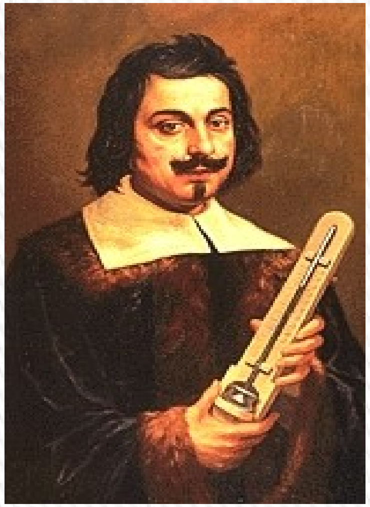
25- FLUIDOS – Fluidos Reales

$\Delta P_h =$



Arquímedes
-288 Siracusa,
-212 muerto por un soldado romano en el sitios a Siracusa.
“Eureka, eureka! “

Blaise Pascal
19/6/1623, Francia.
Muere en 1662.
Matemático, físico, filósofo y teólogo.
Inventó una máquina para sumar, la prensa hidráulica y la jeringa.

Evangelista Torricelli
15/10/1608, Florencia. .
Muere en 1662.
Físico y matemático.
Inventó el barómetro.

Daniel Bernoulli
8/2/1700, Basilea.
Muere en 1782.
Físico , médico y matemático.

ANUNCIOS

1. **Cambios de horarios en evaluaciones:** Bedelía informa que las evaluaciones (parciales, exámenes de julio y agosto) se deberán tomar a partir de la hora 16:00.

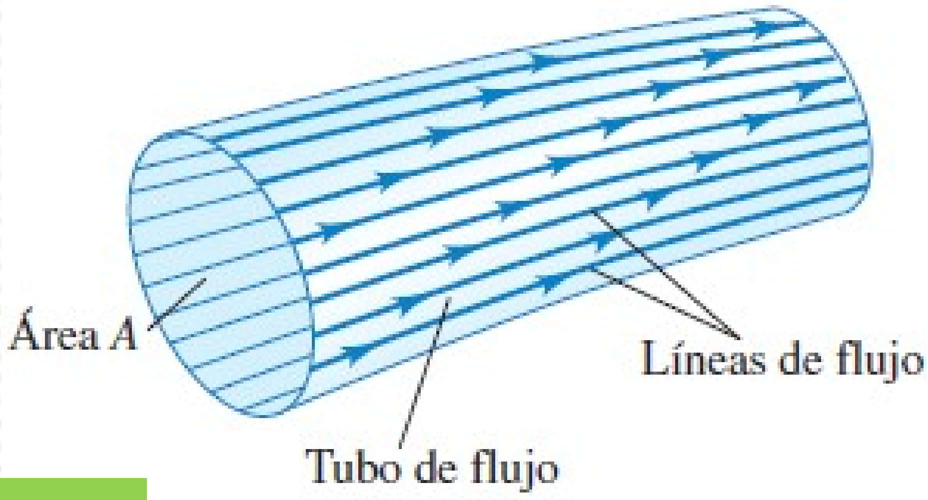
2. **Segundo parcial:** Se hará el **lunes 4 de julio a la hora 16:00** en forma **presencial.** Está abierta la **inscripción en EVA** para el misma: ir a pestaña “Evaluaciones” link **“Inscripción al segundo parcial”**

3. **Evaluación corta 6 (última):** A partir de este jueves y hasta la medianoche del sábado. Sobre unidad 6: momento lineal, colisiones, momento angular y principios de conservación.

4. **2do. Intento de evaluaciones cortas:** Se habilitarán a partir del domingo 26, luego del mediodía. Estarán habilitadas hasta el miércoles 7 de julio.

Repaso de clase pasada

Modelo: **Fluido ideal**: no viscoso, e incompresible.
Flujo: estacionario (estable o laminar) , e irrotacional (no hay momento angular del fluido alrededor de algún punto.)

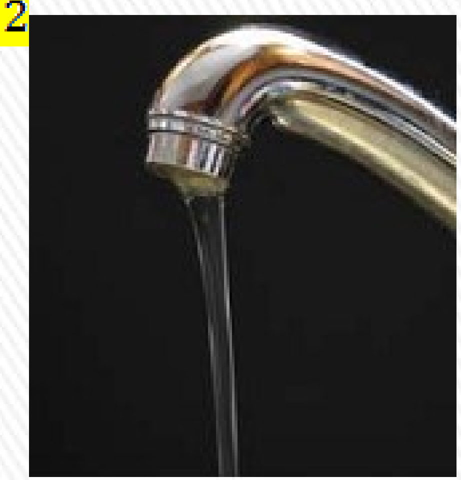


ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

El caudal (Q= A.v) tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de cualquier tubo de flujo para un fluido incompresible.

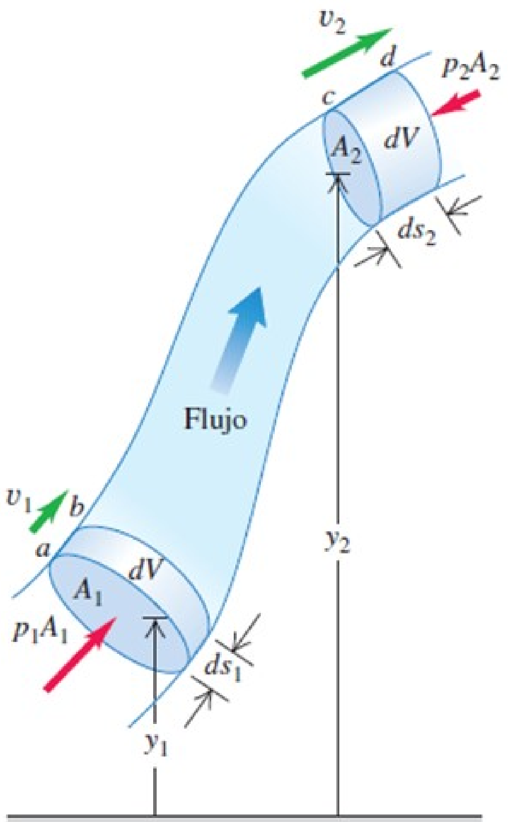
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Si el fluido es compresible: $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$



Repaso de clase pasada

ECUACIÓN DE BERNOULLI



$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte.$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

El trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo.

