Nombre:	**CI:**

SEGUNDO PARCIAL - JUNIO 2023

Ejercicio 1 Sean $\{X_n : n \geq 2\}$ v. a. independientes igualmente distribuídas con distribución esponencial de parámetro 1. Sean

$$Y_n = \frac{X_n}{\log n}.$$

A partir de la definición de convergencia en probabilidad, probar que Y_n converge en probabilidad a 0.

Ejercicio 2

(a) Sea f una función continua y acotada, y $\{Y_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que Y_n converge en probabilidad a c. Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|f(Y_n)|\mathcal{I}_{\{|Y_n - c| \geq \delta\}}) = 0 \ \forall\ \delta > 0. \tag{1}$$

(b) Deducir que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(Y_n)) = f(c)$.

(c) Sean $\{X_n : \ n \geq 1\}$ variables aleatorias independientes, identicamente distribuídas con distribución común $N(0,1)$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Verificar que $Y_n = x + \frac{S_n}{n}$ converge en probabilidad a x y deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x + t/n) \frac{e^{-t^2/2n}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} dt = f(x).$$

Suegerencia: Usar que la suma de normales independientes es normal. Es decir,
si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X_1 y X_2 son independientes, entonces $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Solución

Ejercicio 1 Sea $Y_n = \frac{X_n}{\log n}$. Queremos probar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) \to 0 \text{ si } n \to \infty$$

Notar que $Y_n \geq 0 \, \forall n \geq 2$, luego

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon \log n) = 1 - F_{X_n}(\varepsilon \log n) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda\varepsilon \log n}\right) \\ &= \left(e^{\log n}\right)^{-\lambda\varepsilon} = n^{-\lambda\varepsilon} = \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon}} \to 0 \quad \forall \varepsilon.\end{aligned}$$

Ejercicio 2

(a) Sea M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x, entonces

$$0 \leq \mathbb{E}(|f(Y_n)|\mathcal{I}_{\{|Y_n - c| \geq \delta\}}) \leq \mathbb{E}(M\mathcal{I}_{\{|Y_n - c| \geq \delta\}}) = M\mathbb{P}(|Y_n - c| \geq \delta) \to 0$$

cuando $n \to \infty$ ya que $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} c$.

(b) Notar que $0 \leq |\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(c)| = |\mathbb{E}\left(f(Y_n) - f(c)\right)| \leq \mathbb{E}|f(Y_n) - f(c)|$, así que basta con probar que $\mathbb{E}|f(Y_n) - f(c)| \to 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en c, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ si $|x - c| < \delta$. Luego,

$$\mathbb{E}|f(Y_n) - f(c)| = \mathbb{E}\left[|f(Y_n) - f(c)|I_{\{|Y_n - c| < \delta\}}\right] + \mathbb{E}\left[|f(Y_n) - f(c)|I_{\{|Y_n - c| \geq \delta\}}\right] = (\mathbf{i}) + (\mathbf{ii})$$

Notar que:

- $(\mathbf{i}) < \varepsilon\mathbb{P}\left(|Y_n - c| < \delta\right) \leq \varepsilon$,
- si tomamos $f_c(x) = f(x) - f(c)$ (función continua y acotada), entonces por la parte anterior tenemos que $(\mathbf{ii}) = \mathbb{E}\left[|f_c(Y_n)|I_{\{|Y_n - c| \geq \delta\}}\right] \to 0$

Luego $\lim_n \mathbb{E}|f(Y_n) - f(c)| \leq \varepsilon$. Como ε es arbitrario, tiene que ser $\lim_n \mathbb{E}|f(Y_n) - f(c)| = 0$.

(c) Por la LGN, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} = \mathbb{E}(X_1) = 0$, luego, $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} x$. Por la parte anterior, basta con probar que:

$$\int f(x + t/n)\frac{e^{-t^2/2n}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}dt = \mathbb{E}(f(Y_n)),$$

pero $\mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}\left[f\left(x + \frac{S_n}{n}\right)\right] = \int f\left(x + \frac{t}{n}\right) f_{S_n}(t)dt$, siendo f_{S_n} la densidad de S_n. Como $X_1, \ldots, X_n$ son iid $\sim N(0,1)$, usando la sugerencia tenemos que $S_n \sim N(0, n)$ y

$$f_{S_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2},$$

como queríamos.