

Fuerzas en relatividad especial

Experimentalmente se encuentra que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \neq m\vec{a}$ con $\vec{p} = m_0 \gamma(v) \vec{v}$. Esto implica que:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

$$\text{Y como } m(v) = \frac{E}{c^2} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d(K + m_0 c^2)}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dK}{dt}$$

$$\text{Pero, dado que } K = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

y llegamos a que:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{v}}{mc^2} \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

por lo que, en general, será que $\vec{a}$ y $\vec{F}$ no son paralelos!!

Hay 2 casos simples en que $\vec{a} \parallel \vec{F}$:

$$1) \text{ si } \vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \text{la partícula se mueve en línea recta} \\ \Rightarrow m\vec{a}_{\parallel} = \vec{F}_{\parallel} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\vec{F}_{\parallel}}{\gamma^2} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\parallel} = \gamma^3 m_0 \vec{a}_{\parallel}}$$

a veces se denomina $\gamma^3 m_0$ como masa longitudinal.

$$2) \text{ si } \vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{la partícula instantáneamente se mueve sobre un arco de circunferencia.}$$

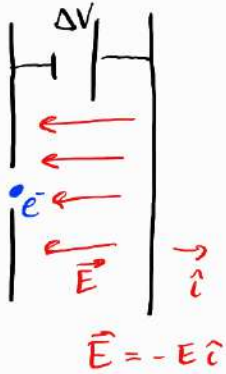
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\perp} = \gamma m_0 \vec{a}_{\perp}}$$

a veces se denomina γm_0 como masa transversal.

Ejemplo de fuerza de tipo 1

Consideremos nuevamente el primer ejemplo que discutimos en relación a las fallas de la mecánica Newtoniana: Un electrón acelerado por una diferencia de potencial ΔV .

¿Qué velocidad adquirirá el electrón e^- ?



Método 1: El trabajo de dicha fuerza

$$\text{es } W = \int -e \vec{E} \cdot d\vec{r} = e(-) \vec{E} \cdot d\vec{r} = e \Delta V$$

Pero si partió del reposo es $W = K = m_0 c^2 (\gamma(v) - 1)$

$$\Rightarrow \gamma(v) = 1 + \frac{e \Delta V}{m_0 c^2} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{e \Delta V}{m_0 c^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{e \Delta V}{m_0 c^2}\right)^2}} = c \sqrt{\frac{e \Delta V (2m_0 c^2 + e \Delta V)}{m_0^2 c^4 + 2m_0 c^2 e \Delta V + e^2 \Delta V^2}}$$

si $e \Delta V \ll m_0 c^2$

$$\Rightarrow v \approx c \sqrt{\frac{2e \Delta V}{m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{2e \Delta V}{m_0}} \quad \left(\frac{m_0 v^2}{2} = e \Delta V\right)$$

si $e \Delta V \gg m_0 c^2$

$$\Rightarrow v \lesssim c$$

Método 2: $\vec{F}_{||} = m_0 \gamma^3 \vec{a}_{||}$

$$\vec{v} = v \hat{i}, \quad \vec{a}_{||} = \frac{dv}{dt} \hat{i}, \quad \vec{F}_{||} = -e \vec{E} = e E \hat{i}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{e E}{m_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{e E}{m_0}$$

$$-\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \int dx \frac{dv}{dt} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \int dx \frac{e E}{m_0} \quad \begin{matrix} x \rightarrow x(t) \\ dx = \frac{dx}{dt} dt \end{matrix} \Rightarrow \int v \frac{dv}{dt} \frac{dt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{e}{m_0} \int E dx = \frac{e \Delta V}{m_0}$$

$$\begin{matrix} \text{S} \\ t \sim v(t) \end{matrix} \Rightarrow \frac{e \Delta V}{m_0} = \int \frac{v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \Rightarrow \frac{e \Delta V}{m_0 c^2} = \int_0^v \frac{u du}{\left(1 - u^2\right)^{3/2}} = \left. \frac{1}{\left(1 - u^2\right)^{1/2}} \right|_0^{\frac{v}{c}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

