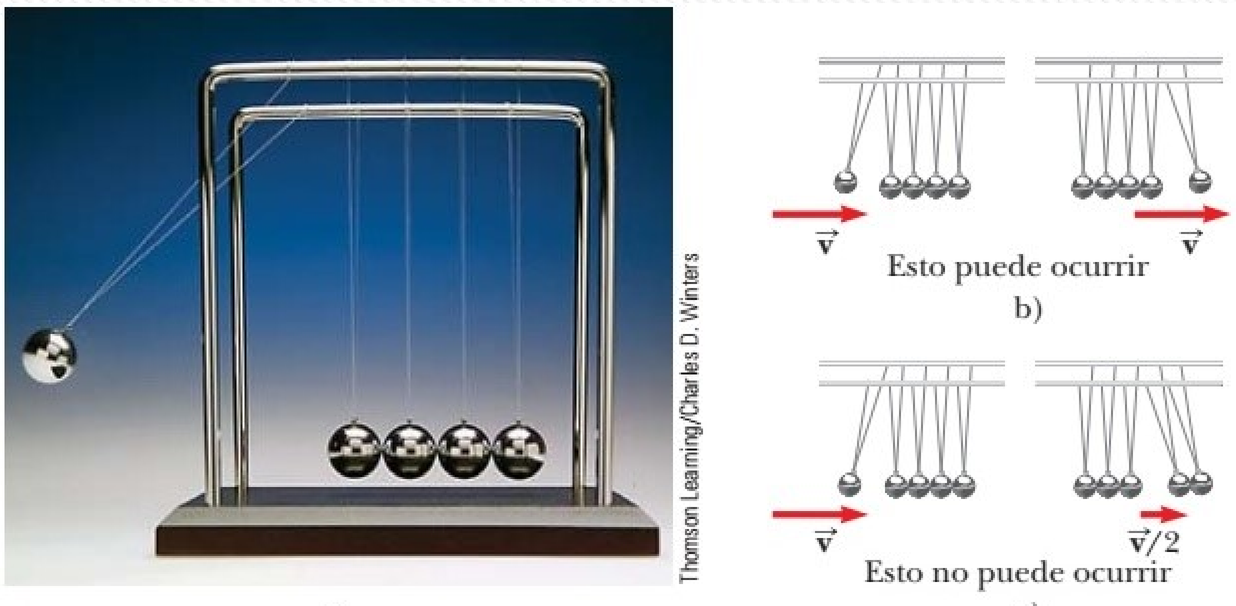
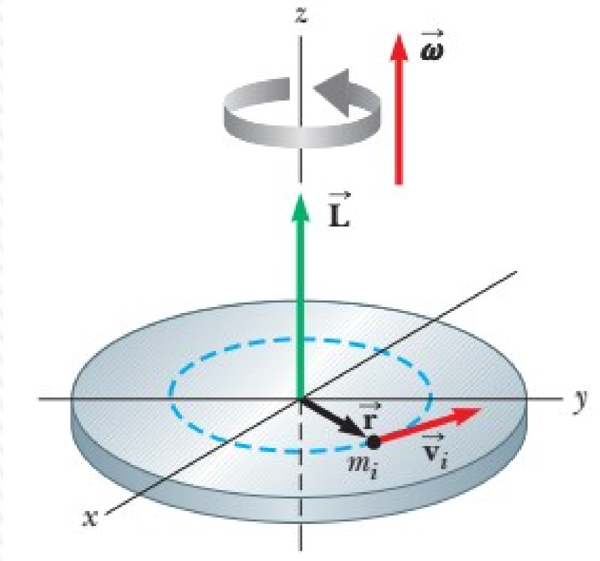
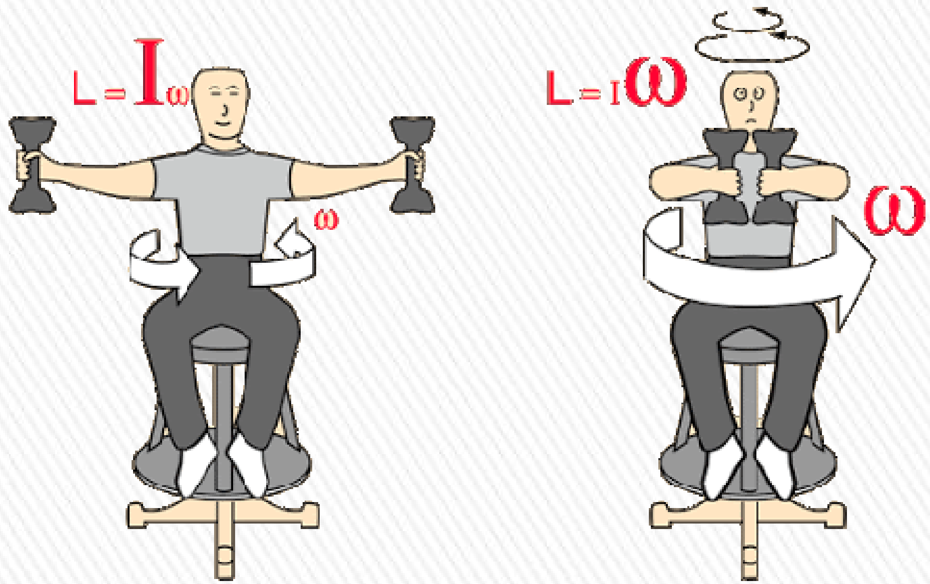
12- Momento angular ejemplos