Ejemplo: ejercicio 7.7

Un tanque contiene un líquido de densidad ρ, y tiene un pequeño orificio a una altura h de la base del tanque. El aire en la parte superior del tanque se mantiene a una presión P. Determinar la velocidad con la cual sale el líquido por el orificio cuando el nivel del líquido está a una distancia H sobre el orificio para el caso en que:

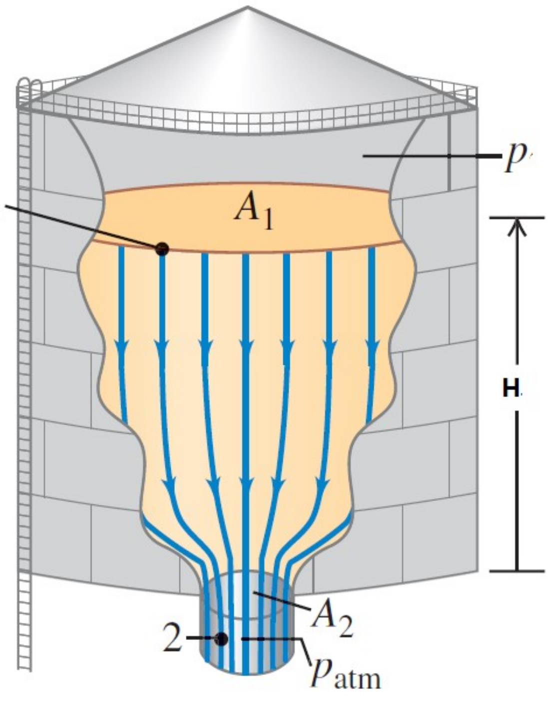
a) La sección del orificio A_2 es mucho menor que la sección del tanque A_1 ($A_2 << A_1$)

b) $A_2 << A_1$ y además $P = P_{atm}$ (este caso se conoce como ley de Torricelli)

c) Considere ahora que $A_1 = N A_2$ y $P = P_{atm}$.

d) Suponga que el tanque está abierto a la atmósfera, H inicialmente es de 1,00 m, el orificio está en el fondo del tanque y $A_1 = 400 A_2$. ¿Cuánto vale la velocidad de salida?

Voy a considerar que se cumplen las condiciones para aplicar la ecuación de Bernoulli.
Los puntos 1 está en la superficie del líquido y a la presión $P = p_1$ el 2 en la salida y a la atmosférica, p_{atm}.
Tomo $y = 0$ en el tubo de salida, así que $y_1 = H$ e $y_2 = 0$.



Aplico Bernoulli entre 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Ejemplo: ejercicio 7.7

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$(p_1 - p_2) + (\rho g y_1 - \rho g y_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g (y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right)$$

Por la ecuación de continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

por lo que: $v_1/v_2 = A_2/A_1$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\left((p_1 - p_{atm}) + \rho g H\right)}{\rho\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}}$$

a) La sección del orificio A_2 es mucho menor que la sección del tanque A_1 ($A_2 << A_1$) . Entonces: $\frac{A_2^2}{A_1^2} \cong 0$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\left((p_1 - p_{atm}) + \rho g H\right)}{\rho}} = \sqrt{2\left(\frac{p_1 - p_{atm}}{\rho}\right) + gH}$$

Ejercicio 7.7

b) $A_2 << A_1$ y además $P = P_{atm}$ (este caso se conoce como ley de Torricelli): $p=p_1=p_{atm}$, por lo que $p_1-p_{atm} = 0$

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

c) Considere ahora que $A_1 = N A_2$ y $P = P_{atm}$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{1}{N^2}\right)}}$$

d) Suponga que el tanque está abierto a la atmósfera, H inicialmente es de 1,00 m, el orificio está en el fondo del tanque y $A_1 = 400\ A_2$. ¿Cuánto vale la velocidad de salida

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{1}{N^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2(9{,}80)(1{,}00)}{\left(1-\frac{1}{400^2}\right)}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}99999375}} = 4.43\ m/s$$

Ley de Torricelli: determina la rapidez de salida de un fluido, válida por un agujero pequeño comparado con el recipiente, ambos abiertos a la atmósfera a una profundidad *h* bajo la superficie.

$$v = \sqrt{2hg}$$

FLUIDOS REALES

Al hablar del flujo de fluidos, entre otras hipótesis, asumimos que el fluido no tenía fricción interna (viscosidad) y que el flujo era estacionario (laminar) e irrotacional (sin torbellinos).
Aunque en muchos casos esas suposiciones son válidas, en muchas situaciones físicas importantes, los efectos de la viscosidad (fricción interna) y la turbulencia (flujo no laminar) son muy importantes.
Veremos una aproximación a algunas de esas situaciones.

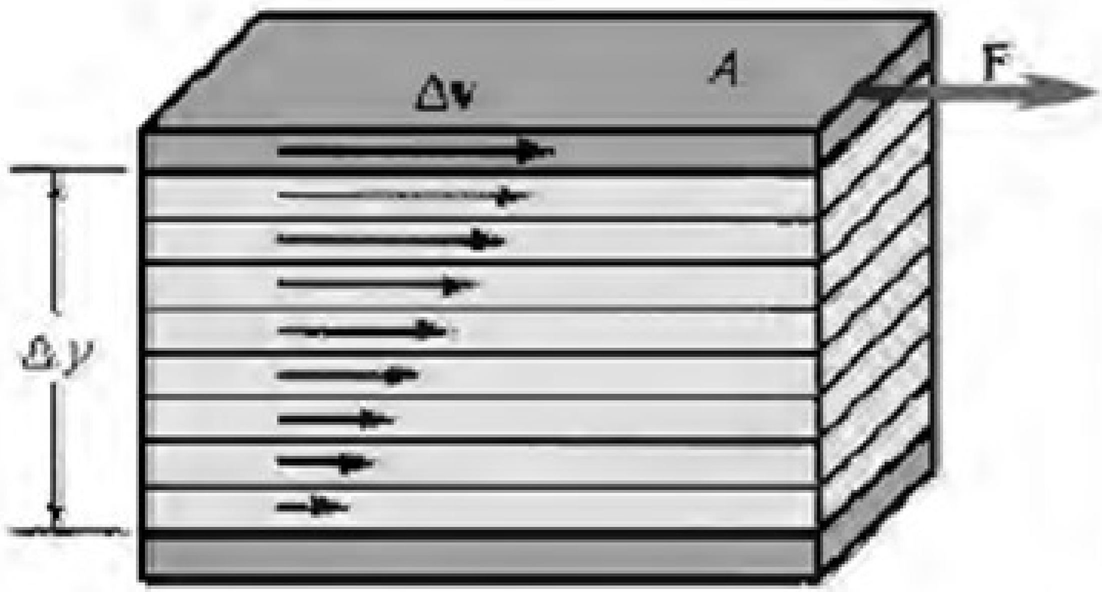
VISCOSIDAD

La **viscosidad** es la fricción interna en un fluido. Las fuerzas viscosas se oponen al movimiento de una parte de un fluido en relación con otra.
Sus efectos son importantes en el flujo de fluidos en tuberías, en el flujo de la sangre, en la lubricación de las partes de un motor y en muchas otras situaciones.
Los fluidos que fluyen con facilidad, como el agua, tienen menor viscosidad que los líquidos “espesos” como la miel o el aceite para motor.
Las viscosidades de todos los fluidos dependen mucho de la temperatura: aumentan para los gases y disminuyen para los líquidos al subir la temperatura.

VISCOSIDAD

Los **fluidos reales** siempre experimentan al moverse ciertos efectos debidos a **fuerzas de rozamiento** o **fuerzas viscosas**.

Si el trabajo realizado contra estas fuerzas es comparable al trabajo total realizado sobre el fluido o al cambio de energía mecánica, la ec. Bernoulli no puede usarse.



