

PRÁCTICO 7: MEDIDAS ABSTRACTAS

1. Consideremos un espacio X con un álgebra de conjuntos \mathcal{A} y una premedida μ_0 . Definimos \mathcal{A}_σ como la familia de conjuntos que son uniones numerables de conjuntos de \mathcal{A} y $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ los que resultan de intersecciones numerables de conjuntos en \mathcal{A}_σ .

Construimos la medida exterior μ_* generada por cubrimientos. Sea un conjunto E arbitrario y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Demostrar que existen

- a) Un conjunto E_1 de clase \mathcal{A}_σ tal que $E \subset E_1$ y

$$\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E) + \varepsilon,$$

- b) Un conjunto E_2 de clase $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset E_2$ y

$$\mu_*(E_2) = \mu_*(E).$$

(Este ejercicio es la Proposición 1.6 de la pág. 273 de [RA])

2. a) Probar que la familia de conjuntos que son uniones finitas de rectángulos en \mathbb{R}^d , es un álgebra. (Nota: Se considera como rectángulo todo producto $I_1 \times \dots \times I_d$ donde I_i es un intervalo en \mathbb{R} que puede ser degenerado. Es decir, pedimos simplemente que cada I_i sea un conexo de \mathbb{R}).
- b) Sean $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ dos espacios de medida. Si $A \in \mathcal{M}_1$ y $B \in \mathcal{M}_2$ diremos que $A \times B$ es un *rectángulo medible* en $X_1 \times X_2$. Probar que la unión finita de rectángulos así definidos es un álgebra.
3. Probar que una intersección arbitraria de σ -álgebras (no vacía) es una σ -álgebra.
4. (Completación de una medida). Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. Se define $\overline{\mathcal{M}}$ como la siguiente familia de subconjuntos de X

$$\overline{\mathcal{M}} = \{A \cup Z : A \in \mathcal{M} \text{ y } Z \subset F \text{ para cierto } F \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(F) = 0\}.$$

Se define $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow [0, \infty]$ como $\overline{\mu}(A \cup Z) = \mu(A)$.

- a) Probar que $\overline{\mathcal{M}}$ es una σ -álgebra y $\overline{\mu}$ una medida (en particular, está bien definida).
- b) Probar que $\overline{\mu}$ es *completa* (es decir, si $E \in \overline{\mathcal{M}}$ tiene medida cero entonces todos los subconjuntos de E están en $\overline{\mathcal{M}}$).
- c) Mostrar que $\overline{\mathcal{M}}$ es la menor σ -álgebra para la cual se puede extender μ a una medida completa.

- d) Dar un ejemplo en el que μ se pueda extender a una σ -álgebra aún mayor.
5. Sea m_* la medida exterior de Lebesgue. Probar que E en \mathbb{R}^d es medible Lebesgue si y sólo si E es medible Carathéodory a partir de m_* .
(Sugerencia: Si E es medible Lebesgue y A en \mathbb{R}^d es un conjunto cualquiera considerar G un conjunto G_δ tal que $A \subset G$ y $m_*(A) = m(G)$. Recíprocamente, si E es medible Carathéodory y $m_*(E) < \infty$ considerar G un G_δ tal que $E \subset G$ y $m_*(E) = m(G)$. Luego $G - E$ tiene medida exterior 0.)
6. Sea m_j la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^{d_j} para $j = 1, 2$. Consideremos $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ (con $d = d_1 + d_2$) con la medida de Lebesgue m en \mathbb{R}^d . Mostrar que m es la completación (en el sentido del Ejercicio 4) de la medida producto $m_1 \times m_2$.
7. Sea x_0 un punto de \mathbb{R}^d y δ_{x_0} la medida delta de Dirac en x_0 . Es decir, δ_{x_0} está dada por $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$ y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x \notin A$, para todo $A \subset \mathbb{R}^d$.
Probar que δ_{x_0} restringida a σ -álgebra de Lebesgue \mathcal{L} de \mathbb{R}^d no puede escribirse como la integral de una función respecto a la medida de Lebesgue, es decir, probar que no existe $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ integrable Lebesgue tal que $\delta_{x_0}(A) = \int_A f dm$ para todo $A \in \mathcal{L}$.
8. Dar un ejemplo de una premedida en un álgebra que pueda ser extendida de más de una manera a la σ -álgebra generada. (Nota: Recordar que necesariamente no será σ -finita.)
9. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida y $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Mostrar que μ_φ definida en \mathcal{M} como

$$\mu_\varphi(E) = \int_E \varphi d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

es una medida positiva y que si $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es una función medible cualquiera se cumple que