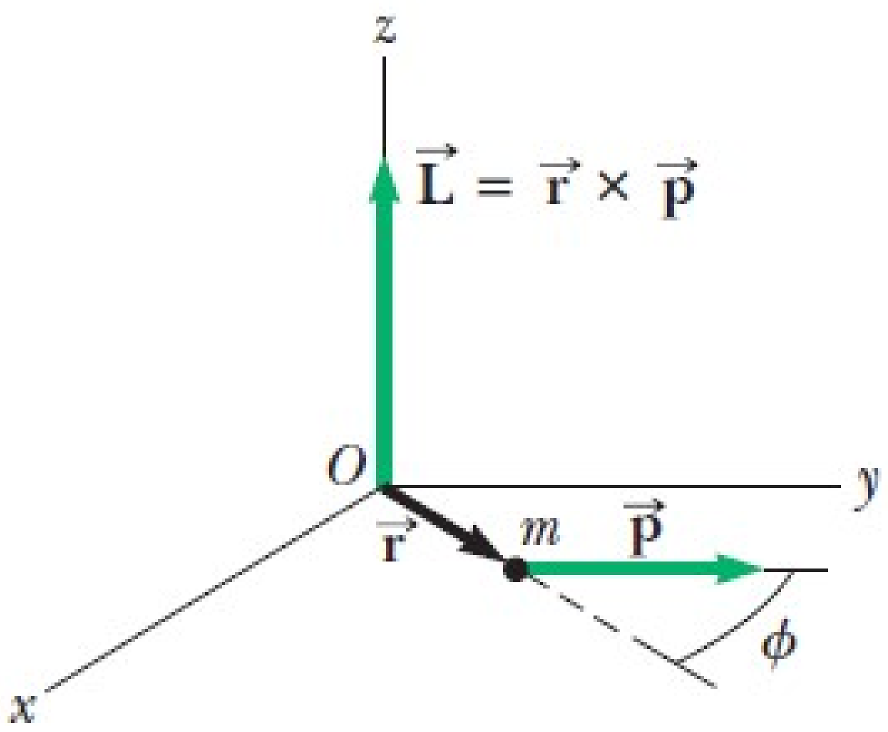


a)





MOMENTO ANGULAR



Momento* angular** de una partícula de masa constante *m, velocidad* **v** *momento lineal* ***p = *m***v** *y vector de posición **r** con respecto* al origen *O de un **marco inercia**l,*

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

El valor del momento angular depende del origen *O elegido, ya que en él interviene el vector de posición* de la partícula respecto al origen.
Unidades de L: kg.m^2/s.

Análogo del ***momento lineal de una partícula*** *en el movimiento de rotación* *es el* ***momento* angular**

$$L = mvr\sin\phi$$

MOMENTO ANGULAR

Vamos a demostrar que para una partícula la ***rapidez de cambio del momento angular es igual al torque de la fuerza neta.***

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

Derivamos con respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}\right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a})$$

El primer término del 2do. miembro es nulo (producto vectorial de un vector por sí mismo)

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{\tau}$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula (dL/dt) es igual al torque de la fuerza neta que actúa sobre ella.

MOMENTO ANGULAR PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

El torque resultante de un sistema de partículas es la suma de los torques individuales que actúan sobre el sistema.

Generalizando el resultado de una partícula para un sistema de partículas:

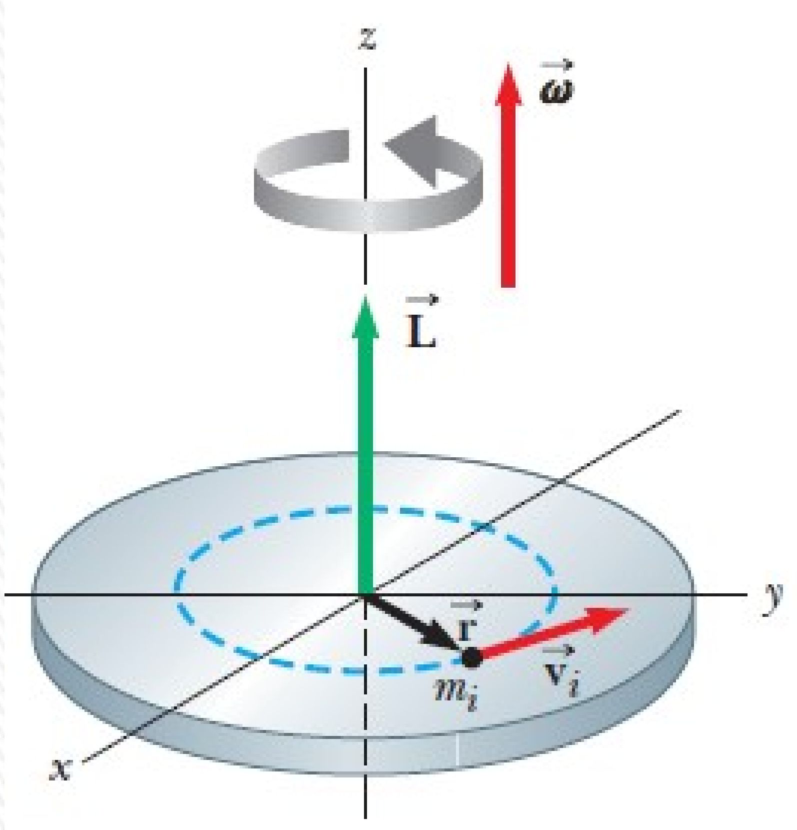
$$\sum_i \bar{\tau}_i = \sum_i \frac{d\bar{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \bar{L}_i = \frac{d\bar{L}_{sist}}{dt}$$

La sumatoria de los torques incluye la de las fuerzas internas y externas.

Por el **principio de acción y reacción**, las fuerzas internas son iguales y de sentido opuesto, y actúan sobre la misma línea, por lo que los brazos de palanca serán iguales, y por tanto estos **torque internos se cancelan entres sí.**

$$\bar{\tau}_{neto}^{ext.} = \frac{d\bar{L}_{sist}}{dt}$$

MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO



Objeto rígido girando en torno a un eje fijo que coincide con el eje z .