Dos placas planas separadas por una delgada capa de fluido.

Si la placa inferior se mantiene fija, se debe ejercer una fuerza para mover la placa superior con velocidad constante.

Esta fuerza debe contrarrestar las fuerzas viscosas y es mayor para líquidos muy viscosos, tales como el aceite, que para fluidos poco viscosos, como el agua.

La fuerza *F es proporcional al área* de las placas *A y a la velocidad de la placa superior Δv,* e inversamente proporcional a la separación entre las placas *Δy*

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

VISCOSIDAD

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

Constante de proporcionalidad η *(eta) se denomina* ***viscosidad****.*

Unidad S.I. de viscosidad: 1 kg/(m. S) = 1 N.s/m^2 =1 Pa.s (pascal.segundo).
La unidad más común es el **centipoise (cps**) que equivale a 1 mPa.s

Esta definición de viscosidad corresponde a la denominada **viscosidad dinámica o absoluta.**
También se define la **viscosidad cinemática**, como el cociente de la viscosidad dinámica dividida la densidad, cuya unidad en el S.I. es el m^2/s.
Otra unidad de la viscosidad cinemática es el stoke 1St¨= 10^{-4} m^2/s

VISCOSIDAD

Valores típicos de la viscosidad en pascales-segundo (Pa-s)

Temperatura, °C	Aceite de castor	Agua	Aire	Sangre normal*	Plasma sanguíneo*
0	5,3	$1{,}792 \times 10^{-3}$	$1{,}71 \times 10^{-5}$		
20	0,986	$1{,}005 \times 10^{-3}$	$1{,}81 \times 10^{-5}$	$3{,}015 \times 10^{-3}$	$1{,}810 \times 10^{-3}$
37	—	$0{,}6947 \times 10^{-3}$	$1{,}87 \times 10^{-5}$	$2{,}084 \times 10^{-3}$	$1{,}257 \times 10^{-3}$
40	0,231	$0{,}656 \times 10^{-3}$	$1{,}90 \times 10^{-5}$		
60	0,080	$0{,}469 \times 10^{-3}$	$2{,}00 \times 10^{-5}$		
80	0,030	$0{,}357 \times 10^{-3}$	$2{,}09 \times 10^{-5}$		
100	0,017	$0{,}284 \times 10^{-3}$	$2{,}18 \times 10^{-5}$		

* Las viscosidades relativas (η/η_{agua} de la sangre y del plasma permanecen casi constantes a temperaturas comprendidas entre 0° C y 37° C.

En general, si T disminuye los líquidos se vuelven más viscosos (aceite para motores).
Los gases son cada vez menos viscosos a medida que baja la T.
Como en general las fuerzas viscosas son pequeñas, los fluidos se utilizan a menudo como lubricantes para disminuir el rozamiento.

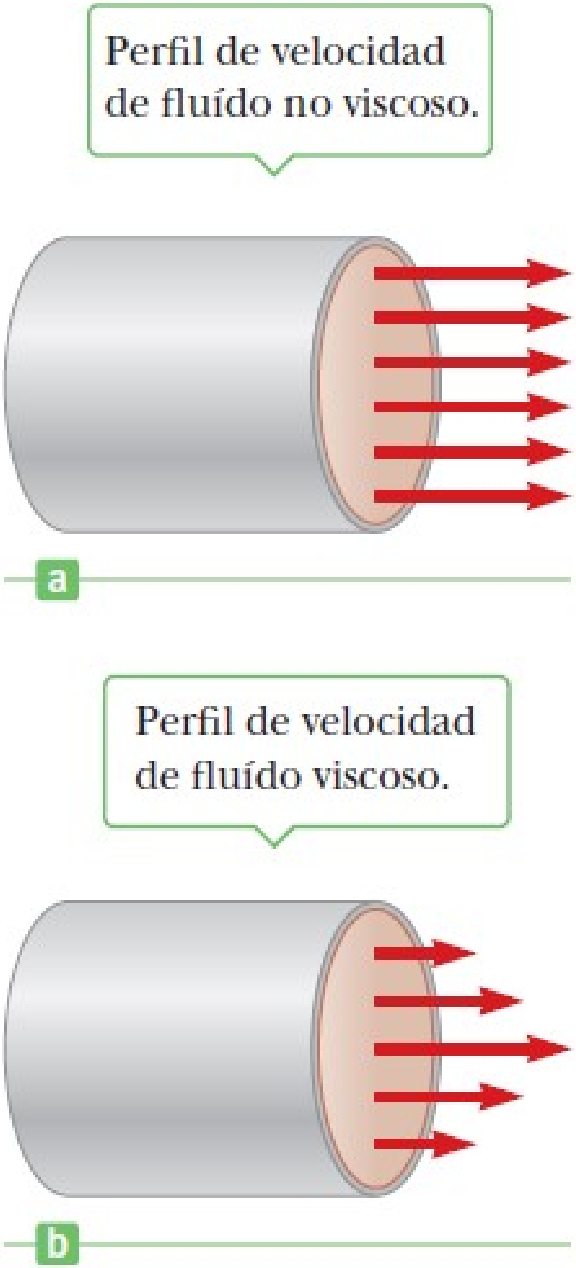
FLUJO LAMINAR

Un fluido viscoso tiende a adherirse a una superficie sólida que está en contacto con ella.
La capa vecina a la tubería inferior está quieta, las siguientes van aumentando su rapidez, a medida que se alejan de las paredes alcanzando su máximo en el centro.
Esta estructura de capas o ***flujo laminar*** ***se presenta en los fluidos viscosos a baja velocidad.***

Cuando la velocidad del fluido aumenta mucho, el flujo cambia de carácter y se vuelve ***turbulento***.

Flujo turbulento disipa más energía mecánica que el flujo laminar.

El flujo sanguíneo en el sistema circulatorio es normalmente laminar en vez de turbulento.



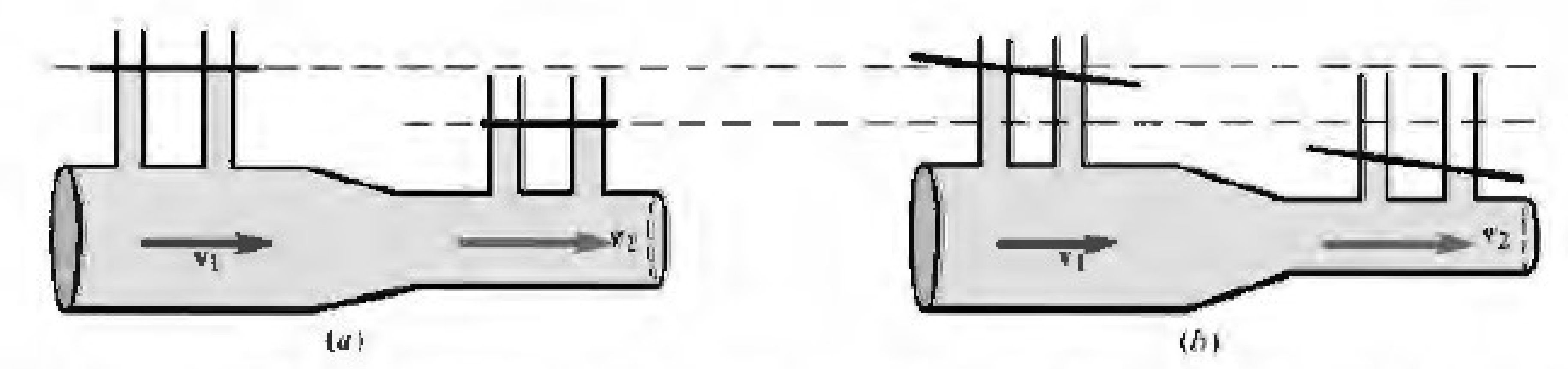
FLUJO LAMINAR

El fluido tiene la máxima velocidad $v_{máx}$ *en* el centro.