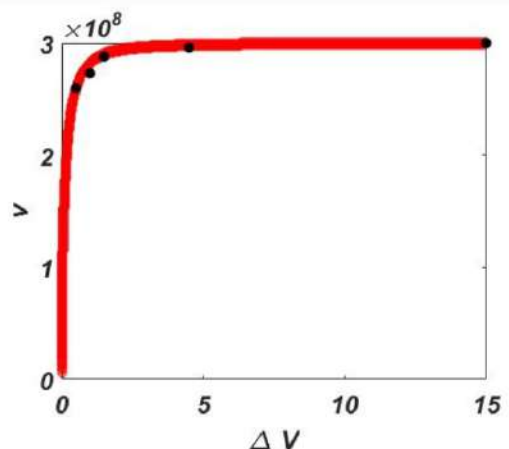
$$dv = \frac{dv}{dt} dt$$

Gráfico v vs ΔV

$$\Rightarrow 1 + \frac{e \Delta V}{m_0 c^2} = \gamma(v) \text{ y volvimos a } *$$

misma
tabla
de esa
Primer
clase

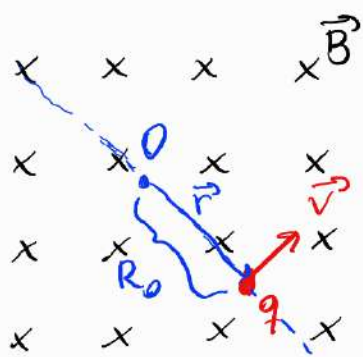
ΔV (MeV)	v (10^8 m/s)
0,5	2,6
1,0	2,73
1,5	2,88
4,5	2,96
15,0	3,0



Ejemplo de fuerza de tipo 2

otro ejemplo electromagnético:

Una carga q se mueve perpendicular a un campo magnético $\vec{B}$



Halle el radio del movimiento circular resultante.

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{F}_m = \vec{F}_c = m_0 \gamma \vec{a}_\perp$$

Elijo O / en $t=0$ $\dot{r}=0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$ en $t=0$.

Además tomo el origen O a una distancia R_0 a una distancia a fijar luego a lo largo de la recta azul del dibujo.

En estas condiciones es:

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= -B \hat{k} \\ \vec{r} &= \rho \hat{e}_\rho + z \hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{En general es: } \vec{F}_m = qB(\dot{\rho} \hat{e}_\phi - \rho \dot{\phi} \hat{e}_\rho)$$

$$\vec{a}_\perp = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{k}$$

$$\Rightarrow m_0 \gamma \ddot{z} = 0 \quad (\hat{k}) \rightarrow \dot{z} = \text{cte} = v_z$$

$$m_0 \gamma (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) = -qB \rho \dot{\phi} \quad (\hat{e}_\rho) \rightarrow \ddot{\rho} = \left(-\frac{qB}{m_0 \gamma} + \dot{\phi} \right) \rho \dot{\phi}$$

$$m_0 \gamma (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) = qB \dot{\rho} \quad (\hat{e}_\phi) \rightarrow \text{en } t=0 \text{ es } \ddot{\phi} = 0 \text{ por construcción}$$

$$\text{Si buscamos que en } t=0 \text{ sea } \ddot{\rho} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{qB}{m_0 \gamma}$$

lo cual hace que $\dot{\rho}$ se mantenga en 0 y en consecuencia $\ddot{\phi}$ también y luego $\dot{\rho}$ se mantendrá siempre nulo ya que $\dot{\phi} = \text{cte}$.

Sin embargo, para que todo esto tenga sentido debe ser:

$$\dot{\phi} R_0 = v_\phi = \frac{qB R_0}{m_0 \gamma(v)} \quad \text{poniendo } v_z=0 \text{ por simplicidad, } v_\phi=v \text{ y luego}$$

$$\boxed{R_0 = \frac{m_0 \gamma(v) v}{qB}}$$

II. 3.3 - Cuadrivectores

Si recordamos el primer postulado, éste nos decía que LAS LEYES DE LA FÍSICA SON LAS MISMAS EN TODOS LOS SISTEMAS INERCIALES. Es decir, las ecuaciones de la física deben ser COVARIANTES (no varían) ante un cambio de referencial (inercial). Esto es lo que sucedía con la 2^{da} ley de la mecánica Newtoniana:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Esta ecuación es covariante ante transformaciones de Galileo, como ya vimos. Además, es manifiestamente covariante respecto a las rotaciones ya que tenemos un vector a la izquierda y un escalar por un vector a la derecha! Esto está explícito en la notación utilizada ya que los vectores son aquellos que transforman al igual que el vector posición:

$$\underbrace{R \cdot \vec{F}}_{\vec{F}'} = \underbrace{R m \vec{a}}_{m \vec{a}'}$$

Queremos entonces una nueva notación vectorial que explicita la covarianza frente a las transformaciones de Lorentz.

Es decir, si escribimos una ecuación vectorial donde en componentes es:

$$F^\mu = \alpha W^\mu$$

↑
nuevos vectores:

↑ transforman como el vector posición
(ct, x, y, z) !!

Construyamos este formalismo:

La invarianza de Lorentz (recordemos $\Delta S^2 = \Delta \vec{r}^2 - c^2 \Delta t^2$) se expresa mejor en términos de los cuadrivectores o 4-vectores.

