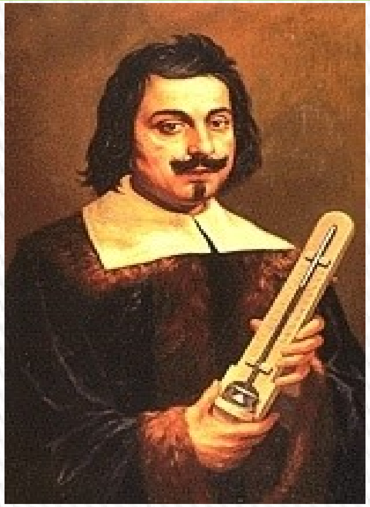
14- FLUIDOS IDEALES –
(ejemplos resueltos

Arquímedes
-288 Siracusa,
-212 muerto por un soldado romano en el sitios a Siracusa. “Eureka, eureka! “

Blaise Pascal
19/6/1623, Francia.
Muere en 1662.
Matemático, físico, filósofo y teólogo.
Inventó una máquina para sumar, la prensa hidráulica y la jeringa.



Evangelista Torricelli
15/10/1608, Florencia. .
Muere en 1662.
Físico y matemático.
Inventó el barómetro.

Daniel Bernoulli
8/2/1700, Basilea.
Muere en 1782.
Físico , médico y matemático.

REPASO DE LA CLASE PASADA

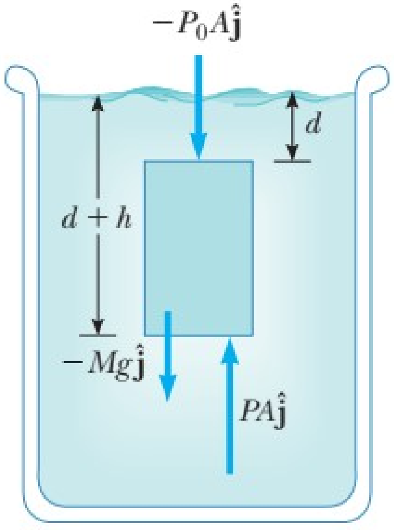
Densidad : $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ **Densidad media:** $\rho_{media} = \dfrac{m}{V}$

Densidad relativa: razón entre su densidad y densidad del agua a 4,0°C, 1000 kg/m^3; (adimensionado). Densidad relativa del aluminio: 2,7.

Presión $p = \lim\limits_{\delta A \to 0} \dfrac{F_\perp}{\delta A} = \dfrac{dF_\perp}{dA}$

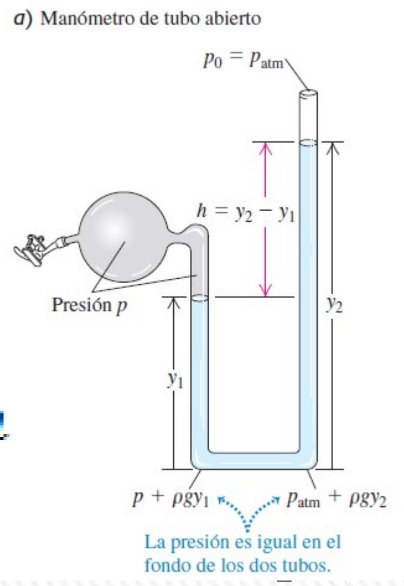
Unidad de presión en SI: **pascal (Pa) 1Pa =**1N/m^2.

Presión atmosférica normal a nivel del mar (valor medio):
1 atmósfera (atm): 1 atm =1,01325×10^5 Pa



$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

$$p - p_{atm} = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h$$



REPASO DE LA CLASE PASADA

Principio de Arquímedes: si un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido, éste ejerce una fuerza hacia arriba (empuje B) sobre el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

Para un cuerpo de volumen V y densidad ρ totalmente sumergido en un fluido de densidad ρ_f, la fuerza neta sobre él es: $B - mg = (\rho_f - \rho)Vg$

Para un cuerpo en flotación, de densidad ρ y volumen V, que tiene un volumen sumergido en el fluido V_S, se tiene

$$\frac{\rho}{\rho_f} = \frac{V_S}{V}$$

Modelo de fluido ideal:

- **no viscoso, e**
- **Incompresible.**

Flujo:

- **estacionario (estable o laminar) , e**
- **irrotacional (no hay momento angular del fluido alrededor de algún punto.)**

REPASO DE LA CLASE PASADA

La masa de un fluido en movimiento no cambia al fluir: lo que conduce a una relación cuantitativa importante llamada **ecuación de continuidad**.