La velocidad media es la mitad de dicha velocidad: $v_{med} = v_{máx}/2$

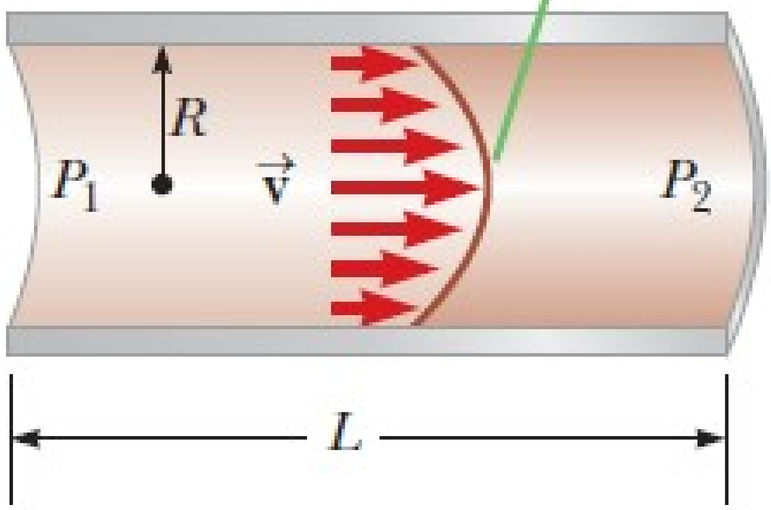
Según la ecuación de continuidad, el gasto (caudal):

$Q = Av_{med} = Av_{máx} / 2$



La presión disminuye a medida que el fluido avanza por el tubo.
Se debe a que ha de hacerse trabajo para contrarrestar las fuerzas viscosas.
Si la sección transversal varía o si el tubo no es horizontal, se producen cambios adicionales de presión de acuerdo con la ecuación de Bernoulli.

FLUJO LAMINAR



La caída de presión
$\Delta P = P_1 - P_2$
a lo largo de un
tubo horizontal de sección transversal constante es proporcional a:

- las fuerzas viscosas (*viscosidad* η),
- la velocidad media del fluido (v_{med}),
- la longitud del tubo (L).
- e inversamente proporcional a la sección (R^2)

$$\Delta P \propto \frac{\eta v_{med} L}{R^2}$$

$$v_{med} = \frac{\Delta P R^2}{8 \eta L}$$

$$Q = \frac{\Delta P \pi R^4}{8 \eta L}$$

Ley de Poiseuille

FLUJO LAMINAR

Ley de Poiseuille: el gasto Q aumenta si se incrementa la diferencia de presión en el tubo ΔP o si aumenta el radio R de éste y disminuye si aumenta la viscosidad del fluido η y/o la longitud L de la tubería.

$$Q = \frac{\Delta P \pi R^4}{8 \eta L}$$

Q proporcional a R^4: en los vasos sanguíneos pequeñas variaciones de los radios pueden producir grandes cambios en el gasto.

Ejemplo, al pasar de *R a 1,19R se tiene un aumento en el gasto de* $(1,19)^4 = 2$.

Una reducción en una vena o en una arteria, el corazón tendrá que trabajar considerablemente más para producir un mayor descenso de presión, y, por lo tanto, para mantener el gasto necesario.

Esto explica el vínculo entre una dieta alta en colesterol (que tiende a reducir el diámetro de las arterias) y una presión arterial elevada.

FLUJO TURBULENTO

La ley de Poiseuille se cumple sólo para flujos laminares.

No hay un análogo a la ley de Poiseuille para el flujo turbulento.

En la práctica, el flujo turbulento se trata mediante diversas reglas empíricas y relaciones obtenidas tras muchos estudios experimentales.

Veremos una de estas reglas empíricas para determinar si el flujo es laminar o turbulento.

a) Baja rapidez: flujo laminar

b) Alta rapidez: flujo turbulento

FLUJO TURBULENTO

El valor de una magnitud adimensional denominada ***número de Reynolds*** $\boldsymbol{N_R}$ *determina si el flujo* es laminar o turbulento.

Consideremos un fluido de **densidad ρ** *y* ***viscosidad*** η *que circula por un* ***tubo de diámetro D*** *con una* ***velocidad media*** $\boldsymbol{v_{med}}$ *el* N_R *vale:*

$$N_R = \frac{2\rho v_{med} R}{\eta} = \frac{\rho v_{med} D}{\eta}$$

En los *tubos se ha hallado experimentalmente que para:*

$N_R < 2000$ *el flujo es laminar*

$N_R > 3000$ *el flujo es turbulento*

$2000 < N_R < 3000$ *el flujo es inestable* (puede pasar de laminar a turbulentoo viceversa)

Ejercicio 7.12

¿Cuál es la máxima velocidad media de la sangre en una arteria de $2{,}0\times10^{-3}$ m de radio si el flujo sigue siendo laminar? ¿Cuál es el caudal correspondiente?

Para la sangre tenemos: $\eta = 2{,}084\times10^{-3}$ Pa.s $\rho = 1{,}0595\times10^{3}$ kg/m^3

El máximo valor del N_R para que el flujo aún sea laminar es de 2000.
El N_R está dado por:

$$N_R = \frac{2\rho v_{med} R}{\eta} = \frac{\rho v_{med} D}{\eta}$$

Por lo tanto despejando:

$$v_{med} = \frac{\eta N_R}{2\rho R}$$

$$v_{med} = \frac{\eta N_R}{2\rho R} = \frac{(2{,}084\times10^{-3})(2000)}{2(1{,}0595\times10^{3})(2{,}0\times10^{-3})} =$$ **0,983 m/s =98,3 cm/s**

El caudal vale: $$Q = \pi R^2 v_{med} = \pi(2{,}0\times10^{-3})^2(0{,}983) =$$

$1{,}24\times10^{-5}$ m^3/s = 12,4 cm^3/s

Ejercicio 7.13

Una arteria grande de un perro tiene un radio interior de 4,0×10^{-3} m. El caudal de la sangre en la arteria es de 1,0 cm^3/s. Considerando a la sangre como un fluido viscoso con viscosidad aproximada a 2,084×10^{-3} Pa.s, halle:

a) las velocidades media y máxima de la sangre.

b) La caída de presión en un fragmento de arteria de 0,10 m de longitud.

c) Discuta a partir de los resultados de este ejercicio la validez de despreciar la viscosidad al estimar la presión sanguínea a distintas alturas del cuerpo humano.

d) Calcule el número de Reynolds y compruebe si el flujo de la sangre efectivamente es laminar.