Cada *partícula del objeto da vueltas en el plano xy en torno* al eje z *con una rapidez angular ω. La magnitud del momento angular* de una partícula de masa m_i *en torno al eje z es* $m_i v_i r_i$. *Como* $v_i = r_i\omega$, *la* magnitud del *momento angular* de esta partícula se expresa como: $L_i = m_i r_i^2 \omega$

El vector $\boldsymbol{L}_i$ se dirige a lo largo del eje z, como el vector $\boldsymbol{\omega}$.

Podemos encontrar el módulo del momento angular (que en esta situación sólo tiene una componente z) de todo el objeto tomando la suma de L_i sobre todas las partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

$$L_z = I\omega$$

donde I es el momento de inercia *del objeto en torno al eje z*

En general, la expresión **L= Iω** no siempre es válida. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje *arbitrario,* ***L*** y **ω** pueden apuntar en diferentes direcciones. En este caso, el momento de inercia no se trata como un escalar. En un sentido estricto, **L=** ***I*****ω** sólo se aplica a objetos rígidos de cualquier forma que dan vueltas en torno a uno de tres ejes mutuamente perpendiculares (llamados *ejes principales)* a través del centro de masa.

MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

$L_z = I\omega$ derivando esta expresión respecto al tiempo, y teniendo en cuenta que para un rígido el momento de inercia *I* es constante:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

α es la aceleración angular relativa al eje de rotación.

Como dL_z / dt *es igual al* torque externo neto, esta ecuación resulta:

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha$$

El torque externo neto que actúa sobre un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia en torno al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto en relación con dicho eje.

Este resultado ya lo habíamos obtenido anteriormente, y representa el equivalente rotacional de la 2da. Ley de Newton.
Esta ecuación también es válida para un objeto rígido giratorio en torno a un eje móvil siempre que el eje en movimiento :
1) pase a través del centro de masa y 2) sea un eje de simetría.

Si un objeto simétrico da vueltas en torno a un eje fijo que pasa a través de su centro de masa, se puede escribir la ecuación vectorial **L** = I$\boldsymbol{\omega}$, siendo **L** el momento angular total del objeto medida respecto al eje de rotación.

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Vimos antes que el momento lineal total de un sistema de partículas permanece constante si el sistema está aislado; es decir, si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero.
Se tiene una ley de conservación análoga en el movimiento rotacional.

La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado (Principio de conservación del momento angular).

Este principio es consecuencia directa de lo siguiente:

$$\sum \bar{\tau}_{ext} = \frac{d\bar{L}_{sistema}}{dt} = 0$$

Por lo tanto:

$$\bar{L}_{sistema} = constante$$

$$\bar{L}_{inicial} = \bar{L}_{final}$$

Si un sistema giratorio aislado es deformable (su masa se redistribuye en alguna forma) el momento de inercia del sistema cambia.
Como la magnitud del momento angular del sistema es $L = I\omega$, *la conservación* de la cantidad de movimiento angular requiere que el producto de I *y* ω *permanezca* constante.

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Por lo tanto, un cambio en *I para un sistema aislado requiere un cambio en ω.*

En este caso, el principio de conservación de cantidad de movimiento angular se expresa como: $$I_i\omega_i = I_f\omega_f = constante$$

Este principio se aplica tanto a objetos macroscópicos (planetas, personas) como a átomos y moléculas.

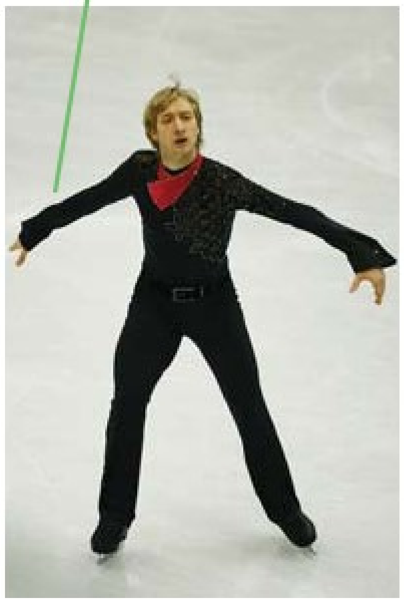
a) El patinador pone brazos y piernas cerca de su cuerpo, reduciendo la distancia al eje de rotación y, por lo tanto, también su momento de inercia. Al conservarse L una reducción de su I debe aumentar su velocidad angular ω.

b) Saliendo del giro necesita reducir su velocidad angular, por lo que extiende sus brazos y las piernas otra vez, aumentando su momento de inercia, y de ese modo retardar su rotación.

Juntando los brazos y las piernas, reduce su momento de inercia y aumenta su rapidez angular (índice de giro).

Clive Rose/Getty Images

Al aterrizar extendiendo los brazos y las piernas aumenta su momento de inercia para frenar el giro.