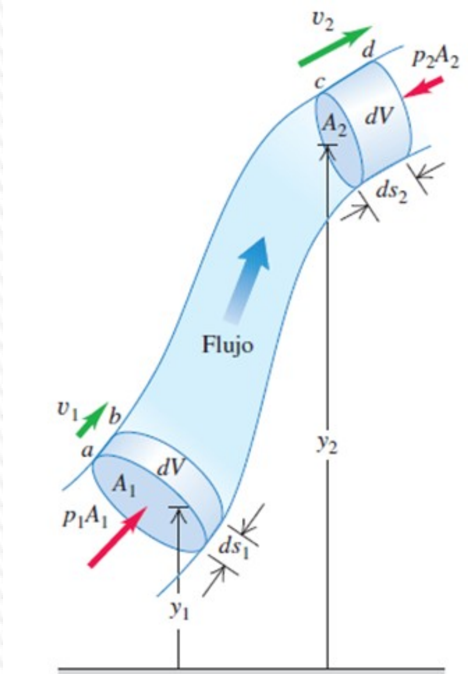
Caso de un fluido incompresible: la densidad ρ tiene el mismo valor en todos los puntos, se prueba que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Si el fluido es compresible: $$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Av es la ***rapidez del flujo de volumen o caudal o gasto*** *dV/dt*, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo:

$$\frac{dV}{dt} = Av$$



ECUACIÓN DE BERNOULLI

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte.$$

PREGUNTA RÁPIDA

Una persona en un bote que flota en el agua de una piscina lanza por la borda un ancla de hierro, que estaba originalmente dentro del bote, y se hunde dentro de la piscina. ¿Qué ocurre con el nivel de la piscina lago?

a) Se eleva.
b) Baja.
c) Permanece igual.
d) No se puede determinar…

El nivel del agua en la pisicina baja.
Inicialmente cuando el ancla está en el bote, y por tanto flotando, por el principio de Arquímedes se debe haber desplazadp un volumen de agua igual al peso del ancla.
Si el volumen del ancla es V, entonces el volumen desplazado inicial vale aproximadamente 7,8V (7,8 es el valor de la densidad relativa del hierro).
Cuando se tira el ancla dentro del agua, el volumen de agua desplazado será simplemente V.

Por tanto el nivel de la pisicina baja!

Ejemplo: ejercicio 7.7

Un tanque contiene un líquido de densidad ρ, y tiene un pequeño orificio a una altura h de la base del tanque. El aire en la parte superior del tanque se mantiene a una presión P. Determinar la velocidad con la cual sale el líquido por el orificio cuando el nivel del líquido está a una distancia H sobre el orificio para el caso en que:

a) La sección del orificio A_2 es mucho menor que la sección del tanque A_1 ($A_2 << A_1$)

b) $A_2 << A_1$ y además $P = P_{atm}$ (este caso se conoce como ley de Torricelli)

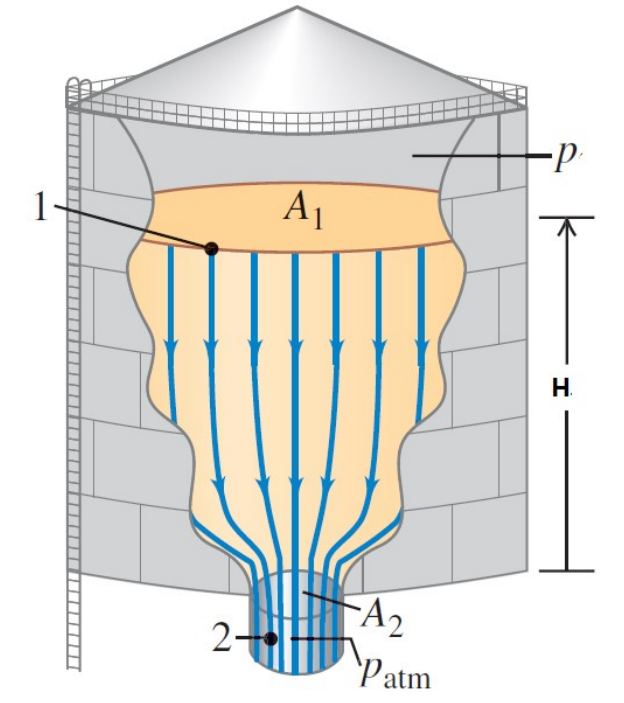
c) Considere ahora que $A_1 = N A_2$ y $P = P_{atm}$.

d) Suponga que el tanque está abierto a la atmósfera, H inicialmente es de 1,00 m, el orificio está en el fondo del tanque y $A_1 = 400 A_2$. ¿Cuánto vale la velocidad de salida?

