

La distancia en este espacio la podemos escribir como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -(d\tilde{x}^0)^2 + (d\tilde{x}^1)^2 + (d\tilde{x}^2)^2 + (d\tilde{x}^3)^2 = g_{\mu\nu} d\tilde{x}^\nu d\tilde{x}^\mu$$

donde $g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es el tensor métrico!!

Estamos utilizando la convención $(-, +, +, +)$ que hace referencia a la convención usada para ds^2 . (Muchas veces se encuentra en la literatura la otra convención $(+, -, -, -)$ donde $g_{\mu\nu}$ toma la forma $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$).

De esta forma, $g_{\mu\nu}$ guarda la información de la geometría del espacio. Me dice cómo calcular distancias en el espacio.

Además, puedo aprovechar y definir el **4-VECTOR COVARIANTE** A_μ como:

$$A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu$$

Por ejemplo, para el 4-vector posición es: $\tilde{X}_\mu = g_{\mu\nu} \tilde{X}^\nu$.

y la invarianza de la "distancia" toma la forma:

$$\Delta S^2 = g_{\mu\nu} \Delta\tilde{x}^\nu \Delta\tilde{x}^\mu = \Delta\tilde{x}_\mu \Delta\tilde{x}^\mu$$

¿Cómo transforma un 4-vector covariante?

Si ΔS^2 es invariante, entonces podemos escribir

$$\Delta S^2 = \Delta\tilde{x}_\mu \Delta\tilde{x}^\mu = \Delta\tilde{x}_\mu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}'^\nu} \Delta\tilde{x}'^\nu = \Delta\tilde{x}'_\nu \Delta\tilde{x}'^\nu$$

lo cual teniendo que ser válido $\forall \Delta\tilde{x} \Rightarrow$ se debe cumplir que un 4-vector covariante transforma como:

$$\Delta\tilde{x}'_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}'^\nu} \Delta\tilde{x}_\mu \quad (\text{T4-V}_\mu)$$

Mientras que un 4-vector contravariante transforma como:

$$\Delta\tilde{x}'^\nu = \frac{\partial \tilde{x}'^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \Delta\tilde{x}^\mu \quad (\text{T4-V}^\mu)$$

Producto interno

De esta forma, el espacio-tiempo (espacio vectorial de los cuadvectores) viene equipado con una especie de producto interno covariante (invariante ante T. de L.) definido como:

Dados dos 4-vectores $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, el producto interno entre ellos es:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \equiv \tilde{A}^\mu \tilde{B}_\mu = \tilde{A}^0 \tilde{B}_0 + \tilde{A}^1 \tilde{B}_1 + \tilde{A}^2 \tilde{B}_2 + \tilde{A}^3 \tilde{B}_3 = \tilde{A}^0 \tilde{B}^0 - \tilde{A}^1 \tilde{B}^1 - \tilde{A}^2 \tilde{B}^2 - \tilde{A}^3 \tilde{B}^3 = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$$

el cual es, por construcción, invariante de Lorentz:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{A}^\mu \tilde{B}_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{A}^\nu \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial \tilde{x}^{\prime\mu}} \tilde{B}_\rho = \left(\frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial \tilde{x}^{\prime\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\prime\mu}}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) \tilde{A}^\nu \tilde{B}_\rho = \delta^\rho_\nu \tilde{A}^\nu \tilde{B}_\rho = \tilde{A}^\rho \tilde{B}_\rho = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

$(\Lambda^{-1})^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu$ $\uparrow$ delta de Kronecker

De la misma forma que podemos bajar un índice con la matriz $g_{\mu\nu}$, podemos subir un índice con la matriz $g^{\mu\nu}$:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu = g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} A^\rho = \delta^\mu_\rho A^\rho$$

Es decir, la matriz $g^{\mu\nu}$ es la inversa de $g_{\nu\rho}$. Pero la inversa

de $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ella misma $(g^{-1})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$.

Tensores

Los tensores de mayor orden se definen igualmente a sus versiones clásicas:

$\tilde{T}$ es un tensor de rango n si transforma como:

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} \tilde{T}^{\nu_1 \dots \nu_n}$$

Derivada covariante

Veamos que el operador $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}$ transforma como un 4-vector covariante (índice abajo):

Consideremos una función escalar $f(\tilde{x})$. La misma, por definición, es invariante ante un cambio de coordenadas:

$$f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}')$$

El cambio o diferencial de esta función al variar las coordenadas $d\tilde{x}$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\mu} d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}'^\nu} d\tilde{x}'^\nu = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}'^\nu} d\tilde{x}'^\nu$$

Pero entonces es $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}'^\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}'^\nu} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\mu}$ que transforma como un 4-vector covariante! (ver T4-V_μ). Por lo tanto es usual escribir el 4-vector derivada covariante como:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \nabla \right)$$