Al Bello/Getty Images

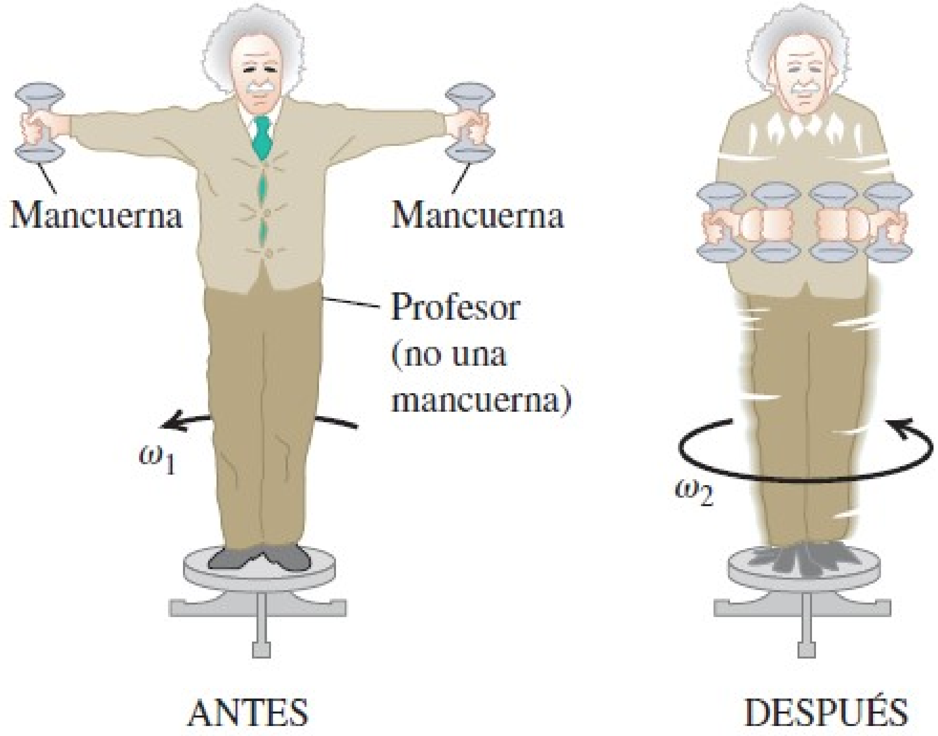
EJEMPLO: CUALQUIERA PUEDE BAILAR BALLET

Un ágil profesor de física se pone de pie en el centro de una mesita giratoria y sin fricción con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5,0 kg en cada mano. Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2,0 s.

Calcule la velocidad angular final del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen.

Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3,0 kgm^2 con los brazos extendidos, y baja a 2,2 $kg\, m^2$ si coloca las manos en el abdomen.

Las mancuernas están a 1,0 m del eje al principio y a 0,20 m al final.



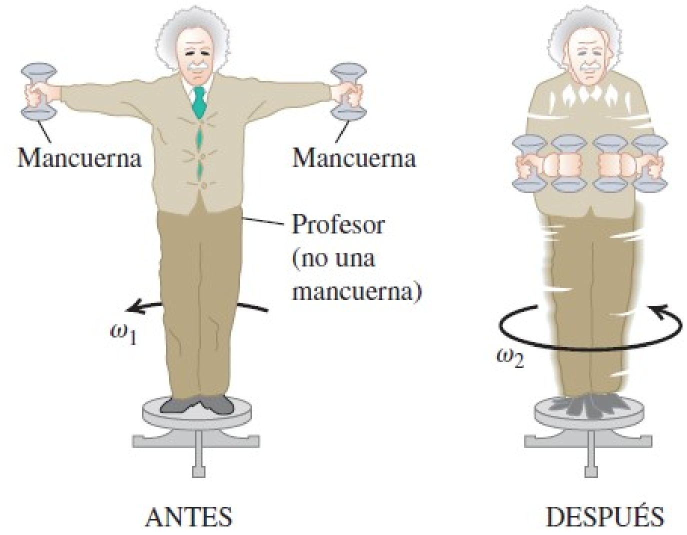
Con estas hipótesis se conserva el momento angular y podemos escribirlo como: $L = I\omega$

Modelamos al sistema profesor + mancuernas + mesa como uno sobre el que no se le aplican torques externos.
Además supondremos que el eje de rotación es eje de simetría.

Datos: ω_1= 0,50 rev/s; I_{P1}= 3,0 kgm^2 ; I_{P2}= 2,2 kgm^2 m= 5,0 kg; r_1=1,0 m; r_2=0,20 m

EJEMPLO: CUALQUIERA PUEDE BAILAR BALLET

Un ágil profesor de física se pone de pie en el centro de una mesita giratoria y sin fricción con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5,0 kg en cada mano. Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2,0 s.
Calcule la velocidad angular final del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen.
Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3,0 kgm^2 con los brazos extendidos, y baja a 2,2 kg m^2 si coloca las manos en el abdomen.
Las mancuernas están a 1,0 m del eje al principio y a 0,20 m al final.



Voy a considerar que las mancuernas se comportan como masas puntuales.

Datos: ω_1= 0,50 rev/s; I_{P1}= 3,0 kgm^2 ; I_{P2}= 2,2 kgm^2 m= 5,0 kg; r_1=1,0 m; r_2=0,20 m

Como se conserva el momento angular del sistema: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$I_1 = I_{P1} + 2mr_1^2 = 3{,}0 + 2(5{,}0)(1{,}0)^2 = 13\,kg.m^2$$

$$I_2 = I_{P2} + 2mr_2^2 = 2{,}2 + 2(5{,}0)(0{,}20)^2 = 2{,}6\,kg.m^2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{13}{2{,}6}\omega_1 = 5\omega_1$$

ω_2 =5 ω_1 = 2,5 rev/s

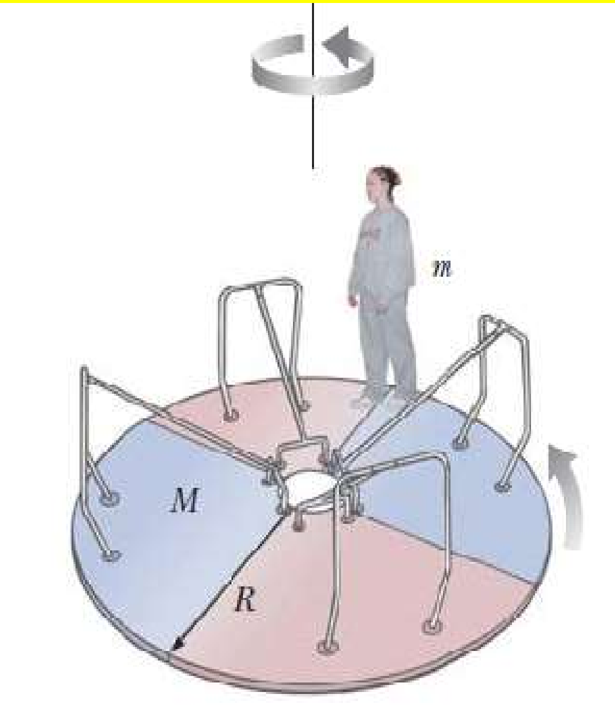
Pero ¿qué pasó con la energía cinética de rotación?

