Práctico 10

Isomorfismos, matriz asociada y rango

1. Probar que cada una de las transformaciones siguientes es un isomorfismo y hallar explícitamente su inversa.
    a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, x) = (4x + 2y + 3z,\ x + y + z,\ x + z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
    b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definida por $T(x, y, x, t) = (x + y + z + t,\ y + z + t,\ z + t,\ t)$, para todo $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
    c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, definida por $T(X) = AX$, para todo $X \in M_2(\mathbb{R})$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
    d) $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, definida por $T(X) = X^t$, para todo $X \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ arbitrario.

2. Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ dos versores[1] que no sean perpendiculares y consideramos $W_1 = [w_1]$ y $W_2 = [w_2]$. Definimos una transformación lineal $T : W_1 \to W_2$ mediante $T(v) = (v \cdot w_2)w_2$, para todo $v \in W_1$.
    a) ¡Qué representa T geométricamente?
    b) Probar que $\{T\}$ es una base de $\mathcal{L}(W_1, W_2)$.
    c) Probar que T es un isomorfismo.
    d) Hallar la inversa de T. *Sugerencia:* empezar encontrando una base de $\mathcal{L}(W_2, W_1)$.

3. En los casos siguientes, dadas las bases B y C de V y las coordenadas de un vector v en la base B, hallar la matriz de cambio de base de B a C, expresar v como combinación lineal de los elementos de C y hallar v.
    a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1),\ (2, 3)\}$, $C = \{(0, 3),\ (5, -1)\}$, $\text{coord}_B(v) = (2, -1)$.
    b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 0),\ (0, 1, -1),\ (1, 0, 1)\}$, $C = \{(3, 0, 0),\ (1, 2, -1),\ (0, 1, 5)\}$, $\text{coord}_B(v) = (2, -1, 4)$.
    c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $B = \{x^2,\ x,\ 1\}$, $C = \{x^2 + x + 1,\ x + 1,\ 1\}$, $\text{coord}_B(v) = (2, -1, 0)$.
    d) $V = \mathrm{M}_2$, $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, $C = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, $\text{coord}_B(v) = (1/2, 1/2, -1, 2)$.

4. Consideramos la base $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
    a) Hallar una base C de $\mathbb{R}^2$ tal que ${}_B[\text{Id}]_C = A$.
    b) Hallar una base D de $\mathbb{R}^2$ tal que ${}_D[\text{Id}]_B = A$.

5. Sean B, C y D bases de $\mathbb{R}^2$. Hallar ${}_D[\text{Id}]_B$ sabiendo ${}_C[\text{Id}]_D = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ y ${}_C[\text{Id}]_B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Hallar ${}_C[T]_B$ en los casos siguientes.
    a) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
    b) $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
    c) $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $C = \{(1, 3), (2, 5)\}$.

7. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = AX$ (notar que T es una transformación lineal). Hallar ${}_C[T]_C$, siendo C la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

8. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_C[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, donde $B = \{1,\ x{+}1,\ (x{+}1)^2\}$ y $C = \{(1, 1, 0),\ (1, 2, 3),\ (3, 2, 1)\}$.
    Hallar $T(x^2 + x - 1)$.

9. Sean V y W dos espacios tales que $\dim V = 3$ y $\dim W = 2$. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y $C_1 = \{w_1, w_2\}$ una base de W.
    a) Probar que $B_2 = \{v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 + 2v_2 + v_3,\ v_1 + 2v_2 + 2v_3\}$ es una base de V.
    b) Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que ${}_{C_2}[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, siendo $C_2 = \{w_2, w_1\}$. Hallar ${}_{C_1}[T]_{B_1}$.

10. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por $T\big(p(x)\big) = p(x) + p'(x) + p''(x)$, siendo $p'(x)$ y $p''(x)$ las derivadas de $p(x)$.
    a) Hallar ${}_B[T]_B$, siendo B la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$.
    b) Probar que T es un isomorfismo.
    c) Hallar la matriz asociada a T^{-1} de B en B.

[1]Recordar que un *versor* es un vector de norma 1.

d) Hallar T^{-1}.

11. Sea $T = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

    a) Hallar $_C[T]_C$, $_B[T]_C$, $_C[T]_B$ y $_B[T]_B$, siendo C la base canónica y $B = \{(-1,1,0),\ (1,-1,1),\ (0,1,-1)\}$.

    b) Determinar si T es un isomorfismo.

12. Calcular los rangos de las siguientes matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ distintos entre sí. Calcular los rangos de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a+a^2 \\ 1 & b & b^2 & b+b^2 \\ 1 & c & c^2 & c+c^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Sugerencia: notar que la primera es una matriz de Vandermonde.

14. Hallar la dimensión del núcleo de T, siendo T la transformación lineal del ejercicio 9.

Ejercicios extra

1. En los casos siguientes, probar que B es base de V y hallar las coordenadas del vector v respecto a la base B.

    a) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{(1,1,0,0),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,5,2),\ (0,0,3,1)\}$, $v = (2,-4,5,7)$.

    b) $V = \mathrm{M}_2$, $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{smallmatrix}\right)$.

    c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $B = \big\{(x-1)^2,\ x-1,\ 1\big\}$, $v = x^2 + x + 1$.

2. En los casos que siguen hallar las coordenadas de un vector genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en las bases B_1 y B_2.

$$B_1 = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}; \quad B_2 = \{(2,1,1),\ (2,2,1),\ (1,1,1)\}.$$

3. En los casos que siguen, hallar el vector v sabiendo sus coordenadas en la base dada.

    a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$, $\mathrm{coord}_B(v) = (1,-1)$.

    b) $V = \mathrm{M}_2$, $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\mathrm{coord}_B(v) = (1,1,1,1)$.

4. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $C = \{f_1, f_2, f_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ obtenida rotando B alrededor del eje Oz un ángulo θ $(0 \le \theta < 2\pi)$ en sentido positivo, cuando vemos el plano Oxy desde arriba.

    a) Hallar explícitamente f_1, f_2, f_3.

    b) Hallar la matriz de cambio de base de B a C.

    c) Hallar las coordenadas del vector $(1,1,1)$ en la base C.

5. Sea C la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ y $B = \{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3\}$ base de $\mathbb{R}_3[x]$.

    a) Hallar $_B[T]_C$, siendo $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = a+b+c+d+(a+b+c)x+(a+b)x^2+ax^3$.

    b) Hallar la transformación lineal $S : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $_B[S]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de las siguientes transformaciones lineales:

    a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $_B[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $B = \{(1,1,0),\ (0,2,0),\ (2,0,-1)\}$.

    b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$_B[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

    donde $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ y $C = \{x^2,\ x,\ 1\}$.