Estos son una herramienta práctica para describir la física en el espacio-tiempo y compactifican la conversión entre referenciales inerciales.

Si recordamos de la clase en que dedujimos las transformaciones de Lorentz, podemos relacionar las coordenadas (ct', x', y', z') con (ct, x, y, z) mediante la forma:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x \gamma & -\beta_y \gamma & -\beta_z \gamma \\ -\beta_x \gamma & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y \gamma & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z \gamma & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_z}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (I)$$

Esto lo podemos compactificar con dos vectores columna $\tilde{x}$ y $\tilde{x}'$ y una matriz Λ que se relacionan como:

$$\tilde{x}' = \Lambda \cdot \tilde{x}$$

donde $\tilde{x}'$ y $\tilde{x}$ tienen 4 componentes y por ello se denominan cuadvectores o 4-vectores.

Las componentes las contamos de 0 a 3 donde la componente 0 es la parte temporal y las restantes (de 1 a 3) son las espaciales:

$$\tilde{x}^0 \equiv ct, \quad \tilde{x}^1 \equiv x, \quad \tilde{x}^2 \equiv y, \quad \tilde{x}^3 \equiv z.$$

Es convención, escribir las componentes con letras griegas para significar que el índice recorre de 0 a 3, es decir que escribimos la componente μ como $\tilde{x}^\mu$ donde μ toma un valor entre 0 y 3. También es convención que si se utilizan índices latinos x^i esto refiere únicamente a los componentes 1, 2 y 3.

De esta forma (I) se puede escribir como:

$$\tilde{x}'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_{\nu} \tilde{x}^\nu$$

siendo Λ^μ_{ν} el elemento $\mu\nu$ de la matriz Λ que representa la transformación de Lorentz.

Sucede muy a menudo que los índices repetidos están sumados y por lo tanto se utiliza una convención conocida como **convención de Einstein**, que consiste en sumar los índices repetidos. De esta forma, en componente podemos escribir

$$\tilde{x}'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_{\nu} \tilde{x}^\nu \equiv \Lambda^\mu_{\nu} \tilde{x}^\nu$$

y de esta forma nos ahorramos escribir el símbolo de sumatorio. De ahora en más usaremos la convención de Einstein.

Decimos que $\tilde{x}^\mu$ es un 4-vector **CONTRAVARIANTE** y vive en un espacio vectorial de 4 dimensiones. Podemos definir otro tipo de vectores que llamamos 4-vectores **COVARIANTES** $\tilde{x}_\mu$ y que no viven en este mismo espacio sino en el espacio dual.

¿Por qué índices arriba y abajo?

Porque el índice arriba o abajo representa como transforma el objeto en cuestión ante una transformación de Lorentz. Los cuadvectores covariantes y contravariantes no transforman igual.

Existe una especie de noción de 'distancia' en este espacio

$$\Delta S^2 = (\Delta \tilde{x}^1)^2 + (\Delta \tilde{x}^2)^2 + (\Delta \tilde{x}^3)^2 - (\Delta \tilde{x}^0)^2$$

Las transformaciones de Lorentz las construimos dejando esta cantidad invariante! (recuerden de la deducción cuando impusimos la velocidad de la luz es la misma en todos los referenciales o cuando escribimos las curvas de calibración).

Otras transformaciones que mantienen esta distancia invariante son las rotaciones, las reflexiones y las traslaciones. Todas ellas junto a las transformaciones de Lorentz son lo que se denomina el **GRUPO DE POINCARÉ**.

Al igual que construimos los vectores en $\mathbb{R}^3$, definimos un **4-VECTOR CONTRAVARIANTE** A^μ como aquel que transforma igual que el 4-vector posición $\tilde{x}^\mu$

$$\tilde{x}^{0'} = \gamma (\tilde{x}^0 - \beta \tilde{x}^1)$$

$$\tilde{x}^{1'} = \gamma (\tilde{x}^1 - \beta \tilde{x}^0)$$

$$\tilde{x}^{2'} = \tilde{x}^2$$

$$\tilde{x}^{3'} = \tilde{x}^3$$

$$\tilde{A}^{0'} = \gamma (\tilde{A}^0 - \beta \tilde{A}^1)$$

$$\tilde{A}^{1'} = \gamma (\tilde{A}^1 - \beta \tilde{A}^0)$$

$$\tilde{A}^{2'} = \tilde{A}^2$$

$$\tilde{A}^{3'} = \tilde{A}^3$$

$$\left(\tilde{x}^{\mu'} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu'}}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{x}^\nu \right)$$

$$\left(\tilde{A}^{\mu'} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu'}}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{A}^\nu = \Lambda^{\mu'}_\nu \tilde{A}^\nu \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\mu'}}{\partial \tilde{x}^\nu} = \Lambda^{\mu'}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$