} + m v_{By}^{(S)}$$

$$\text{y } m(u_{Ay}^{(S)} - v_{Ay}^{(S)}) = -m(u_{By}^{(S)} - v_{By}^{(S)})$$

pero de las transformaciones de velocidad es

$$u_{Ay}^{(S)} = \frac{u_{Ay}^{(RCN)}}{\gamma \left(1 - \frac{u_{Ax}^{(RCN)} v_s^{(RCN)}}{c^2}\right)} = \frac{-v_{Ay}^{(RCN)}}{\gamma \left(1 - \frac{v_{Ax}^{(RCN)} v_s^{(RCN)}}{c^2}\right)} = -v_{Ay}^{(S)}$$

$$u_{Ay}^{(RCN)} = -v_{Ay}^{(RCN)}$$

$$u_{Ax}^{(RCN)} = v_{Ax}^{(RCN)}$$

similarmente es

$$u_{By}^{(S)} = \frac{u_{By}^{(RCN)}}{\gamma \left(1 - \frac{u_{Bx}^{(RCN)} v_s^{(RCN)}}{c^2}\right)} = \frac{-v_{By}^{(RCN)}}{\gamma \left(1 - \frac{v_{Bx}^{(RCN)} v_s^{(RCN)}}{c^2}\right)} = -v_{By}^{(S)}$$

$$u_{By}^{(RCN)} = -v_{By}^{(RCN)}$$

$$u_{Bx}^{(RCN)} = v_{Bx}^{(RCN)}$$

y por lo tanto será

$$2m u_{Ay}^{(S)} = -2m u_{By}^{(S)} \quad (I)$$

sin embargo, si uno realiza las transformaciones de velocidades inversas a las recién usadas es:

$$u_{Ay}^{(RCN)} = \frac{u_{Ay}^{(S)}}{\gamma \left(1 + \frac{u_{Ax}^{(S)} v_s^{(RCN)}}{c^2}\right)} = \frac{u_{Ay}^{(S)}}{\gamma}$$

$$u_{By}^{(RCN)} = \frac{u_{By}^{(S)}}{\gamma \left(1 + \frac{u_{Bx}^{(S)} v_s^{(RCN)}}{c^2}\right)} = \frac{u_{By}^{(S)}}{\gamma \left(1 - \frac{u_{Bx}^{(S)} v}{c^2}\right)}$$

$$u_{Ax}^{(S)} = 0$$

$$v_s^{(RCN)} = -v$$

Juntando todo es:

$$\Rightarrow -u_{By}^{(S)} = u_{Ay}^{(S)} \left(1 - \frac{u_{Bx}^{(S)} v}{c^2}\right) \quad (II)$$

pero además sabemos que $u_{Ay}^{(RCN)} = -u_{By}^{(RCN)}$

pero no puede ser posible (I) y (II) simultáneamente!

Esto quiere decir que si el momento, tal cual lo vimos, se conserva en un referencial $\Rightarrow$ no lo hace en el otro y esto contradice la idea de que las leyes de la física son las mismas en todos los referenciales inerciales.

$\Rightarrow$ si queremos que el momento se conserve en una colisión elástica mediada por fuerzas de contacto debemos resolver el problema.

Una posibilidad es asumir que, así como la longitud de los objetos depende de la velocidad del observador relativo al objeto, también lo hace la masa. si este es el caso $\Rightarrow$ debemos modificar (I) a:

$$2 m_A (|\vec{u}_A^{(s)}|) u_{Ay}^{(s)} = -2 m_B (|\vec{u}_B^{(s)}|) u_{By}^{(s)} \quad (\text{I}')$$

lo cual es así ya que $|\vec{u}_A^{(s)}| = |\vec{v}_{Ay}^{(s)}|$ y además $|\vec{u}_B^{(s)}| = |\vec{v}_{By}^{(s)}|$ (como vimos al considerar las componentes). Comparando entonces