Voy a considerar que se cumplen las condiciones para aplicar la ecuación de Bernoulli.
Los puntos 1 está en la superficie del líquido y a la presión $P = p_1$ el 2 en la salida y a la atmosférica, p_{atm}.
Tomo $y = 0$ en el tubo de salida, así que $y_1 = H$ e $y_2 = 0$.

Aplico Bernoulli entre 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



Ejemplo: ejercicio 7.7

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$(p_1 - p_2) + (\rho g y_1 - \rho g y_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g (y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right)$$

Por la ecuación de continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

por lo que: $v_1/v_2 = A_2/A_1$

$$(p_1 - p_{atm}) + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\left((p_1 - p_{atm}) + \rho g H\right)}{\rho\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}}$$

a) La sección del orificio A_2 es mucho menor que la sección del tanque A_1 ($A_2 << A_1$) . Entonces:

$$\frac{A_2^2}{A_1^2} \cong 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\left((p_1 - p_{atm}) + \rho g H\right)}{\rho}} = \sqrt{2\left(\frac{p_1 - p_{atm}}{\rho}\right) + gH}$$

Ejercicio 7.7

b) $A_2 << A_1$ y además $P = P_{atm}$ (este caso se conoce como ley de Torricelli): $p=p_1=p_{atm}$, por lo que $p_1-p_{atm}=0$

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

c) Considere ahora que $A_1 = N A_2$ y $P = P_{atm}$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{1}{N^2}\right)}}$$

d) Suponga que el tanque está abierto a la atmósfera, H inicialmente es de 1,00 m, el orificio está en el fondo del tanque y $A_1 = 400 A_2$. ¿Cuánto vale la velocidad de salida

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{1}{N^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2(9{,}80)(1{,}00)}{\left(1-\frac{1}{400^2}\right)}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}99999375}} = 4.43\ m/s$$

Ley de Torricelli: determina la rapidez de salida de un fluido, válida por un agujero pequeño comparado con el recipiente, ambos abiertos a la atmósfera a una profundidad *h* bajo la superficie.

$$v = \sqrt{2hg}$$

Ejercicio 7.17

Examen diciembre 2021- Un médico está tratando de determinar qué porcentaje de la arteria de un paciente está bloqueado por una placa. Para ello, mide la presión sanguínea justo antes de la región de bloqueo y encuentra que ésta es de $1{,}21\times 10^4$ Pa, mientras que en la región de bloqueo es de $1{,}18\times 10^4$ Pa. Además, se sabe que la sangre que fluye a través de la arteria normal justo antes del punto de bloqueo se desplaza a 30,0 cm/s, y que la densidad relativa de la sangre de este paciente es 1,06, y que las medidas de presión se realizaron a la misma altura. ¿Qué porcentaje de la superficie de sección transversal de la arteria del paciente está bloqueado por la placa?

Aplico Bernoullli entre el punto 1 (antes de bloqueo) y el punto 2(donde está el bloqueo

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Para este caso: $y_1 = y_2 = 0$ $v_1 = 30{,}0 \text{ cm/s} = 0{,}300 \text{ m/s}$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_1 - p_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{1060}\left(12.100 - 11.800 + \frac{1}{2}(1060)0{,}300^2\right)} = 0{,}80996\, m/s$$

Ejercicio 7.17

Por la ecuación de continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

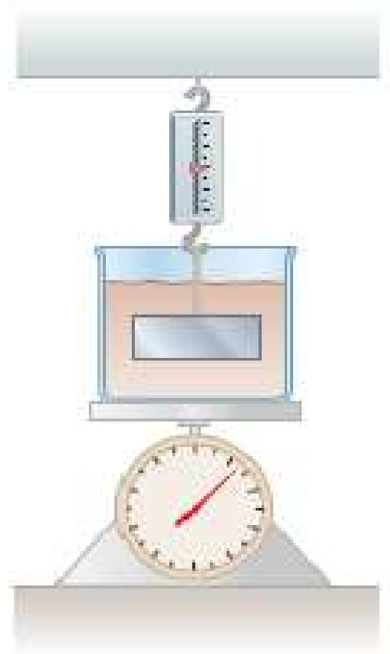
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{v_1}{A_2} = \frac{0{,}300}{0{,}80996} = 0{,}370$$

Es decir que: $A_2 = 0{,}370\ A_1 = 37\%$ de A_1
por lo tanto la obstrucción es del 63% A_1

La obstrucción es del 63% de la sección

Ejemplo: ejercicio 7.6

Un vaso de precipitados de 1,00 kg que contiene 2,00 kg de petróleo (de densidad 916 kg/m^3) se apoya sobre una báscula. Un bloque de 2.00 kg de hierro se suspende de una báscula de resorte y se sumerge por completo en el petróleo. Encuentre las lecturas en ambas básculas en el momento del equilibrio.