Datos: R= 4,×10^{-3} m; Q=1,0 cm^3/s= 1,0×10^{-6} m^3/s; η = 2,084×10^{-3} Pa.s; ρ =1,0595×10^3 kg/m^3

$$v_{med} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1{,}0\times 10^{-6}}{\pi(4{,}0\times 10^{-3})^2} = 1{,}989\times 10^{-2}\ \text{m/s}$$

$$v_{máx} = 2v_{med} = 2 \times 1{,}989 \times 10^{-2} = 0{,}03979\ \text{m/s}$$

v_{med} =2,0 ×10^{-2} m/s =2,0 cm/s

$v_{máx}$ =4,0 ×10^{-2} m/s =4,0 cm/s

Ejercicio 7.13

b) A partir de la ecuación de **Poiseuille:** $v_{med} = \frac{\Delta P R^2}{8\eta L}$ $\Delta P = \frac{8\eta L\, v_{med}}{R^2} =$

$$\Delta P = \frac{8\eta L v_{med}}{R^2} = \frac{8\left(2{,}084\times 10^{-3}\right)(0{,}10)(1{,}989\times 10^{-2})}{(4{,}0\times 10^{-3})^2} = 2{,}073\ Pa$$

ΔP = 2,1 Pa

Teniendo en cuenta que los cambios de presión por efecto del cambio de altura considerado vale:

$\Delta P_h = \rho_{sangre}.g.\ h = 1{,}0595\times 10^3$ kg/m3×9,80 m/s^2×h = (10.383 P/m) ×h

Es decir que en 10 cm de diferencia de altura hay un ΔP_h= 1.038 Pa

Por tanto el efecto de la viscosidad en la caída de presión no es significatuva.

c) El número de Reynolds está dado por: $N_R = \frac{2\rho v_{med} R}{\eta}$

$$N_R = \frac{2\rho v_{med} R}{\eta} = \frac{2(1{,}0595\times 10^3)(1{,}989\times 10^{-2})(4{,}0\times 10^{-3})}{(2{,}084\times 10^{-3})} = 80{,}88$$

N_R =81< 2000 por lo que el flujo es laminar

FUERZAS DE ARRASTRE VISCOSAS

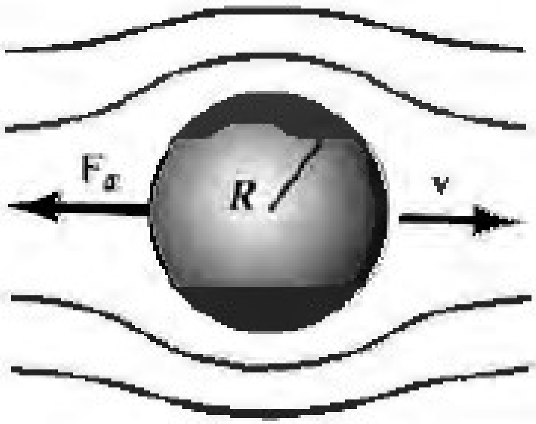
A velocidades muy bajas, la *fuerza de resistencia del aire se debe principalmente* a las fuerzas viscosas y es proporcional a la velocidad *v.*
***A velocidades mayores,* el objeto acelera el fluido que se mueve en sus proximidades, y la fuerza varía como v^2.**

Consideramos las **fuerzas de arrastre *a bajas velocidades***, *o* ***fuerzas de arrastre viscosas.***

Las fuerzas de arrastre viscosas se deben a que la capa de fluido adyacente a un objeto se halla en reposo con respecto a dicho objeto. Cuando el objeto se mueve a través del fluido, esta capa experimenta una fuerza de rozamiento con respecto a la capa contigua de fluido, que se mueve rápidamente.
Las sucesivas capas próximas al objeto producen fuerzas de rozamiento unas respecto de otras y el resultado neto es una fuerza que frena el movimiento del objeto en el fluido.

FUERZAS DE ARRASTRE VISCOSAS

El objeto se mueve muy lentamente en el fluido y el correspondiente número de Reynolds es muy pequeño.



Objeto esférico de radio *R con una pequeña velocidad v a través* de un fluido de viscosidad η *y densidad* ρ_0.

$$F_a = \phi R v \eta$$

ϕ constante adimensionada, para una **esfera** vale $\phi = 6\pi$

Válido cuando la velocidad es suficientemente pequeña y el número de Reynolds para una esfera*, la condición es* que $N_R < 1$.

Si N_R *es igual o mayor que 1*, ***la fuerza de arrastre pasa a ser proporcional*** a $\boldsymbol{v^2}$

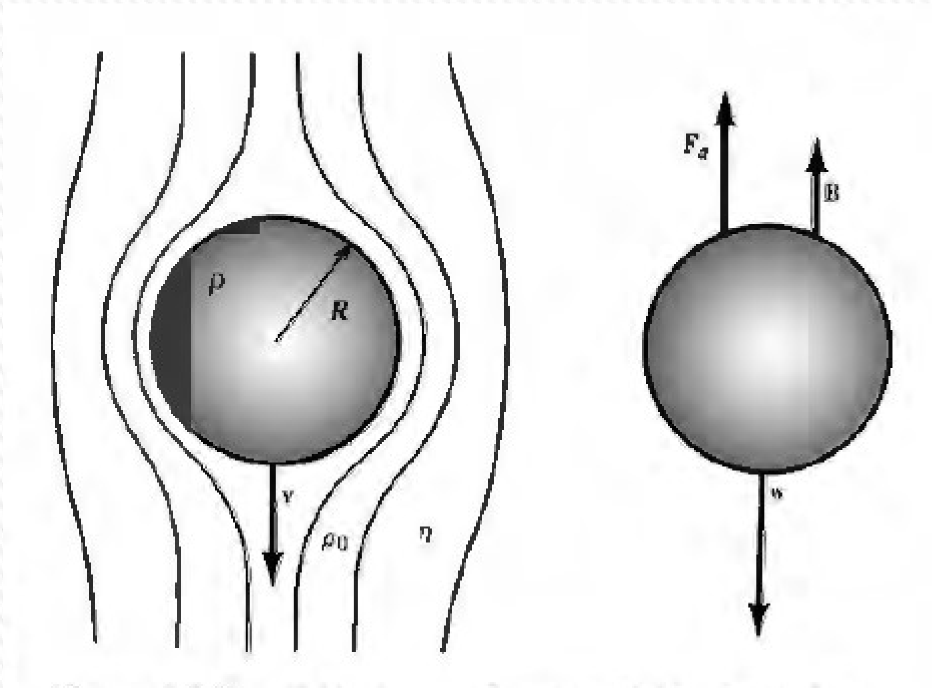
Para una esfera:

$$F_a = 6\pi R v \eta$$

Ley de Stokes

Para formas complicadas, se puede seguir usando la ecuación , pero ϕ se ha de determinar experimentalmente y *R ha de interpretarse* como alguna longitud característica del objeto, como por ejemplo el radio medio de un glóbulo rojo.