(I') y (II) debe ser:
$$\frac{m_B (|\vec{u}_B^{(s)}|)}{m_A (|\vec{u}_A^{(s)}|)} = \frac{1}{1 - \frac{u_{Bx}^{(s)} v}{c^2}} \quad (\text{III})$$

recordando que

$$v = u_{Bx}^{(RCH)} = \frac{u_{Bx}^{(s)} - v}{1 - \frac{u_{Bx}^{(s)} v}{c^2}} \Rightarrow v - \frac{u_{Bx}^{(s)} v^2}{c^2} = u_{Bx}^{(s)} - v \Rightarrow \frac{u_{Bx}^{(s)}}{c^2} v^2 - 2v + u_{Bx}^{(s)} = 0$$

y, por lo tanto, es:

$$v = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \frac{u_{Bx}^{(s)2}}{c^2}}}{2 \frac{u_{Bx}^{(s)}}{c^2}} \Rightarrow \frac{u_{Bx}^{(s)} v}{c^2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{u_{Bx}^{(s)2}}{c^2}}$$

El signo + es no físico dando lugar a que $u_{Bx}^{(s)} v > c^2$. Sustituyendo esto (usando el signo -) en (III) es:

$$\frac{m_B (|\vec{u}_B^{(s)}|)}{m_A (|\vec{u}_A^{(s)}|)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_{Bx}^{(s)2}}{c^2}}}$$

Ahora bien, ambas partículas son idénticas y dado que indicamos la velocidad dejemos de lado la "etiqueta" A o B para la masa:
 $m_A(u) = m(u)$ y llamemos m_0 a la masa en reposo (tanto de A como de B)

$\Rightarrow$ en el límite $u_{Ax}^{(s)} \rightarrow 0$ es $\vec{u}_A^{(s)} \rightarrow 0$ y $\vec{u}_B^{(s)} \rightarrow u_{Bx}^{(s)} \hat{i}$ y se tiene que

$$\boxed{m(u_{Bx}^{(s)}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_{Bx}^{(s)2}}{c^2}}} = m_0 \gamma(u_{Bx}^{(s)})}$$

En conclusión: Para preservar la forma de la ley de conservación del momento lineal, modificamos la definición de la masa a

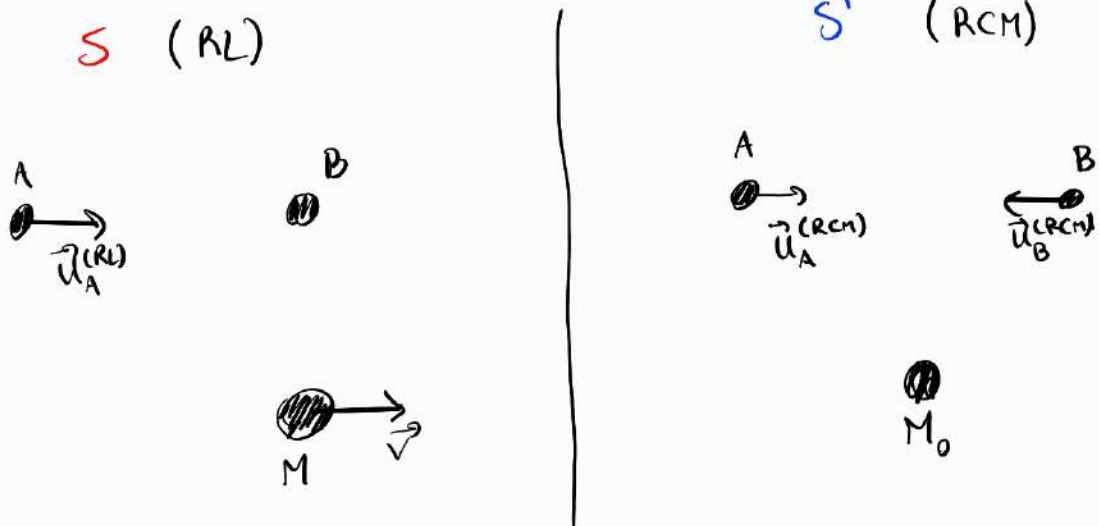
$$\boxed{m(v) = m_0 \gamma(v)} \quad \text{y de esta forma es } \boxed{\vec{p} = m(v) \vec{v}}$$

(Alternativamente podemos modificar la definición del momento $\vec{p} = \gamma(v) m \vec{v}$ manteniendo intacta la noción de masa.

!! Y esto resuelve todos los problemas!!

Lo único que supusimos, en relación a la energía fue su conservación, pero ¿Qué pasa en los choques inelásticos?