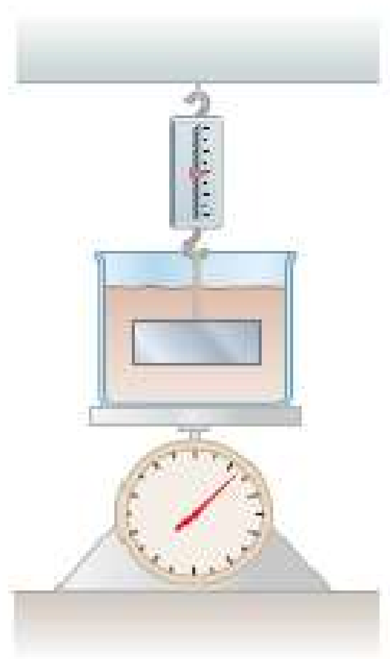
Sea T la indicación de la balanza de resorte.
Sobre el bloque de hierro actúan las siguientes fuerzas:
Peso del bloque: =2,00 * 9,8 = 19,6 N (hacia abajo)
Empuje por el petróleo: $V^*\rho_{petróleo}{}^*g$ (hacia arriba)
La tensión T (hacia arriba)
Volumen del bloque: $V= m/ \rho_{Fe}=$
Densidad del hierro 7860 kg/m^3
T= 17,31 N **B= 19,6 -17,31**

Por el Principio de Acción y Reacción, así como el fluido ejerce sobre el bloque una fuerza igual al empuje B, el bloque debe ejercer una fuerza igual y contraria:

$F= W_{vaso} + W_{petróleo} + B = 31,6$ N

Ejemplo: ejercicio 7.6

Un vaso de precipitados de 1,00 kg que contiene 2,00 kg de petróleo (de densidad 916 kg/m^3) se apoya sobre una báscula. Un bloque de 2.00 kg de hierro se suspende de una báscula de resorte y se sumerge por completo en el petróleo. Encuentre las lecturas en ambas básculas en el momento del equilibrio.



Densidad del hierro: ρ_{Fe}= 7,86×10^3 kg/m^3
Considero el equilibrio del bloque de hierro, se aplican las siguientes fuerzas:
el peso de hierro W_{Fe}= m_{Fe}.g= (2,00 kg) ×(9,8 m/s^2) = 19,6 N (dirigida hacia abajo)

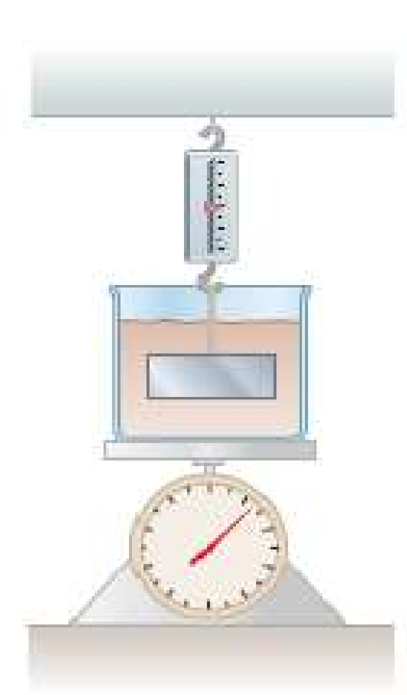
el empuje B debido debido al petróleo (hacia arriba) $B=V_{Fe}\,\rho_{pet.}\,g$
y la tensión T debido a la báscula de resorte (hacia arriba), que es lo que indicará dicha balanza.
El volumen del bloques es: $V_{Fe} = \dfrac{m_{Fe}}{\rho_{Fe}}$

$$W_{Fe} = T + B \qquad T = W_{Fe} - B = 19{,}6 - \frac{m_{Fe}}{\rho_{Fe}}\rho_{pet}g =$$

$$19{,}6 - 2{,}00\frac{916}{7860}9{,}8 = 17{,}31\ N$$

Ejemplo: ejercicio 7.6

Un vaso de precipitados de 1,00 kg que contiene 2,00 kg de petróleo (de densidad 916 kg/m^3) se apoya sobre una báscula. Un bloque de 2.00 kg de hierro se suspende de una báscula de resorte y se sumerge por completo en el petróleo. Encuentre las lecturas en ambas básculas en el momento del equilibrio.