FUERZAS DE ARRASTRE VISCOSAS



Ejemplo de la ley de Stokes: calculamos la velocidad máxima o límite v_T de una pequeña esfera de radio *R y densidad ρ que cae a través* de un fluido de viscosidad η *y densidad* ρ_0

La velocidad límite se alcanza cuando la fuerza de arrastre F_a *es contrarrestada exactamente por el peso* ***w*** *y el empuje* **B.**

El volumen de la esfera es $V = 4\pi R^3/3$ *y su peso es* $w = \rho g V$.

La fuerza de empuje hacia arriba es igual al peso del fluido desalojado $B = \rho_0 g V$

Según la ley de Stokes, la fuerza viscosa de arrastre a la velocidad límite es $F_a = 6\pi R v_T \eta$.

Entonces la velocidad límite v_T *se alcanza* cuando $F_a = w - B$, *o sea*

$$6\pi R v_T \eta = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 g$$

FUERZAS DE ARRASTRE VISCOSAS

$$6\pi R v_T \eta = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 g$$

despejando la velocidad límite v_T :

$$v_T = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta} g(\rho - \rho_0)$$

Si se miden *R y v_T, esta ecuación proporciona una forma* de hallar la viscosidad del fluido.

La ecuación para la velocidad límite sólo vale para objetos muy pequeños, tales como partículas de polvo en el aire o macromoléculas en solución.
Para objetos mayores, la velocidad límite predicha por esta ecuación corresponde a un número de Reynolds mucho mayor que 1, de modo que la ley de Stokes no es aplicable.

Por ejemplo, para una esfera de 1 cm de radio en aire, N_R = ***1** cuando v=1,5 mm/s.*
Así pues, el arrastre a «altas velocidades» se aplica esencialmente a todos los problemas en que interviene el movimiento de objetos macroscópicos

FUERZAS DE ARRASTRE VISCOSAS

Para velocidades mayores la fuerza es proporcional a v^2, a la sección transversal al movimiento A *, a la viscosidad del fluido* η *y* de la densidad del fluido ρ_0.

$$F_a = C_D A \frac{\rho_0 v^2}{2}$$

C_D es el ***coeficiente de arrastre*** *que se obtiene experimentalmente*

Este resultado es válido para objetos de cualquier forma.
Los valores de C_D están tabulados.

FUERZAS DE ARRASTRE VISCOSAS

Type of Object	Drag Coefficient - c_d -	Frontal Area
Laminar flat plate (Re=106)	0.001	
Dolphin	0.0036	wetted area
Turbulent flat plate (Re=106)	0.005	
Subsonic Transport Aircraft	0.012	
Supersonic Fighter,M=2.5	0.016	
Streamlined body	0.04	π / 4 d2
Airplane wing, normal position	0.05	
Sreamlined half-body	0.09	
Long stream-lined body	0.1	
Bicycle - Streamlined Velomobile	0.12	5 ft^2 (0.47 m^2)
Airplane wing, stalled	0.15	
Modern car like a Tesla model 3 or model Y	0.23	
Toyota Prius, Tesla model S	0.24	frontal area
Tesla model X		
Sports car, sloping rear	0.2 - 0.3	frontal area
Common car like Opel Vectra (class C)	0.29	frontal area
Hollow semi-sphere facing stream	0.38	
Bird	0.4	frontal area
Solid Hemisphere	0.42	π / 4 d2
Sphere	0.5	
Saloon Car, stepped rear	0.4 - 0.5	frontal area
Bike - Drafting behind an other cyclist	0.5	3.9 ft^2 (0.36 m^2)
Convertible, open top	0.6 - 0.7	frontal area
Bus	0.6 - 0.8	frontal area
Old Car like a T-ford	0.7 - 0.9	frontal area
Cube	0.8	s2
Bike - Racing	0.88	3.9 ft^2 (0.36 m^2)
Bicycle	0.9	
Tractor Trailed Truck	0.96	frontal area
Truck	0.8 - 1.0	frontal area
Person standing	1.0 – 1.3	
Bike - Upright Commuter	1.1	5.5 ft^2 (0.51 m^2)
Thin Disk	1.1	π / 4 d2
Solid Hemisphere flow normal to flat side	1.17	π / 4 d2
Squared flat plate at 90 deg	1.17	
Wires and cables	1.0 - 1.3	
Person (upright position)	1.0 - 1.3	
Hollow semi-cylinder opposite stream	1.2	
Ski jumper	1.2 - 1.3	
Hollow semi-sphere opposite stream	1.42	
Passenger Train	1.8	frontal area
Motorcycle and rider	1.8	frontal area
Long flat plate at 90 deg	1.98	
Rectangular box	2.1	

Ejercicio 7.14

a) ¿Cuál es la velocidad límite de una partícula de polvo de $1{,}0\times10^{-5}$ m de radio y $2{,}0\times10^{3}$ kg/m^3 de densidad en aire a 20º C?
b) ¿Cuál es el número de Reynolds a la velocidad límite?
c) Hallar la fuerza de arrastre a la velocidad límite.

a) La velocidad límite v_T para fuerzas de arrastre viscosas (bajas velocidades), suponiendo que puedo aplicar la ley de Stokes está dada por:

$$v_T = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}g(\rho - \rho_0)$$

Por la tabla de viscosidades, para el aire a 20ºC: $\eta = 1{,}81\times10^{-5}$ Pa.s
y el aire a 20°C tiene una densidad: $\rho_0 = 1{,}22$ kg/m^3

$$v_T = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}g(\rho - \rho_0) = \frac{2}{9}\frac{(1{,}0\times10^{-5})^2}{1{,}81\times10^{-5}}(9{,}8)(2{,}0\times10^3 - 1{,}22) = \quad 2{,}405\times10^{-2}\ \text{m/s}$$

$v_T = 2{,}4\times10^{-2}$ m/s= 2,4 cm/s

b) El número Reynolds para la velocidad terminal vale:

$$N_R = \frac{\rho_0 v_T R}{\eta}$$

$$N_R = \frac{\rho_0 v_T R}{\eta} = \frac{(1{,}22)(2{,}405\times10^{-2})(1{,}0\times10^{-5})}{1{,}01\times10^{-5}} = \quad 1{,}62\times10^{-2}$$

Como es menor que 1, se puede aplicar la ley de Stokes-

$N_R = 0{,}016$

Ejercicio 7.14

c)) La fuerza de arrastre asumiendo que es esférica $F_a = 6\pi R v \eta$

$$F_a = 6\pi R v \eta = 6\pi(1{,}0 \times 10^{-5})(2{,}405 \times 10^{-2})(1{,}81 \times 10^{-5})$$

