Práctico 9

Transformaciones lineales

1. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales.

   a) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \operatorname{tr}(A)$ (traza), para toda $A \in M_n(\mathbb{R})$.

   b) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ definida por $T\big(p(x)\big) = p(a)$, siendo $a \in \mathbb{R}$ fijo, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

   c) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\big(p(x)\big) = \big(p(a),\, p(b)\big)$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$ fijos, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

   d) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ definida por $T\big(p(x)\big) = p'(x)$ (derivada), para todo $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

   e) La *proyección ortogonal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = \Pi_w(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$ ($0 \neq w \in \mathbb{R}^3$ fijo).

2. Recordar que $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la multiplicación por $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

   a) Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Hallar $L_A(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Intrepretar geométricamente.

   b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Hallar $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $T = L_A$.

3. En cada uno de los casos siguientes, investigar si existe alguna transformación lineal T que verifique las condiciones dadas. En caso afirmativo hallarla y en caso negativo justificar la respuesta.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1, 0, 0) = (2, 1, 0),\ T(1, 1, 0) = (0, 0, 1),\ T(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$.

   b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1) = (1, 0),\ T(1 + x) = (1, 1),\ T(1 + x + x^2) = (0, 0),\ T(3 + 2x + x^2) = (2, 1)$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1, 0, 0) = (2, 1, 0),\ T(0, 1, 0) = (-1, 2, 3)$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$ tal que $T(1, 0, 1) = x + 2,\ T(0, 1, 0) = 2x + 1,\ T(1, 1, 1) = 5x + 4$.

4. Se consideran las transformaciones lineales $S_1, S_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

   $$S_1(x, y, z) = (z - x, x), \quad S_2(x, y, z) = (z - x, z - y), \quad T(x, y) = (y, x, x + y).$$

   Hallar $T \circ S_1$, $T \circ S_2$, $S_1 \circ T$ y $S_2 \circ T$.

5. Dar ejemplos de transformaciones lineales que verifiquen las siguientes condiciones.

   a) $S_1, S_2 : V \to W$ y $T : W \to U$, $T \neq 0$ y $S_1 \neq S_2$, pero $S_1 \circ T = S_2 \circ T$.

   b) $S : V \to W$ y $T : W \to V$, $S \circ T = \mathrm{Id}_W$, pero $T \circ S \neq \mathrm{Id}_V$.

6. Sea $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de centro en el origen y ángulo $\theta \in \mathbb{R}$. Notar que R_θ es una transformación lineal.

   a) Hallar $A \in M_2$ tal que $R_\theta = L_A$.

   b) Hallar $R_\theta(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) Hallar $R_\theta \circ R_\theta$. Geométricamente, ¿qué representa esta composición?

   d) Deducir fórmulas para $\cos(2\theta)$ y $\operatorname{sen}(2\theta)$.

7. Hallar el núcleo y la imagen de las siguientes transformaciones lineales.

   a) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\big(p(x)\big) = \big(p(1) + p(-1),\, p(0)\big)$, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$.

   b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \operatorname{tr}(A)$, para todo $A \in M_2(\mathbb{R})$.

   c) $\Pi_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (la proyección ortogonal sobre w), siendo $w \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo fijo.

8. Hallar una base del núcleo y una de la imagen para las siguientes transformaciones lineales.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + z,\ 2x + y + 2z,\ 3x + 3y + 3z)$.

   b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to M_2$ es la transformación lineal tal que $T(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $T(1{+}x) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $T\left(1 + x + x^2\right) = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 5 \\ 0 & -5 \end{smallmatrix}\right)$.

9. Sean $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

   $$T(x, y, z) = (x + 2y - z,\, x + 2y - z,\, -x - 2y + z), \quad S(x, y, z) = (x + y + 2z,\, y + z,\, x + z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Hallar $S \circ T$ y $T \circ S$.

   b) Calcular la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen de T, S, $S \circ T$ y $T \circ S$.