$$\int_E f d\mu_\varphi = \int_E \varphi f d\mu.$$

10. Sea \sharp la medida de conteo en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mostrar que convergencia en medida y convergencia uniforme coinciden.
11. Sea μ una medida de Borel en un espacio métrico (X, d) que cumple que para toda bola de radio finito B se cumple que $\mu(B) < \infty$. Mostrar que entonces, para todo Boreliano $E \subset X$ y $\varepsilon > 0$ se cumple que existe $F \subset B$ cerrado y $O \supset B$ abierto tal que $\mu(O \setminus F) < \varepsilon$. (Sugerencia: Mostrar que los conjuntos que verifican la propiedad son una σ -álgebra.)
12. Sea \mathcal{C} el conjunto de Cantor usual y sea μ una medida de probabilidad (completa) sin átomos en \mathcal{C} . Mostrar que existe $C \subset \mathcal{C}$ con $\mu(\mathcal{C} \setminus C) = 0$ y $D \subset [0, 1]$ con $\text{Leb}([0, 1] \setminus D) = 0$ y una biyección bimedible $\Phi : C \rightarrow D$ tal que se cumple que $\mu(A) = \text{Leb}(\Phi(A))$ para todo $A \subset C$ medible.

13. Construir espacios de probabilidad completos y sin átomos (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) tal que no existe una biyección (módulo conjuntos de medida nula) bimedible entre X e Y que manda μ en ν . (Sugerencia: Si existe tal biyección, los espacios $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deberían ser isomorfos.)¹
14. El objetivo de este ejercicio es mostrar que la hipótesis de que cada factor sea una medida σ -finita es necesaria para el teorema de Fubini.
- Sea $(X_1, \mu_1, \mathcal{M}_1)$ el espacio $X_1 = [0, 1]$ con μ_1 la medida de Lebesgue y \mathcal{M}_1 la σ -álgebra de Lebesgue. Sea $(X_2, \mu_2, \mathcal{M}_2)$ el espacio $X_2 = [0, 1]$ con μ_2 la medida de conteo y \mathcal{M}_2 la σ -álgebra dada por partes de $[0, 1]$. Es decir, para todo $A \subset [0, 1]$ se tiene que $\mu_2(A) = n$ si A tiene exactamente n elementos o $\mu_2(A) = \infty$ si A tiene infinitos elementos.
- Probar que efectivamente $(X_2, \mu_2, \mathcal{M}_2)$ es un espacio de medida y que μ_2 no es σ -finita.
 - Sea $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ la diagonal en $[0, 1] \times [0, 1] = X_1 \times X_2$. Probar que $\chi_\Delta : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es medible e integrable respecto al espacio de medida producto $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$ pero que sin embargo no aplica el teorema de Fubini para χ_Δ .

Medidas absolutamente continuas y singulares

15. Sea ν una medida signada y μ una medida positiva. Mostrar que si $\nu \perp \mu$ y $\nu \ll \mu$ entonces $\nu = 0$.
16. Sean ν, ν_1, ν_2 medidas signadas y μ medida positiva en (X, \mathcal{M}) . Probar que:
- Si $\nu_1 \perp \mu$ y $\nu_2 \perp \mu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.
 - Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.
 - $\nu_1 \perp \nu_2$ implica $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.
 - $\nu \ll |\nu|$.
17. Consideremos dos medidas μ y ν en un espacio (X, \mathcal{M}) . Mostrar que las siguientes tres condiciones son equivalentes:
- $\nu \ll \mu$
 - $|\nu| \ll \mu$
 - $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$.
18. (Ejercicio 11 Cap. 6 de [RA]) Sea F una función creciente y normalizada en \mathbb{R} , y sea $F = F_A + F_C + F_J$ la descomposición de Lebesgue del ejercicio anterior. Sea $\mu = \mu_A + \mu_C + \mu_J$ donde μ, μ_A, μ_C, μ_J son las medidas de Borel asociadas a F, F_A, F_C, F_J respectivamente. Verificar:

¹Buscar en Wikipedia el concepto de Standard Probability Space (https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_probability_space) para ver que no es tan sencillo este ejercicio.

- (i) μ_A es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y $\mu_A(E) = \int_E F'(x)dx$, para todo E Lebesgue medible.
- (ii) Como resultado, si F es absolutamente continua, tenemos $\int f d\mu = \int f dF = \int f(x)F'(x)dx$ siempre que f y fF' sea integrables respecto de μ y de la medida de Lebesgue respectivamente.
- (iii) $\mu_C + \mu_J$ y la medida de Lebesgue son singulares.