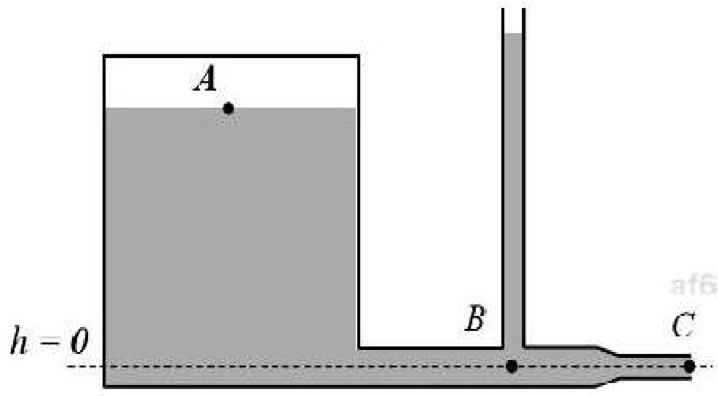
Por lo que B= $V_{Fe}\,\rho_{pet.}\,g$ =2,284 N
Por el principio de acción y reacción, el bloque debe ejercer sobre el fluido una fuerza igual y contraria al empuje.

Por tanto, la indicación de la balanza inferior (F) indicará un valor dado por la suma del peso del vaso, del petróleo y la reacción del empuje: F= W_{vaso} +W_{pet} + B

$$F = (m_{vaso} + m_{pet})g + B = (1{,}00 + 2{,}00)9{,}8 + 2{,}284 = 31{,}684$$

Indicación balanza de resorte: 17,3 N
Indicación balanza inferior: 31,7 N

Ejemplo: ejercicio 7.11



El depósito cilíndrico de la figura tiene un radio R = 2,00 m y está lleno de agua hasta una altura H=1,20 m. En la parte superior del depósito hay aire comprimido a una presión de P=110 kPa. El tubo vertical está abierto a la atmósfera y el horizontal de desagüe tiene inicialmente un tapón que cierra su extremo. Este tubo tiene secciones S_B= 18,0 cm^2 y S_C= 9,00 cm^2.

Calcular, inmediatamente después de quitar el tapón:

a) El caudal de agua (volumen por unidad de tiempo) en litros/segundo.

b) La altura a la que llegará el agua en el tubo vertical.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y C:

$$p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_C + \rho g h_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

De acuerdo a la ecuación de continuidad: $S_A v_A = S_C v_C \quad \Rightarrow v_A = \frac{S_C}{S_A} v_C$

$v_A = \frac{S_C}{S_A} v_C = \frac{9{,}00}{\pi \times 200^2} v_C = 7{,}170\times10^{-5} v_C$ por tanto se puede suponer que $v_A \cong 0.$

h_C= 0, h_A= H= 1,20 m y p_C = p_{atm} =101,325 kPa, $v_C = \sqrt{\frac{2(p_A - p_C + \rho g h_A)}{\rho}}$

$$= \sqrt{\frac{2((110-101{,}325)\times10^3 + (1000)(9{,}8)(1{,}20))}{1000}} = 6{,}392 \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{v_C = \sqrt{\frac{2(p_A - p_C + \rho g h_A)}{\rho}} = 6{,}39 m/s}$$

Ejemplo: ejercicio 7.11

$$v_C = \sqrt{\frac{2(p_A - p_C + \rho g h_A)}{\rho}} = 6,39 m/s$$

Caudal de salida: Q= $S_C . v_C$

Q = (9,00×10^{-4} m^2) (6,392 m/s)= 5,7554×10^{-3} m^3/s = **5,76 L/s**

b) Para calcular la altura en B, debemos conocer antes la velocidad en B, para luego aplicar Bernouilli entre B y C: $S_B v_B = S_C v_C$

$$\Rightarrow v_B = \frac{S_C}{S_B} v_C = \frac{9,00}{18,0} v_C = 0,500\ v_C = 3,196\ m/s$$

$$p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g y_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$y_B = y_C = 0$ $\quad$ $p_C = p_{atm}$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$p_B - p_{atm} = \frac{1}{2}\rho v_C^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Pero la altura que alcanza el fluido en B, depende efectivamente la presión manométrica en B:

$\rho g h_B = p_B - p_{atm}$

$$\rho g h_B = \frac{1}{2}\rho v_C^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$h_B = \frac{v_C^2 - v_B^2}{2g} = \frac{6,392^2 - 3,196^2}{2(9,80)} = 1,5639\ m$$

$$h_B = \frac{v_C^2 - v_B^2}{2g} = \mathbf{1,56\ m}$$