Ejemplos de cuadvectores (Ejercicios para practicar)

- Cuadvector velocidad de una partícula $\tilde{u}$

$$\tilde{u}^\mu \equiv \left(\frac{d\tilde{x}^0}{d\tau}, \frac{d\tilde{x}^1}{d\tau}, \frac{d\tilde{x}^2}{d\tau}, \frac{d\tilde{x}^3}{d\tau} \right) = \gamma(c, \vec{u}) \quad , \quad \text{con } \tau \text{ el tiempo propio de la partícula } (t' = \tau)$$

$$\frac{d(ct)}{dt'} = \gamma c, \quad \frac{d\tilde{x}^i}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}^i}{dt} \frac{dt}{dt'} = v^i \gamma$$

$$\frac{dct}{dt'} = \gamma c$$

$$\frac{d\tilde{x}^i}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v^i \gamma$$

- Cuadvector impulso-energía $\tilde{p}$

$$\tilde{p}^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = m_0 (\gamma c, \gamma \vec{u}) = m_0 \tilde{u}$$

- Cuadrifuerza $\tilde{F}$

$$\tilde{F}^\mu \equiv \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}, \gamma \vec{F} \right)$$

- Cuadvector corriente (bonus track) $\tilde{j}$

$$\tilde{j}^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$$

→ la conservación de la carga es

$$\partial_\mu \tilde{j}^\mu = 0 \quad !! \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \right)$$

Mostremos que el 4-vector impulso-energía $\tilde{p}$ es, efectivamente, un cuadrivector:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Partimos de:} \\ \vec{p} = m_0 \vec{u} \gamma(u), \quad \frac{E}{c} = m_0 \gamma(u) c \\ \vec{p}' = m_0 \vec{u}' \gamma(u'), \quad \frac{E'}{c} = m_0 \gamma(u') c \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{y queremos ver que:} \\ \frac{E}{c} = \gamma \left(\frac{E'}{c} + \beta p'_x \right) \\ p_x = \gamma \left(p'_x + \beta \frac{E'}{c} \right) \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \\ (\tilde{p}'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \tilde{p}^\nu) \end{array} \right.$$

Para ello utilizaremos que $1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{(c^2 - v^2)(c^2 - u'^2)}{(c^2 + v u'_x)^2}$

o tomando la inversa y la raíz:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \quad \circ \quad \gamma(u) = \textcircled{*} \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right) \gamma(u') \gamma(v)$$

(Esto es, básicamente, la parte a) del ejercicio 6.17)

$$\Rightarrow p_x = m_0 \gamma(u) u_x = m_0 \gamma(u) \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \textcircled{*} m_0 (u'_x + v) \gamma(u') \gamma(v) = \gamma(v) \left[p'_x + \frac{v}{c} \cdot m_0 c \gamma(u') \right] = \gamma \left(p'_x + \beta \frac{E'}{c} \right)$$

$$p_y = m_0 \gamma(u) u_y = m_0 \gamma(u) \frac{u'_y}{\gamma(v) \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)} \textcircled{*} m_0 \gamma(u') u'_y = p'_y$$

$$p_z = m_0 \gamma(u) u_z = m_0 \gamma(u) \frac{u'_z}{\gamma(v) \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)} = m_0 \gamma(u') u'_z = p'_z$$

$$\frac{E}{c} = m_0 \gamma(u) c \textcircled{*} m_0 c \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right) \gamma(u') \gamma(v) = \gamma(v) \left[m_0 c \gamma(u') + \frac{v}{c} m_0 \gamma(u') u'_x \right] = \gamma \left(\frac{E'}{c} + \beta p'_x \right).$$

y, en esta notación, LA NUEVA 2^{da} LEY DE LA MECÁNICA es:

$$\boxed{\tilde{F}^\mu = \frac{d\tilde{p}^\mu}{d\tau}}$$

con τ el tiempo propio de la partícula.

$$\tilde{F}^0 = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} = \frac{d}{dt} \frac{E}{c} \frac{dt}{dt'} = \gamma \frac{dE}{dt} \rightsquigarrow \overset{\text{Potencia}}{P} = \vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{dE}{dt}$$

$$\tilde{F}^i = \gamma F^i = \frac{d}{dt} p^i \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dp^i}{dt} \rightsquigarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

III - Mecánica Newtoniana de sistemas de partículas

Abandonamos el plano relativista para retornar a la situación Newtoniana donde todos los fenómenos ocurren a velocidades típicas v tales que $v \ll c$. Esto equivale a considerar $c \rightarrow \infty$.

En esta última unidad pasaremos a estudiar el movimiento de muchas partículas y luego nos centraremos en un caso particular donde, la imposición de ciertos vínculos reduce enormemente la complejidad del problema.

III.1 - Sistemas de partículas

Comenzamos entonces el estudio del movimiento de sistemas de partículas.