10. En los ejercicios 7 a 9 determinar si las transformaciones son inyectivas o sobreyectivas.

11. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (indicando por qué) o falsas (dando un contraejemplo).
    a) Si existe $A \subset V$ conjunto LI tal que $T(A)$ es LI, entonces T es inyectiva.
    b) Si para todo $A \subset V$ conjunto LI se cumple que tal que $T(A)$ es LI, entonces T es inyectiva.
    c) Si existe un generador $A \subset V$ tal que $T(A)$ es un generador de W, entonces T es sobreyectiva.
    d) Si existe una base $A \subset V$ tal que $T(A)$ es una base de W, entonces T es un isomorfismo.
12. Sea V el espacio de las sucesiones en $\mathbb{R}$. Definimos $T, S : V \to V$ mediante
$$T(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots), \quad S(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots), \quad \forall (a_0, a_1, a_2, \dots) \in V.$$
    Notar que $T, S : V \to V$ son transformaciones lineales. Probar
    a) La transformación T es sobreyectiva, pero no es inyectiva.
    b) La transformación S es inyectiva, pero no es sobreyectiva.
    c) Vale $T \circ S = \mathrm{Id}$, pero no vale $S \circ T = \mathrm{Id}$.
13. Una *proyección* en V es una transformación lineal $T : V \to V$ que verifica $T^2 = T$ (siendo $T^2 := T \circ T$).
    a) Sean V un espacio vectorial y U, W subespacios de V tales que $V = U \oplus W$.
    Consideramos la función $T : V \to V$ definida por $T(v) = w$, siendo $v = u + w, \; u \in U, \; w \in W$.
        1) Probar que T es una proyección.
        2) Probar que valen $\mathrm{Im}(T) = W$ y $\mathrm{Ker}\,(T) = U$.
    El operador T se llama la *proyección sobre W en la dirección de U*.
    b) Notar que como es $U \oplus W = W \oplus U$, entonces una descomposición $V = U \oplus W$ da lugar a dos proyecciones: una T_W sobre W en la dirección de U y otra T_U sobre U en la dirección de W. Probar que vale
$$T_U + T_W = \mathrm{Id}_V, \quad T_U \circ T_W = T_W \circ T_U = 0.$$
    c) Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es una proyección, entonces $V = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ y T es la proyección sobre $\mathrm{Im}(T)$ en la dirección de $\mathrm{Ker}\,(T)$. *Sugerencia*: escribir $v = v - T(v) + T(v)$.
14. *a*) Probar $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$, siendo $W_1 = \{(x, y, z) : \; x + y + z = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) : \; x = y = z\}$.
    b) Hallar explícitamente las proyecciones asociadas a esa descomposición.
15. Definimos $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mediante
$$T(x, y, z, t) = (2x - 2z, \, x + y - 2z, \, x - z, \, x - z), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$
    a) Probar que T es una proyección.
    b) Hallar $\mathrm{Ker}\,(T)$ y $\mathrm{Im}(T)$.
    c) Verificar que vale $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.
16. Sean $W_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \; A \text{ es simétrica}\}$ y $W_2 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \; A \text{ es antisimétrica}\}$. En el ejercicio 6 el práctico 8 se pedía probar que vale $M_n(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$. Hallar las proyecciones sobre W_1 en la dirección de W_2 y sobre W_2 en la dirección de W_1, asociadas a dicha descomposición.
17. Sean V_1 y V_2 dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Probar que el producto cartesiano $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial con las operaciones siguientes
$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_n), \quad a \cdot (v_1, v_2) := (a \cdot v_1, a \cdot v_2), \quad \forall (v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2, \; a \in \mathbb{k}.$$
    Al conjunto $V_1 \times V_2$ con esta estructura de espacio vectorial le llamaremos el *espacio producto* de V_1 y V_2.
18. Sean V_1 y V_2 dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales y $W = V_1 \times V_2$ su espacio producto. Consideremos los conjuntos $W_1 := \{(v_1, v_2) \in W : \; v_2 = 0\}$ y $W_2 := \{(v_1, v_2) \in W : \; v_1 = 0\}$. Probar:
    a) W_1 y W_2 son subespacios de W,
    b) $W = W_1 \oplus W_2$.
    c) Considerando a W_1 y W_2 como espacios vectoriales, es $W_1 \simeq V_1$ y $W_2 \simeq V_2$.
19. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de W tales que $V = W_1 \oplus W_2$. En particular W_1, W_2 son espacios vectoriales y podemos considerar el espacio producto $W_1 \times W_2$. Probar que la función $T : W_1 \times W_2 \to V$ definida por $T(w_1, w_2) = w_1 + w_2$, es un isomorfismo.

Nota. Los ejercicios 18 y 19 muestran que es esencialmente lo mismo tener un espacio producto que tener una descomposición de un espacio en suma directa de subespacios. Por esa razón al espacio producto también se le suele llama la *suma directa* de espacios y se escribe $V_1 \times V_2 = V_1 \oplus V_2$.