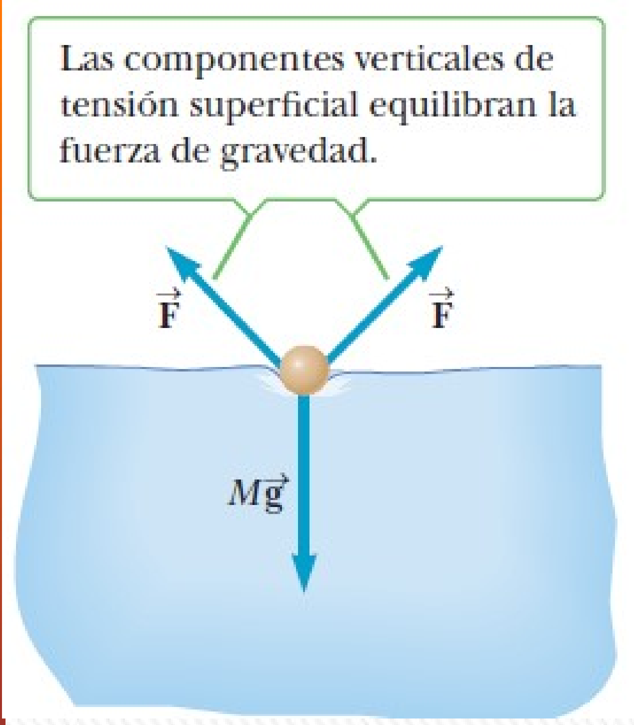
$=8{,}205\times10^{-11}$ N

$F_a = 8{,}2\times10^{-11}$ N

FUERZAS DE COHESIÓN EN LÍQUIDOS

Los líquidos tienen una fuerte tendencia a mantenerse intactos.
La cohesión de los líquidos se debe a las fuerzas de atracción entre las moléculas. Debido a estas atracciones, presentan superficies bien definidas como las membranas estiradas o las cintas de goma, que tienden a presentar un área mínima. Esta propiedad de las superficies de los líquidos es la llamada **tensión superficial.**

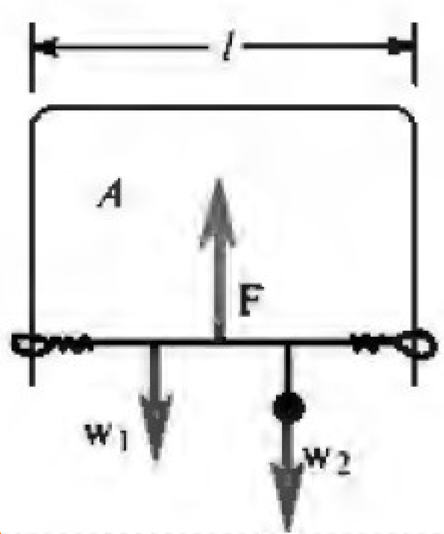
Los insectos pueden caminar por encima del agua porque su peso es contrarrestado por la resistencia de la superficie a la deformación.



Una aguja flota sobre la superficie de agua, se verá que la aguja a pesar que la densidad del acero sea unas ocho veces más que la del agua.

Esto se explica por la tensión superficial.
Un examen minucioso de la aguja muestra que en realidad se apoya en una depresión de la superficie del líquido.

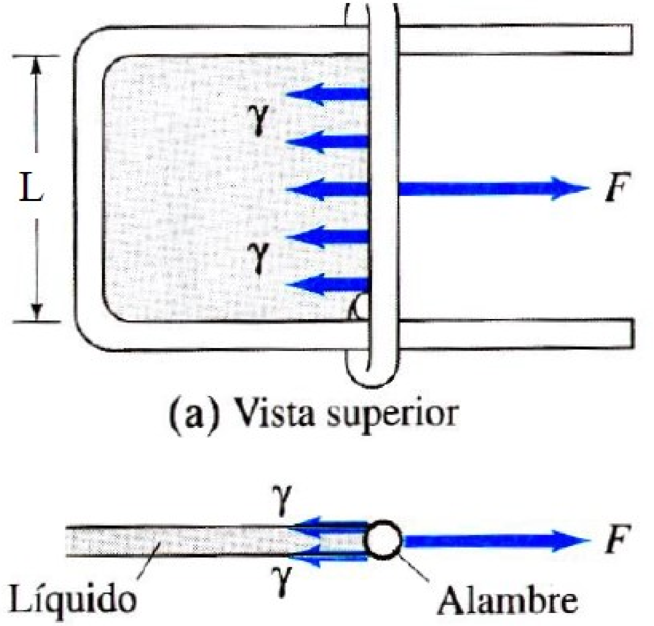
TENSIÓN SUPERFICIAL



Experimento: se moja en un líquido un aparato como el que se muestra en la figura: alambre en forma de U, un alambre deslizante de peso w_1 y un peso colgante w_2.
Una película delgada de líquido llena el área comprendida entre los alambres.
Si el peso total $w = w_1 + w_2$ *se escoge adecuadamente, las* dos superficies de la película ejercen una fuerza F igual y opuesta al peso, y el alambre deslizante .permanece en reposo.
En esta situación la fuerza *F debida* a la tensión superficial es igual en módulo a *w.*

La ***tensión superficial*** γ *se define como la* ***fuerza*** **por unidad de longitud** ejercida por *una de las superficies.*
Si el alambre recto tiene una longitud L, la fuerza neta hacia arriba debida a las dos superficies es
$F = 2\gamma L.$
Por lo tanto, la tensión superficial es:

$$\gamma = \frac{F}{2L}$$



(a) Vista superior

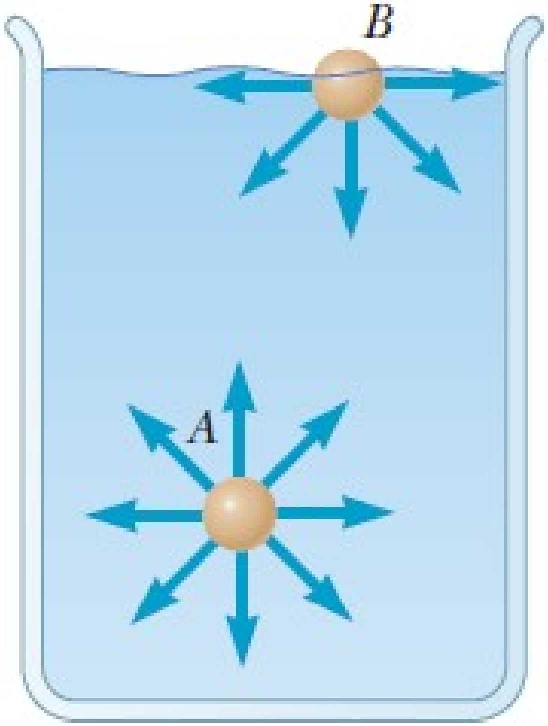
(b) Vista lateral (amplificada)

TENSIÓN SUPERFICIAL

Tensión superficial de algunos líquidos representativos en contacto con el aire

Líquido	Tensión superficial ($N\ m^{-1}$)	Temperatura (0 °C)
Alcohol etílico	$2{,}23 \times 10^{-2}$	20
Aceite de oliva	$3{,}20 \times 10^{-2}$	20
Glicerina	$6{,}31 \times 10^{-2}$	20
Agua	$7{,}56 \times 10^{-2}$	0
	$7{,}28 \times 10^{-2}$	20
	$6{,}62 \times 10^{-2}$	60
	$5{,}89 \times 10^{-2}$	100
Mercurio	0,465	20
Plata	0,800	970
Oro	1,000	1070
Cobre	1,100	1130
Oxígeno	$1{,}57 \times 10^{-2}$	−193
Neón	$5{,}15 \times 10^{-3}$	−247

TENSIÓN SUPERFICIAL



Una molécula en el punto *A en un recipiente de agua, aún cuando las* moléculas cercanas ejercen fuerzas sobre esa molécula, la fuerza neta sobre ella es cero porque está completamente rodeada por otras moléculas y es atraída por igual en todas direcciones.

