

Repartido 9: Planaridad y coloraciones

1. Probar que el grafo de Petersen no es plano (sugerencia: encontrar un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$).
2. Mostrar que si se elimina cualquier arista de K_5 , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?
3. Mostrar que la fórmula de Euler no vale si G no es conexo. Adaptar la fórmula al caso desconexo agregando como parámetro el número de componentes conexas. Demostrar la fórmula escrita en base a la fórmula de Euler para grafos conexos.
4. Un árbol es un grafo conexo sin ciclos (y por lo tanto sin lazos).
 - a) Una hoja de un árbol es un vértice de grado 1. Probar que todo árbol con dos vértices o más tiene al menos dos hojas.
 - b) Sea T un árbol con n vértices y e aristas. Probar, por inducción en v , que $e = n - 1$.
 - c) Probar, por inducción en la cantidad de vértices, que todo árbol es plano.
5. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G ?
6. Probar que un grafo plano tiene al menos un vértice de grado menor o igual a 5.
7.
 - a) Probar que un grafo planar con 11 vértices o menos tiene un vértice de grado menor o igual a 4.
 - b) Usar este resultado para probar que todo grafo con 11 vértices o menos tiene admite una 5-coloración.
 - c) Observar que la prueba del Teorema de los 5 colores se adapta a un Teorema de los 4 colores para grafos de 11 vértices o menos.
8. Tomar un mapa político de América del Sur.
 - a) Hallar su grafo asociado
 - b) Observar que es planar,

- c)* Observar que admite una 4-coloración.
 - d)* Observar que no admite una 3-coloración y detectar cuál es la configuración de países que fuerza a los cuatro colores.
- 9. Hallar un grafo que precise de exactamente n colores.
- 10. Consideremos el juego del Sudoku.
Considerar un grafo cuyos vértices sean las celdas del Sudoku y cuyas aristas estén dadas por la relación de pertenecer a una misma fila, a una misma columna o a un mismo cuadrado.
 - a)* Contar la cantidad de vértices del grafo y el grado de cada vértice.
 - b)* Deducir la cantidad de aristas.
 - c)* Interpretar el juego del Sudoku en términos de coloraciones de este grafo.