Supongamos 2 partículas idénticas que colisionan y luego quedan unidas.



Es claro que, en el RCM es

$$u_{Ax}^{(RCM)} = -u_{Bx}^{(RCM)} \quad \text{ya que las partículas son iguales.}$$

$$\left(m(u_{Ax}^{(RCM)}) u_{Ax}^{(RCM)} + m(u_{Bx}^{(RCM)}) u_{Bx}^{(RCM)} = 0 \right)$$

Además, dado que $u_{Bx}^{(RL)} = 0 = \frac{u_{Bx}^{(RCM)} + v_{RCM}^{(RL)}}{1 + \frac{u_{Bx}^{(RCM)} v_{RCM}^{(RL)}}{c^2}} \Rightarrow v = -u_{Bx}^{(RCM)}$

podemos ver que:

$$u_{Bx}^{(RCM)} = -u_{Ax}^{(RCM)} = - \frac{u_{Ax}^{(RL)} + v_{RL}^{(RCM)}}{1 + \frac{u_{Ax}^{(RCM)} v_{RL}^{(RCM)}}{c^2}} = - \frac{u_{Ax}^{(RL)} + u_{Bx}^{(RCM)}}{1 + \frac{u_{Ax}^{(RL)} u_{Bx}^{(RCM)}}{c^2}}$$

$$\Rightarrow u_{Bx}^{(RCM)} + \frac{u_{Ax}^{(RL)} u_{Bx}^{(RCM)^2}}{c^2} = -u_{Ax}^{(RL)} - u_{Bx}^{(RCM)} \Rightarrow u_{Ax}^{(RL)} = - \frac{2u_{Bx}^{(RCM)}}{1 + \frac{u_{Bx}^{(RCM)^2}}{c^2}} \quad (*)$$

planteando la conservación del momento lineal en el RL tenemos que

$$m(u_{Ax}^{(RL)}) u_{Ax}^{(RL)} + \underbrace{m(u_{Bx}^{(RL)})}_{m_0} \underbrace{u_{Bx}^{(RL)}}_0 = M(v) v = -M(u_{Bx}^{(RCM)}) u_{Bx}^{(RCM)}$$

$$\Rightarrow M_0 \gamma(u_{Bx}^{(RCM)}) u_{Bx}^{(RCM)} = -m_0 \gamma(u_{Ax}^{(RL)}) u_{Ax}^{(RL)} = 2m_0 \frac{u_{Bx}^{(RCM)}}{1 + \frac{u_{Bx}^{(RCM)^2}}{c^2}} \gamma\left(\frac{2u_{Bx}^{(RCM)}}{1 + \frac{u_{Bx}^{(RCM)^2}}{c^2}}\right)$$

Para simplificar notación usamos que $u_{Bx}^{(RCM)} = -v$

$$-M_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v = -2m_0 \frac{v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 \frac{1}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow M_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2m_0}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 + 2v^2 + \frac{v^4}{c^2} - 4v^2}{c^2 + 2v^2 + \frac{v^4}{c^2}}}} = \frac{2m_0}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sqrt{c^4 + 2v^2 c^2 + v^4}}{\sqrt{c^4 - 2v^2 c^2 + v^4}} = \frac{2m_0}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}$$

Por lo que simplificando términos es:

$$\boxed{M_0 = 2m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0 \gamma(v) = 2m_0 \gamma(u_{Bx}^{(RCM)}) = m_0 \gamma(u_{Ax}^{(RCM)}) + m_0 \gamma(u_{Bx}^{(RCM)})}$$

Es decir que la masa de la partícula resultante es la suma de las masas relativistas de las partículas que colisionan!!

II.3.2 - La nueva "2^{da} ley" y equivalencia masa-energía

Estos cambios que hicimos van de la mano de generalizar la 2^{da} ley de la mecánica Newtoniana a

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{con} \quad \boxed{\vec{p} = m(v)\vec{v}}$$

lo cual conduce a la conservación de la cantidad de movimiento lineal en los choques.

El teorema del trabajo y la energía cinética relativista

Al igual que en la física clásica la noción de trabajo de una fuerza es la integral de línea de ésta en el camino. En la mecánica Newtoniana vimos que el trabajo de la fuerza neta era función únicamente de la velocidad al comienzo y al final del camino y esto nos llevó a la definición de la energía cinética de una partícula y al teorema del trabajo y la energía cinética.

