Práctico 9:
REDES NEURONALES

Parte 1: Neurona de McCulloch-Pitts.

Las neuronas McCulloch-Pitts son elementos de actividad binaria, es decir que su actividad (“e”) es 0 (no dispara potencial de acción) o 1 (dispara potencial de acción). Dicho valor de actividad depende tanto de la actividad de sus entradas (también 0 ó 1), como del valor de un coeficiente denominado *peso sináptico*. La siguiente ecuación describe el comportamiento de una neurona de McCulloch-Pitts:

$$e\,(t + 1) = H(\phi). \tag{1}$$

Ésta es una función escalón de Heaviside, que determina el valor de la actividad de la neurona de McCulloch–Pitts en el tiempo t + 1, según se describe a continuación:

$$H(\phi) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \phi \geq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad \phi < 0, \end{cases} \tag{2}$$

siendo $\phi = \sum_j p_j.e_j(t) - \theta$

Como puede verse, la respuesta (o salida) de la neurona de McCulloch-Pitts dependerá de que la sumatoria de la actividad de las “j” entradas en el tiempo t ($e_j(t)$), ponderadas (o “pesadas”) por los “j” pesos sinápticos correspondientes (p_j: números reales), superen o no el valor del umbral de activación θ (real):

La figura 1 representa una neurona McCulloch-Pitts. En el diagrama ésta recibe dos entradas simultáneas. El valor de cada entrada así como de la salida es binario (0 ó 1). Los valores de los pesos sinápticos son variables, al igual que el umbral de la neurona.

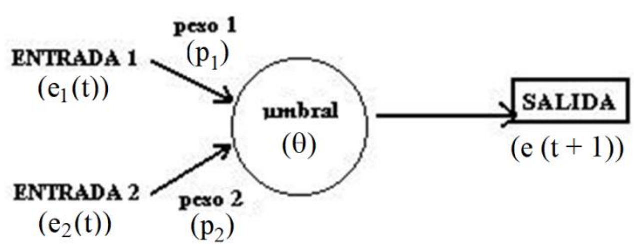


Figura 1

- **Actividad 1.1**

Suponga que se quiere representar la respuesta del pez de la figura 2 ante dos estímulos entrantes que obedecen a distintas características de un objeto presente en su entorno. Para ello se propone utilizar las funciones lógicas representadas en las “tablas de verdad” que se muestran a continuación y una neurona de McCulloch-Pitts. Dichos estímulos son captados diferencialmente por dos neuronas p y q, cada una de ellas especializada en responder ante ciertas características del objeto (p: tamaño; q: movimiento), y procesados por una neurona de McCulloch-Pitts que pauta el siguiente comportamiento:

(1) objeto pequeño (p = 0) y que no esté en movimiento (q = 0): pez quieto (0);

(2) objeto pequeño (p = 0) y en movimiento (q = 1): pez quieto (0);

(3) objeto grande (p = 1) y que no esté en movimiento (q = 0): pez quieto (0);

(4) objeto grande (p = 1) y en movimiento (q = 1); huída (1).

Función lógica: OR

entradas		salida
p	q	$p \vee q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Función lógica: AND

entradas		salida
p	q	$p \wedge q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Función lógica: XOR

entradas		salida
p	q	$p \forall q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

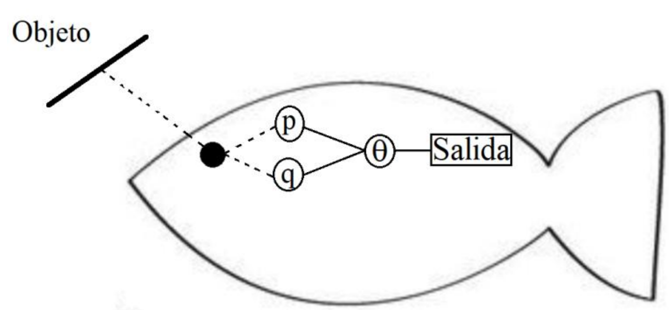


Figura 2

a) ¿A qué función lógica corresponde el comportamiento pautado? Utilizando las Ecs. (1) y (2), encuentre valores reales de pesos sinápticos y umbrales para representar dicha función.

b) Repita el procedimiento anterior para la función XOR. ¿Es posible la representación de dicha función usando una sola neurona de McCulloch-Pitts? En caso negativo, diseñe una red de neuronas de McCulloch-Pitts capaz de ejecutar dicha función.

c) ¿Qué sucedería si alguna de las conexiones sinápticas de la red se rompe? ¿Son las redes de McCulloch-Pitts resistentes a daños locales? Discuta.