EJEMPLO: ejercicio 6.12

El carrusel - Una plataforma horizontal con la forma de un disco da vueltas libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción. La plataforma tiene una masa *M* =100 kg y un radio *R* = 2,00 m. Una estudiante, cuya masa es *m* = 60,0 kg, camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2,00 rad/s cuando el estudiante está en el borde:

a) ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto *r* = 0,500 m desde el centro?

b) ¿la energía cinética varía? Explique.



Como no hay ningún torque externo que actúe sobre el sistema plataforma + estudiante, el momento angular se va a conservar y por tanto: Iω = cte.

Voy a tratar a la estudiante como una partícula, por lo que el momento de inercia del sistema será:

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Siendo r, la posición de la estudiante.

Entonces se cumplirá que:

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_F$$

EJEMPLO: ejercicio 6.12

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_F$$

$$\omega_F = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\omega_0 = \frac{\frac{1}{2}(100)(2{,}00)^2 + (60{,}0)(2{,}00)^2}{\frac{1}{2}(100)(2{,}00)^2 + (60{,}0)(0{,}500)^2}(2{,}00) = \frac{440\ kg.m^2}{215\ kg.m^2}(2{,}00) = \textbf{4,1 rad/s}$$

Vamos a calcular la energía cinética (de rotación) inicial y final:

$$K_I = \frac{1}{2}I_{OI}\omega_I^2 = \frac{1}{2}(440)(2{,}00)^2 = 880\ \text{J}$$

$$K_F = \frac{1}{2}I_{OF}\omega_F^2 = \frac{1}{2}(215)(4{,}10)^2 == 1{,}81\times10^3\ \text{J}$$

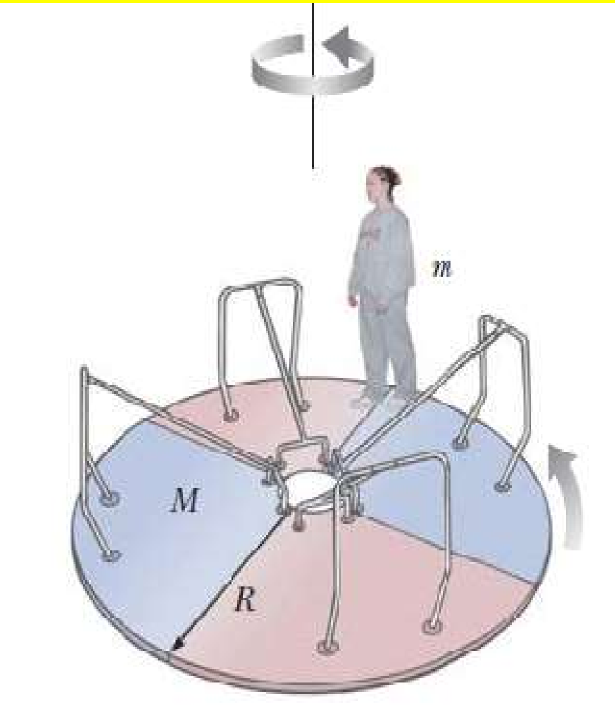
La energía aumenta.
Esto se debe a que la estudiante debe realizar trabajo para moverse ella misma hacia el centro de rotación, por tanto ese aumento de energía proviene de la energía interna del cuerpo de la estudiante.

EJEMPLO: ejercicio 6.12

El carrusel - Una plataforma horizontal con la forma de un disco da vueltas libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción. La plataforma tiene una masa *M* =100 kg y un radio *R* = 2,00 m. Una estudiante, cuya masa es *m* = 60,0 kg, camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2,00 rad/s cuando el estudiante está en el borde:

a) ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto *r* = 0,500 m desde el centro?

b) ¿la energía cinética varía? Explique.



Como no hay ningún torque externo que actúe sobre el sistema plataforma + estudiante, el momento angular se va a conservar y por tanto: Iω = cte.

Voy a tratar a la estudiante como una partícula, por lo que el momento de inercia del sistema será:

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Siendo r, la posición de la estudiante.

Entonces se cumplirá que:

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_F$$

EJEMPLO: ejercicio 6.12

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_F$$

$$\omega_F = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\omega_0 = \frac{\frac{1}{2}(100)(2{,}00)^2 + (60{,}0)(2{,}00)^2}{\frac{1}{2}(100)(2{,}00)^2 + (60{,}0)(0{,}500)^2}(2{,}00) = \frac{440\ kg.m^2}{215\ kg.m^2}(2{,}00) = \mathbf{4{,}1\ rad/s}$$

Vamos a calcular la energía cinética (de rotación) inicial y final:

$$K_I = \frac{1}{2}I_{OI}\omega_I^2 = \frac{1}{2}(440)(2{,}00)^2 = 880\ \mathrm{J}$$

$$K_F = \frac{1}{2}I_{OF}\omega_F^2 = \frac{1}{2}(215)(4{,}10)^2 = = 1{,}81\times10^3\ \mathrm{J}$$

La energía aumenta.
Esto se debe a que la estudiante debe realizar trabajo para moverse ella misma hacia el centro de rotación, por tanto ese aumento de energía proviene de la energía interna del cuerpo de la estudiante.

EJEMPLO: ejercicio 6.14

Un bloque pequeño de 0,0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a una cuerda de masa despreciable que pasa por un orificio en la superficie como se muestra en la figura. El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0,300 m del orificio, con rapidez angular de 2,85 rad/s. Ahora se tira de la cuerda desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0,150 m.