De igual forma sucede en relatividad, el trabajo neto depende, únicamente de las velocidades al comienzo y al final de la trayectoria:

$$W_{\text{neto}} = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \frac{d}{dt} (m_0 \gamma(v) \vec{v}) \cdot \vec{v} dt$$

$$\left(\frac{m_0}{m(v)} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{m_0}{m(v)} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m(v) \vec{v}) \cdot \vec{v} = \frac{dm(v)}{dt} v^2 + m(v) \underbrace{\frac{dv}{dt} v}_{\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}} + m(v) v^2 \underbrace{\frac{d\hat{v}}{dt} \cdot \hat{v}}_{\frac{1}{2} \frac{d(\hat{v} \cdot \hat{v})}{dt} = 0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m(v) \vec{v}) \cdot \vec{v} &= \frac{dm(v)}{dt} c^2 \left[1 - \frac{m_0^2}{m(v)^2} \right] + \frac{1}{2} m(v) c^2 \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{m_0^2}{m(v)^2} \right) \\ &= \frac{dm(v)}{dt} c^2 - \cancel{\frac{m_0^2}{m(v)^2} \frac{dm(v)}{dt}} + \cancel{\frac{1}{2} m(v) c^2 \frac{2 m_0^2}{m(v)^3} \frac{dm(v)}{dt}} \\ &= c^2 \frac{dm(v)}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo neto es:

$$W_{\text{neto}} = c^2 \int_{t_{A \rightarrow B}} \frac{dm(v)}{dt} dt = m(v_B) c^2 - m(v_A) c^2$$

Al igual que en la mecánica Newtoniana, definimos la energía cinética de una partícula como el trabajo neto que se realizó sobre esta cuando inicialmente se hallaba en reposo:

$$\boxed{K \equiv W_{\text{neto}} = m(v) c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 [\gamma(v) - 1]}$$

y de esta forma el teorema del trabajo y la energía cinética sigue siendo $\boxed{W_{\text{neto}} = \Delta K}$

Podemos ver la consistencia con el límite Newtoniano

$\frac{v}{c} \ll 1$:

$$K = m_0 c^2 [\gamma(v) - 1] = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + o\left(\frac{v^6}{c^6}\right) - 1 \right] \approx \frac{m_0 v^2}{2} \left(1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right) \quad ||$$

Pero este resultado implica que la masa relativista es

$$m(v) = \frac{K + m_0 c^2}{c^2} \quad \text{y se conserva en}$$

todos los choques. Esto nos lleva a definir la energía mecánica de una partícula como:

$$E = m(v) c^2 = K + m_0 c^2$$

y, en consecuencia, la energía es una cantidad conservada en todos los choques ya sean "Newtonianamente" elásticos o no !!

Esto es idealmente deseable ya que experimentalmente siempre encontramos formas de energía que compensan pérdidas energéticas en otras formas. Por ejemplo, con las fuerzas viscosas o de rozamiento, los elementos aumentan su temperatura lo cual sabemos es un aumento de su energía interna (en el caso del gas ideal esta energía interna es equivalente a la energía cinética de las partículas, salvando detalles técnicos).

Pero, entonces, esto se puede interpretar como una equivalencia entre masa y energía. Por esta razón denominamos

PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA DE MASA-ENERGÍA a:

$$\boxed{E = m(v) c^2}$$

Esta expresión no es particularmente útil cuando se consideran partículas sin masa que se trasladan a la velocidad de la luz ya que en este límite $m_0 \rightarrow 0$ pero $\gamma \rightarrow \infty$.

Resulta más práctico notar que:

$$E^2 = (K + m_0 c^2)^2 = m_0^2 \gamma^2(v) c^4 = m_0^2 (\gamma^2 - 1) c^4 + m_0^2 c^4 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \left(1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + m_0^2 c^4$$

$$\Rightarrow E^2 = (m_0 \gamma(v) \vec{v})^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 = (\vec{p}c)^2 + (m_0 c^2)^2$$

lo cual nos permite, traspasar el problema de este límite de masa nula a asignar un momento $\vec{p}$ a la partícula. En resumen:

$$\text{masa no nula: } E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2} = m(v) c^2$$

$$\text{masa nula: } E = |\vec{p}|c$$

Observación/comentario: Esta equivalencia masa-energía pone de manifiesto un eventual problema a la hora de compatibilizar la mecánica cuántica y la relatividad especial ya que las partículas pueden destruirse y crearse.