<u>Nota:</u> el siguiente predicado lógico codifica la función lógica "o-exclusivo" (XOR ($\forall$)):

$$\neg\ [(p \text{ AND } q) \text{ OR } [\neg\ (p \text{ OR } q)]]$$

El símbolo $\neg$ denota la función 'NOT' que corresponde a la siguiente tabla de verdad:

p	¬p
0	1
1	0

Parte 2: Memorias asociativas

Las memorias distribuidas matriciales constituyen una forma de almacenar información donde ésta se encuentra distribuida entre todas las unidades de procesamiento (neuronas) que componen la red asociativa (figura 3). Recordemos que en este tipo de modelos, la actividad de un grupo de neuronas (o 'patrón') es representada como un vector columna. Asimismo, una matriz "memoria" define el conjunto de pesos sinápticos p_{ij} de las unidades de la capa asociativa. Cada entrada de la matriz memoria representa el valor del j-ésimo peso sináptico de la i-ésima unidad de procesamiento (neurona).

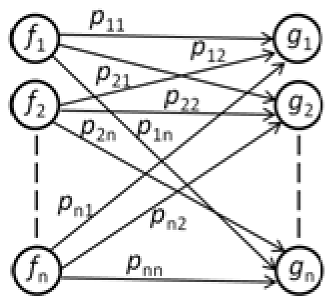


Figura 3

Si queremos asociar un determinado vector de entrada $f_a = (f_1,\ldots,f_n)$ con su correspondiente vector de salida $g_a = (g_1,\ldots,g_n)$, entonces la matriz que representa la memoria asociativa correspondiente es:

$$A_a = g_a\, f_a^T = \begin{pmatrix} g_1 f_1 & \cdots & g_1 f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n f_1 & \cdots & g_n f_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Por su parte, si queremos asociar un conjunto de k patrones de entrada $\{f_k\}$ con un conjunto de k patrones de salida $\{g_k\}$, y los vectores que definen los k patrones de entrada son ortogonales entre sí, entonces la matriz que representa la memoria asociativa correspondiente es:

$$A = A_a + \ldots\ldots\ldots + A_k = \sum_k g_k\, f_k^T \qquad (4)$$

Esta matriz se obtiene sumando los términos de asociación $g_k f_k^T$ correspondientes a las k asociaciones entre patrones de entrada y salida.

Entonces, al presentar el vector $f_i \in \{f_k\}$ a la red, la salida será:

$$Af_i \;=\; \sum_k g_k\, f_k^{\mathrm{T}} f_i = \;\sum_k g_k < f_k^{\mathrm{T}}, f_i > = \alpha g_i \qquad (5)$$

donde α es un valor escalar. En caso que el vector f_i sea un vector unitario, entonces α = 1 y la salida obtenida es el vector g_i.

Esta memoria está distribuida en las *n* neuronas (o unidades de procesamiento) que componen la capa asociativa. Esta característica le confiere a la red resistencia al daño local, que puede ser representado como destrucción de unidades de procesamiento o de pesos sinápticos.

- **Actividad 2.1**

La memoria matricial A_1 representa la asociación del vector de entrada

f_1 = [1/2, 1/2, 1/2, 1/2] con el vector de salida g_1 = [- 4, 7, 2, 0], y está definida como:

$$g_1 . f_1^{T} = \begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -4 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 7 & 7/2 & 7/2 & 7/2 & 7/2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 7/2 & 7/2 & 7/2 & 7/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>NOTA</u>: Todos los vectores utilizados son vectores columna (en el texto se escriben como vectores fila por comodidad.

Por otra parte, la memoria matricial A_2, que representa la asociación del vector de entrada

f_2 = [1/2,-1/2, 1/2, -1/2] con el vector de salida g_2 = [5, 1/2, 0, 3], está definida como:

$$g_2 . f_2^{T} = \begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 5 & 5/2 & -5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3/2 & -3/2 & 3/2 & -3/2 \end{array} = A_2 = \begin{pmatrix} 5/2 & -5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