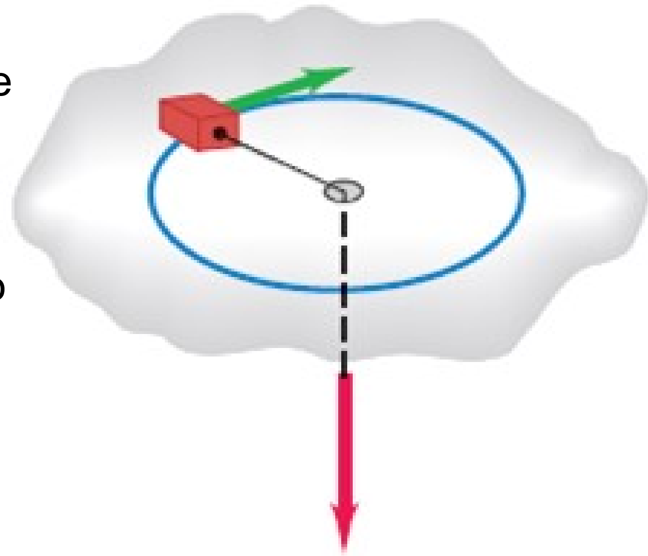
El bloque puede tratarse como partícula.

a) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué?

b) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular?

c) Calcule el cambio de energía cinética del bloque.

d) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar de la cuerda?



a) Sí, el momento angular del bloque se conserva, ya que no hay ningún torque neto que actúe sobre el eje de rotación (el peso y la normal se cancelan entre sí, y la tensión de la cuerda tiene brazo de palanca nulo respecto al eje de giro.

$$L = m v_0 r_0 = m v_F r_F \qquad L = m r_0^2 \omega_0 = m r_F^2 \omega_F$$

$$\omega_F = \frac{m r_0^2 \omega_0}{m r_F^2} = \frac{r_0^2}{r_F^2}\,\omega_0 = \frac{(0{,}300)^2}{(0{,}150)^2}\,(2{,}85) = 11{,}4\ rad/s$$

ω_F **= 11,4 rad/s**

$$\Delta K = K_F - K_0 = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m}{2}(v_F^2 - v_0^2) =$$

$$\Delta K = \frac{m}{2}(r_F^2\omega_F^2 - r_0^2\omega_0^2) = \frac{0{,}0250}{2}(0{,}150^2 \times 11{,}4^2 - 0{,}300^2 \times 2{,}85^2) = 0{,}0274\,J$$

ΔK **= 27,4 mJ**

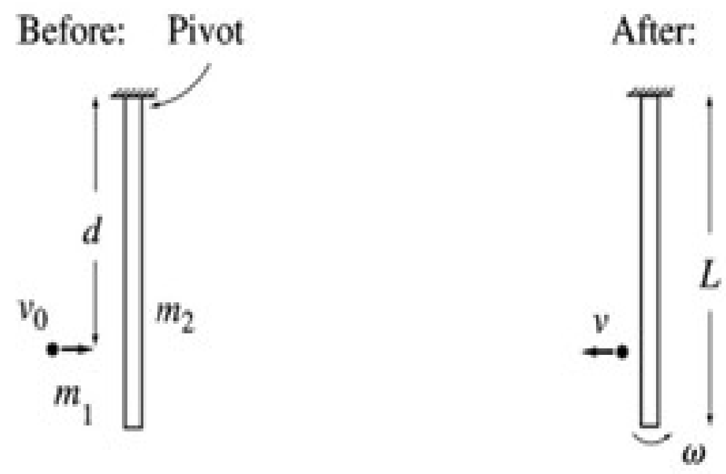
d) Por el teorema trabajo-energía: W = ΔK = 27,4 mJ

EJEMPLO: ejercicio 6.15

Una barra metálica delgada y uniforme, de 2,00 m de longitud y con un peso de 90,0 N, cuelga verticalmente del techo en un pivote sin fricción colocado en el extremo superior. De repente, una pelota de 3,00 kg, que viaja inicialmente a 10,0 m/s en dirección horizontal, golpea la barra 1,50 m abajo del techo. La pelota rebota en dirección opuesta con rapidez de 6,00 m/s.

a) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque.

b) Durante el choque, ¿por qué se conserva el momento angular, pero no el momento lineal?



En esta situación se conserva el momento angular, ya que no hay ningún torque externo respecto al pivote realizado sobre el sistema barra-pelota. En cambio el momento lineal, no se va a conservar, ya que el pivote ejerce una fuerza externa sobre la barra, que le impide que se desplace, solamente puede girar.

El momento de inercia de una barra respecto a uno de sus extremos vale: $I_P = \frac{1}{3} M L^2$

Conservación del momento angular: $m v_0 d = -m v d + \frac{1}{3} M L^2 \omega$

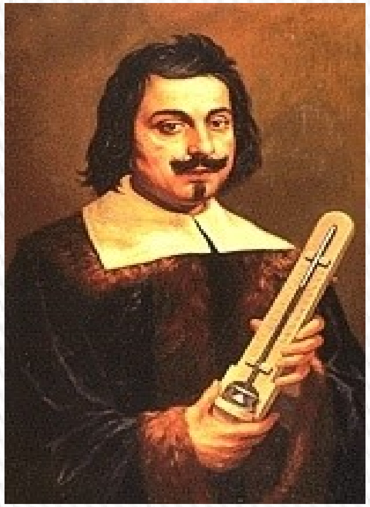
$$\omega = \frac{3m(v_0+v)d}{ML^2} = \frac{3(3{,}00)(10{,}0+6{,}00)(1{,}50)}{\frac{90{,}0}{9{,}8}(2{,}00)^2} = 5{,}88 \text{ rad/s}$$

5,88 rad/s

12- FLUIDOS - Hidrostática

Arquímedes
-288 Siracusa,
-212 muerto por un soldado romano en el sitios a Siracusa.
"Eureka, eureka! "