Creación de partículas

Terminemos esta sección con un ejemplo de física de partículas. El Bevatrón de la Universidad de Berkeley (1954) fue construido para producir antiprotones $\bar{p}$, la antipartícula del protón p . Una antipartícula es una partícula con todas las mismas características que su partícula contraparte con la excepción de tener carga opuesta.

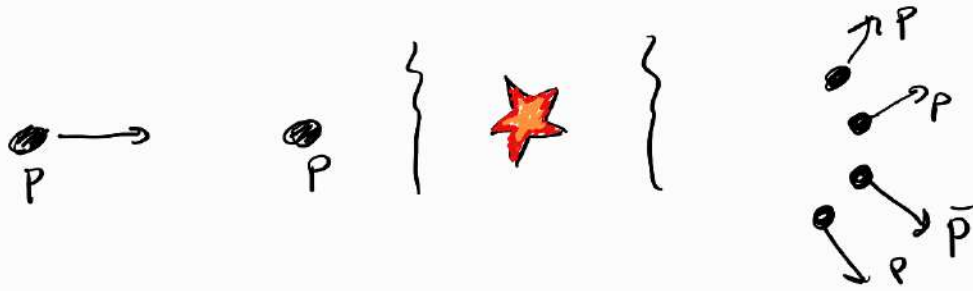
La creación del antiprotón se daría mediante la reacción



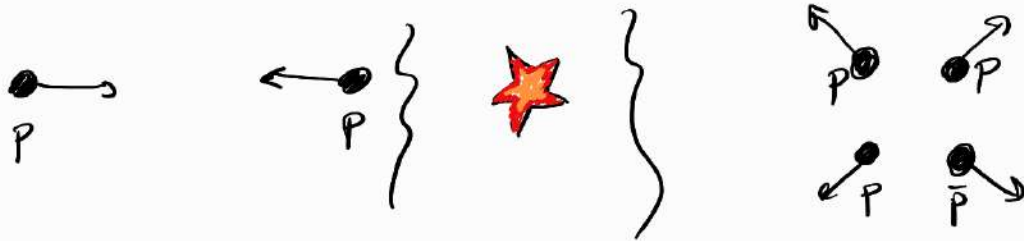
Es decir, un protón de gran energía colisiona con uno en reposo y crea una pareja protón-antiprotón. Nos preguntamos entonces:

¿Cuál es la energía umbral para producir esta reacción?

En el referencial del laboratorio este experimento luce



mientras que en el referencial del centro de masas luce



Como la masa es energía y viceversa, la energía que deben tener las partículas en el RCM es, al menos, la energía de 4 protones en reposo:

$$E_{\text{umbral}}^{(\text{RCM})} = 4m_0c^2 = 2m(v)c^2 \Rightarrow \gamma(v) = 2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

(final) (inicial)

Por otro lado, en el referencial del laboratorio quiere decir que la velocidad del protón proyectil es

$$u_{PP}^{(RL)} = \frac{u_{PP}^{(\text{RCM})} + v_{\text{RCM}}^{(RL)}}{1 + \frac{u_{PP}^{(\text{RCM})} v_{\text{RCM}}^{(RL)}}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{esto equivale a } u_{PP}^{(RL)} \approx 0,9897c !!$$

$$\Rightarrow E_{\text{umbral}}^{(RL)} = m_0c^2 + m(u_{PP}^{(RL)})c^2 = m_0c^2 \left(1 + \gamma \left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \right) \right) = m_0c^2 \left(1 + \gamma \left(\frac{4\sqrt{3}c}{7} \right) \right) *$$

$$\gamma \left(\frac{4\sqrt{3}c}{7} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{48}{49}}} = 7$$

$$\Rightarrow E_{\text{umbral}}^{(RL)} = 8m_0c^2$$

o equivalentemente, debemos proveerle al protón una energía cinética $[K = 6m_0c^2]$