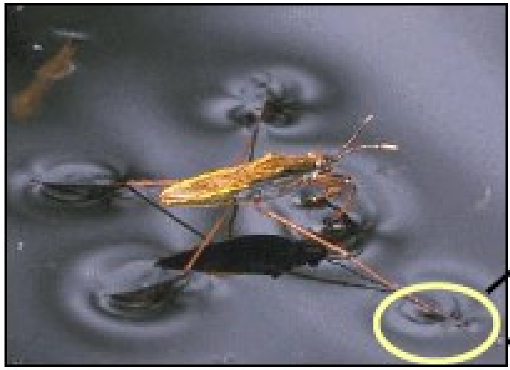
La molécula en *B, sin embargo, no es atraída igualmente en todas direcciones.*
Ya que no hay moléculas encima que ejerzan fuerza hacia arriba, la molécula en *B es atraída* hacia el interior del líquido.

El efecto neto de esta atracción sobre todas las moléculas de la superficie es hacer que la superficie del líquido se contraiga y, en consecuencia, forme un área del líquido tan pequeña como sea posible.

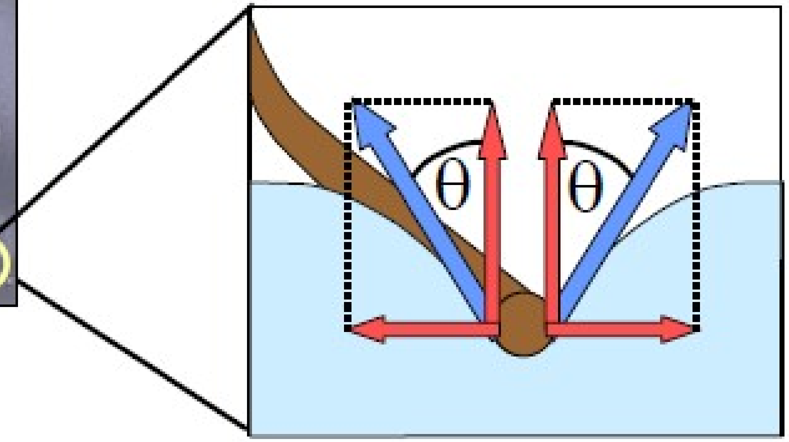
Las gotas de agua toman una forma esférica porque una esfera tiene la mínima área supericial para contener un volumen dado.

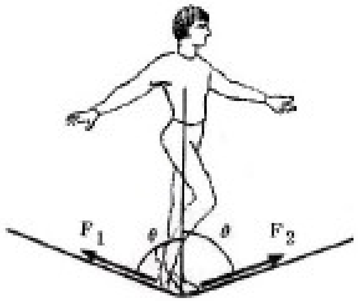
TENSIÓN SUPERFICIAL

Ejemplo biológico: andando sobre el agua



Zapatero *Rhagovelia*





equilibrista

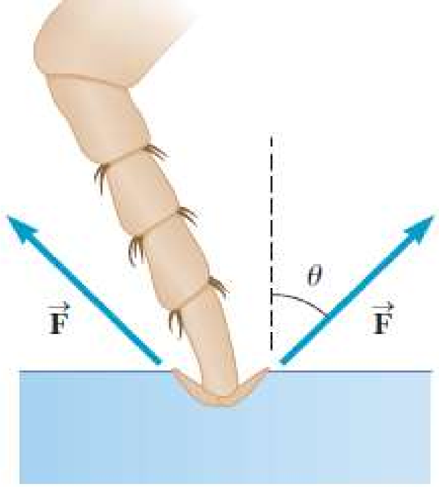
El peso del insecto queda compensado por la resistencia de la superficie del agua a ser deformada, igual que le ocurre al equilibrista.
Esta fuerza sólo tiene componente vertical, pues la horizontal se anula:

componente vertical: $F_y = 2\pi r\gamma\cos\theta$ (× número de patas)

donde r es el radio de la depresión circular que forma la pata sobre la superficie (bastante grande pues las patas están muy extendidas).
Hojas y flores también pueden flotar aunque sean más densas que el agua.

Ejercicio 7.15

Muchos insectos pueden literalmente caminar sobre el agua, valiéndose de la tensión superficial como su soporte. Para mostrar este hecho, suponga que el insecto tiene un “pie” esférico. Cuando el insecto pisa el agua con sus seis patas, una depresión se forma en el agua alrededor de cada pie, como se ve en la figura. La tensión superficial del agua produce fuerzas hacia arriba sobre el agua que tienden a restaurar la superficie del agua a su normal forma plana.



a) Si el insecto tiene una masa de $2{,}0\times10^{-5}$ kg y el radio de cada pie es $1{,}5\times10^{-4}$ m, encuentre el ángulo θ.
b) Ahora considere la siguiente situación. Cada pata de un insecto que permanece sobre el agua a 20ºC, produce una depresión de radio $r = 1{,}0\times10^{-3}$ m y forma un ángulo $\theta = 30º$.
Determine la fuerza de tensión superficial que actúa hacia arriba en cada pata y la masa del insecto.

Ejercicio 7.15

a) La fuerza debido a la tensión superficial vale $F = \gamma L$ y como el pie es circular: $L = 2\pi r$, tenemos que la componente neta vertical, para c/u de las patas según la figura vale: $F_y = 2\pi r\gamma\cos\theta$

La tensión superficial para el agua a 20° C vale: 0,0728 N/m

Esta fuerza debe equilibrar a 1/6 del peso del insecto (suponiendo que el peso se distribuye uniformemente en c/u de las patas): $2\pi r\gamma\cos\theta = mg/6$

$$\cos\theta = \frac{mg}{12\pi r\gamma} = \frac{(2{,}0 \times 10^{-5})(9{,}8)}{12\pi(1{,}5 \times 10^{-4})(0{,}0728)} = 0{,}47610$$

por lo que $\theta = 61{,}57°$ $\boxed{\theta = 62°}$

b) $F_y = 2\pi r\gamma\cos\theta = 2\pi(1{,}0 \times 10^{-3})(0{,}0728)\cos 30° = 3{,}961 \times 10^{-4}$ N

$F_y = mg/6$

$$m = \frac{6F_y}{g} = \frac{6 \times 3{,}961 \times 10^{-4}}{9{,}8} = 2{,}425 \times 10^{-4}\ kg$$

$\boxed{m = 2{,}4 \times 10^{-4}\ \text{kg}}$