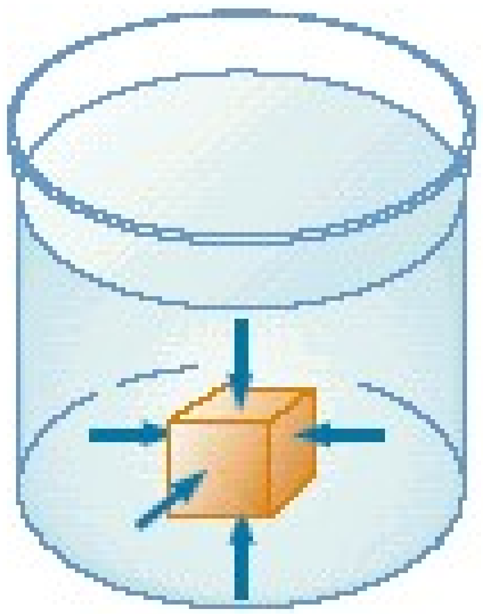
Blaise Pascal
19/6/1623, Francia.
Muere en 1662.
Matemático, físico, filósofo y teólogo.
Inventó una máquina para sumar, la prensa hidráulica y la jeringa.



Evangelista Torricelli
15/10/1608, Florencia. .
Muere en 1662.
Físico y matemático.
Inventó el barómetro.

Daniel Bernoulli
8/2/1700, Basilea.
Muere en 1782.
Físico , médico y matemático.

FLUIDO



Medio constituido por conjunto de moléculas distribuidas al azar unidas por fuerzas cohesivas débiles y por fuerzas ejercidas por las paredes del recipiente.

Un sólido soporta esfuerzos cortantes (se le puede aplicar fuerzas que formen un ángulo arbitrario)

Un fluido (perfecto) es incapaz de soportar esfuerzos cortantes y sólo puede soportar esfuerzos normales a su superficie.

Por tanto la fuerza que ejerce el fluido sobre un objeto sumergido es siempre perpendicular a las superficies de éste.

Un fluido consta de un número muy grande de partículas, por tanto conceptos de **fuerza** y **masa** no son manejables.
Se sustituyen por los de **presión** y **densidad**, respectivamente.

DENSIDAD

Masa por unidad de volumen.

Un **material homogéneo** tiene la misma densidad en todas partes.
Usamos ρ (la letra griega rho) para denotar la densidad.
Si la masa *m de material homogéneo tiene el volumen V, la densidad* ρ *es*

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La unidad del SI de la densidad es el kilogramo por metro cúbico (kg/m^3).

Densidad relativa: razón entre su densidad y densidad del agua a 4,0°C, 1000 kg/m^3; (adimensionado).

Densidad relativa del aluminio: 2,7.

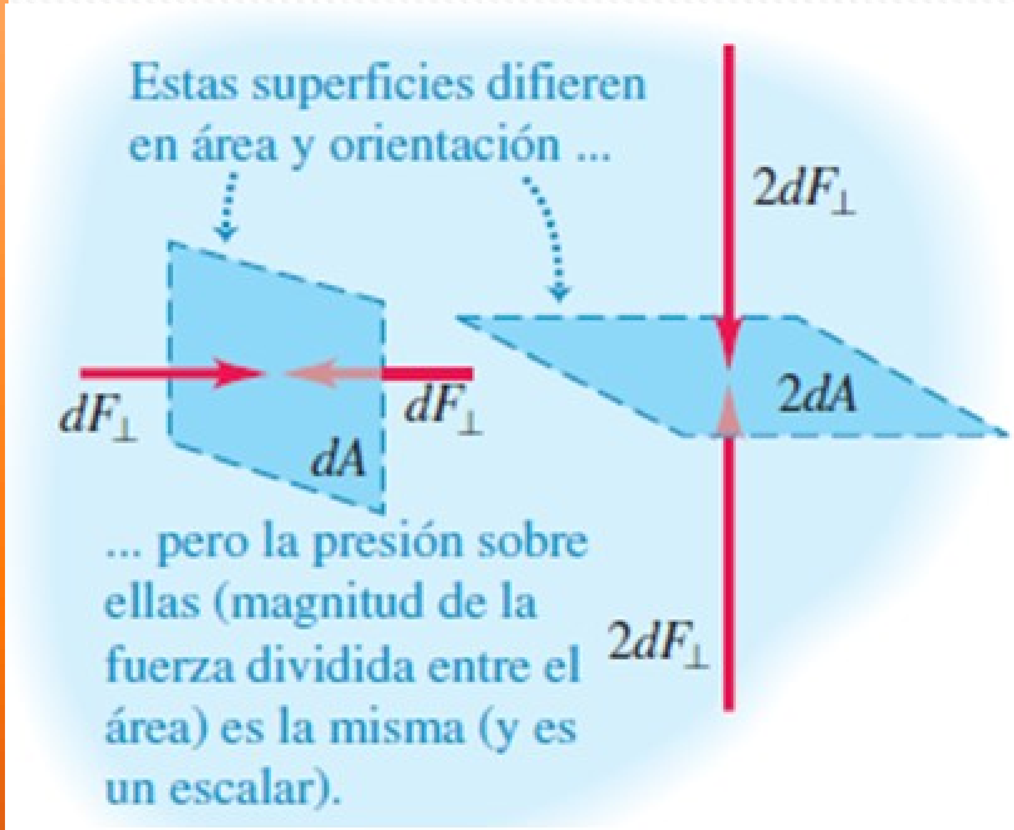
Material más denso de la Tierra : metal **osmio** (ρ = 22,500 kg/m^3),

La densidad de algunos materiales varía de un punto a otro dentro del material.

Para estos materiales, se define una **densidad media**.

La densidad de un material depende de factores ambientales tales como la temperatura y la presión.

PRESIÓN EN UN FLUIDO



Fluido en reposo, ejerce fuerza perpendicular a cualquier superficie en contacto con éste (pared de un recipiente o un cuerpo sumergido).