III.1.1 - Ecuaciones cardinales

Cuando consideramos un sistema de N partículas sin vínculos, para describir el estado de movimiento del sistema precisamos dar la evolución temporal de $3N$ coordenadas. Es decir, 3 coordenadas por cada partícula (x_i, y_i, z_i) . Por supuesto, disponemos de las N ecuaciones de Newton (1 para cada partícula). Sin embargo, cuando uno/una trabaja con sistemas macroscópicos este enfoque resulta impracticable y, en gran medida, hasta inútil ya que en un caso macroscópico no resulta útil conocer el comportamiento individual de cada partícula.

Las ecuaciones cardinales (la 1^{ra} y la 2^{da} cardinal) son 2 formas de combinar estas $3N$ ecuaciones dando lugar a un total de 6 ecuaciones de evolución promedio del sistema: 3 por cada cardinal.

Centro de masas

Supongamos que tenemos un conjunto de N partículas con masas $\{m_i\}$. La 2^{da} ley de la mecánica newtoniana para cada una de ellas dice que

$$\vec{F}_i^{(neta)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i.$$

Fuerza sobre la partícula i momento lineal de la partícula i

Esta ecuación nos da la evolución de la partícula i en términos de la fuerza neta aplicada sobre ésta. Ahora bien, desde un punto de vista formal podemos combinar las ecuaciones de evolución de las N partículas sumando las expresiones para cada partícula:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(neta)} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}^{(sist)}}{dt}$$

donde $\vec{P}^{(sist)} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ es el momento lineal total del sistema.

Además es:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right)$$

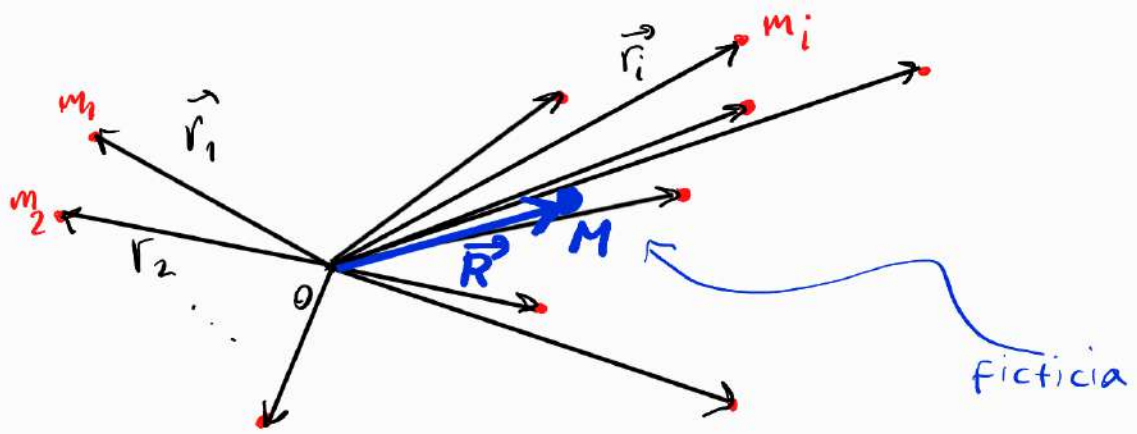
El término $\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \equiv \vec{R}$ es un promedio de las posiciones de las partículas ponderado por las masas denominado centro de masas. Definimos la masa total del sistema M como la suma de las masas:

$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i.$$

De esta forma, el término $\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ se convierte en:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}^{(sist)}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \frac{d\vec{R}}{dt}) = M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$$

Esto es equivalente a la evolución de una única partícula efectiva de masa M cuya posición es la del vector $\vec{R}$. (ojo: la partícula no existe!)



Primera Cardinal

Podemos separar las fuerzas que actúan sobre las partículas en las que se deben a interacciones internas entre partículas $\vec{F}_{ij}$ e interacciones externas $\vec{F}_{ext,i}$

$$\vec{F}_i^{(neta)} = \vec{F}_{ext,i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i}$$

Esta separación de las fuerzas en externas e internas es particularmente útil ya que, debido al principio de acción y reacción, $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$ cuando sumamos las fuerzas para todas las partículas tenemos que:

$$\vec{F}_{sist}^{(neta)} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(neta)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i} = \vec{F}_{ext}^{(neta)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} (\vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i})$$

$= 0$
por acción y reacción

donde definimos la fuerza neta externa $\vec{F}_{ext}^{(neta)} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} \equiv \vec{F}_{sist}^{(neta)}$
por acción y reacción.

Justando todo obtendremos una ecuación para la evolución del centro de masas (evolución del promedio de las posiciones ponderado por las masas) que se conoce como **PRIMERA CARDINAL**.

$$\vec{F}_{sist}^{(neta)} = \vec{F}_{ext}^{(neta)} = M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d \vec{p}^{(sist)}}{dt}$$