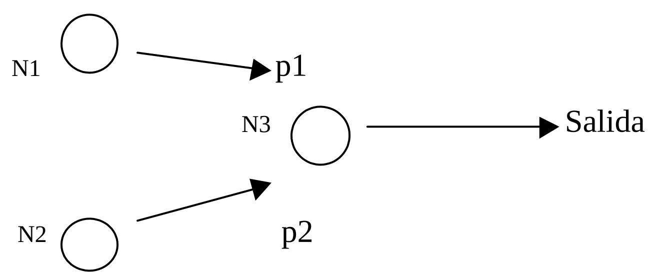
Si por otra parte los pares de vectores: f_3 = [1/2 1/2 -1/2 -1/2] y g_3 = [1/3, 2, 2 , 2] ; f_4 = [-1/2 1/2 1/2 -1/2] y g_4 = [0, 0, -1 , -1] se asocian de forma análoga, dando lugar a las memorias matriciales A_3 y A_4, entonces:

a) describa la matriz asociativa 'A' que representa las cuatro asociaciones en una red neuronal, donde la capa asociativa está formada por 4 neuronas.

b) Ponga a prueba la matriz A calculada previamente, recuperando algunos de los vectores salida g_i a partir de su correspondiente entrada f_i.

EJERCICIOS

Ejercicio 1- Considere el siguiente circuito neuronal:



donde N1, N2 y N3 son neuronas McCulloch-Pitts y están conectadas como muestra el diagrama. El valor de actividad de cada una de ellas es 0 (inactiva) o 1 (activa).

a) Encuentre un conjunto de valores reales para p1, p2 y θ (= umbral de N3), que hagan posible que N3 sólo se encuentre activa en caso que ambas, N1 y N2, se encuentren inactivas.

b) Realice la tabla de verdad correspondiente a la función que acaba de representar.

Ejercicio 2- Diseñe circuitos de neuronas McCulloch-Pitts capaces de representar los siguientes predicados lógicos:

(especifique en cada caso los valores reales de pesos sinápticos y umbrales correspondientes)

a) [(p AND q)]OR[q]

b) ¬ [p XOR q]

c) [p OR q] AND [¬(p OR q)]

Ejercicio 3 – 1 - Dados los vectores $f = (2, 4)$ y $g = (n, 1)$:

a) Calcular el valor del parámetro n con el cual los vectores f y g serán ortogonales.

b) Obtenga la matriz asociativa que representa la asociación entre el vector de entrada f y el vector de salida g.

2 – Repita la parte 1, pero considerando los vectores $f = (2, 4, 1)$ y $g = (n, 1, -8)$.

Ejercicio 4 – Describa las principales diferencias cualitativas entre una memoria asociativa matricial y un circuito de neuronas de McCulloch-Pitts.

ANEXO: ejemplos de operaciones matriciales básicas

- <u>Norma de un vector:</u>

$\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_n)$

$\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2}$

$\vec{f} = (6, 2, 3)$

$\|f\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$

- <u>Matriz transpuesta:</u>

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 \\ A_2 & A_5 \\ A_3 & A_6 \end{bmatrix}_{3x2} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}_{3x2} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{2x3}$$

- <u>Producto escalar:</u>

$\vec{u} = (u_1, u_2)$; $\vec{f} = (f_1, f_2) \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{f} = (u_1.f_1 + u_2.f_2)$

$\vec{u} = (3, 0)$; $\vec{f} = (5, 5) \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{f} = (3.5 + 5.0) = 15$

- <u>Producto entre una matriz y un vector:</u>

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$(f_1 g_1) + (f_2 g_2) + (f_3 g_3) = X$

$(f_4 g_1) + (f_5 g_2) + (f_6 g_3) = Y$

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -6 \\ 7 & 10 & -1 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} -22 \\ -67 \end{bmatrix}$$

(-3)(-6) + (5)(-2) + (-6)(5) = -22

(7)(-6) + (10)(-2) + (-1)(5) = -67

- <u>Producto entre un vector fila y un vector columna:</u>

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix}_{1X3}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}_{3x1} \quad \begin{bmatrix} f_1 g_1 & f_1 g_2 & f_1 g_3 \\ f_2 g_1 & f_2 g_2 & f_2 g_3 \\ f_3 g_1 & f_3 g_2 & f_3 g_3 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{1X3}$$

$$f = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3x1} \quad \begin{bmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 18 \\ 4 & 16 & 24 \end{bmatrix}_{3x3}$$

- <u>Suma de matrices:</u>

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix}_{3x3} ; \mathrm{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$\mathrm{M} + \mathrm{A} = \begin{bmatrix} (M_1 + A_1) & (M_2 + A_2) & (M_3 + A_3) \\ (M_4 + A_4) & (M_5 + A_5) & (M_6 + A_6) \\ (M_7 + A_7) & (M_8 + A_8) & (M_9 + A_9) \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$\mathrm{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 3 \\ -9 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3x3} ; \mathrm{M}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -1 & -7 & 2 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 7 & 3 & 5 \\ -5 & 3 & 12 \end{bmatrix}_{3x3}$$