Sea una superficie pequeña de área *dA centrada en un punto en el fluido; la fuerza normal que el fluido ejerce sobre cada* lado es $dF_\perp$.

***Presión p en ese punto es la fuerza normal* por unidad de área.**

$$p = \lim_{\delta A \to 0} \frac{F_\perp}{\delta A} = \frac{dF_\perp}{dA}$$

Si la presión es la misma en todos los puntos de una superficie plana finita de área *A*, entonces

$$p = \frac{F_\perp}{A}$$

Unidad de presión en el SI es el **pascal (Pa)** que equivale a $1 N/m^2$.

PRESIÓN EN UN FLUIDO

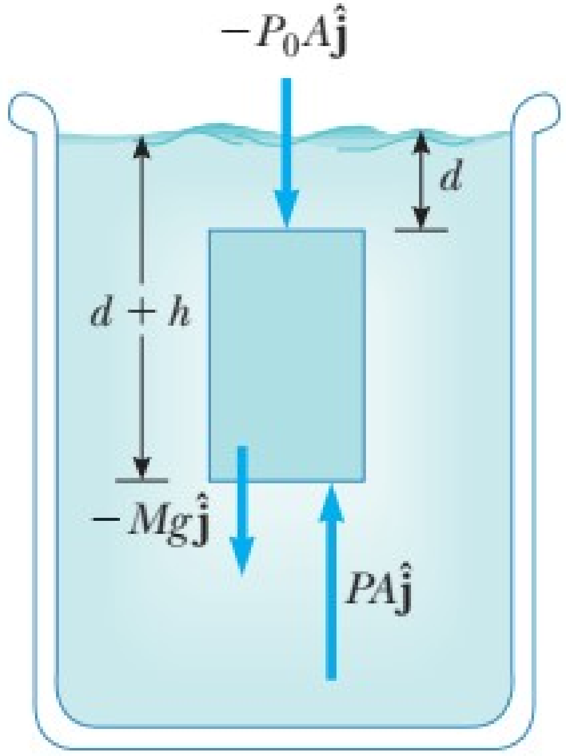
Presión atmosférica *p_a es la presión de la atmósfera terrestre*, *la presión en el* fondo de este mar de aire en que vivimos. Varía con el cambio de clima y con la altitud.

Presión atmosférica normal al nivel del mar (valor medio) es **1 atmósfera (atm): 1 atm =1,01325×10^5 Pa**= 14,7 psi (lib/pulg^2)

Otra unidad: presión ejercida por una columna vertical de mercurio de 760 mm a 0ºC en una región donde *g* vale el valor normalizado (*g* = 9,80665 m/s^2) que equivale a 1 atm.
En esas condiciones la presión ejercida por un columna de mercurio de 1 mm de altura se dice que vale 1 torr. 1atm = 760 torr

Si consideramos el peso del fluido *no despreciable, la presión en un fluido no es la misma en todo su volumen.*

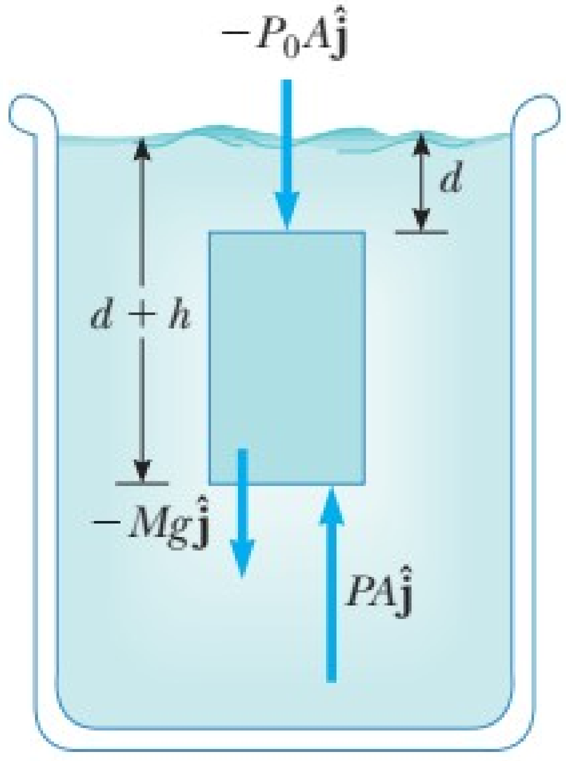
VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD



Suponemos uniformes: la densidad ρ y *g.*
Si el fluido está en equilibrio, cada elemento de volumen está en equilibrio.
Considero una muestra del líquido contenido en un cilindro imaginario de área A que se extiende desde la profundidad *d* a la profundidad *d +h.*
Presión que ejerce el líquido en cara inferior de la muestra es *P*, y en la cara superior es p_0.

El líquido externo a la muestra ejerce fuerzas en todos los puntos de la superficie de la muestra, perpendicular a la superficie.
Por lo tanto, la fuerza hacia arriba que ejerce el fluido exterior sobre el fondo del cilindro tiene una magnitud *pA*, y la fuerza descendente que se ejerce sobre la parte superior tiene magnitud p_0A.
El peso de líquido en el cilindro es $M\,g = \rho V\,g = \rho Ahg.$

VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD



Como el cilindro está en equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre él debe ser cero.
Planteo el equilibrio de las fuerzas verticales:

$p.A - p_0.A - Mg = 0$

$p.A - p_0.A - \rho Ahg = 0$

$\mathbf{p = p_0 + \rho hg}$

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

Válida para un fluido incompresible en equilibrio (en reposo) con densidad homogénea

La presión *p* a una profundidad *h* bajo un punto en el líquido donde la presión es p_0 es mayor por una cantidad ρgh.
Si el líquido se abre a la atmósfera y p_0 es la presión en la superficie del líquido, en tal caso p_0 es la presión atmosférica.