A lo largo de esta clase (X,d) va a representar un espacio métrico separable.

Definición: Definimos el diámetro de un conjunto como $|U| := \sup\{d(x,y) : x, y \in U\}$

Definición: Sea $E \subset X$, dado $\delta > 0$ decimos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es un δ-cubrimiento si $E \subset \cup_{i\in I} U_i$ y $|U_i| < \delta$ para todo $i \in I$.

Definición: Definimos la medida exterior α-dimensional de Hausdorff como:

$$m_\alpha^*(E) := \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{ \sum_k |F_k|^\alpha : \{F_k\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } E \right\}$$

Obs: Observar que la cantidad $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) := \inf\left\{\sum_k |F_k|^\alpha : \{F_k\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } E\right\}$ es creciente cuando δ tiende a 0, entonces el limite $m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta$ existe, aunque puede ser infinito. En particular $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq m_\alpha^*(E)$

Propiedad 1: (Monotonía) Si $E_1 \subset E_2$ entonces $m_\alpha^*(E_1) \leq m_\alpha^*(E_2)$.
dem: La prueba es clara, cualquier cubrimiento de E_2 lo es de E_1.

Propiedad 2: (Subaditividad) $m_\alpha^*(\cup_{j=1}^\infty) \leq \sum_{j=1}^\infty m_\alpha^*(E_j)$ para cualquier familia numerable $\{E_j\}$
Dem: Fijemos $\delta > 0$ y para cada j tomamos un δ-cubrimiento $\{F_{j,k}\}_{k=1}^\infty$ de tal forma que $\sum_k |F_{j,k}|^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \epsilon/2^j$
Luego $\cup_{j,k} F_{j,k}$ es un δ-cubrimiento de E, entonces:

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \sum_{j,k} |F_{j,k}|^\alpha \leq \sum_{j=1}^\infty (\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \epsilon/2^j) \leq \sum_{j=1}^\infty m_\alpha^*(E_j) + \epsilon$$

Tomando limite cuando δ tiende a 0, y como ϵ es arbitrario se tiene la desigualdad buscada.

Propiedad 3: Si $d(E_1, E_2) > 0$ entonces $m_\alpha^*(E_1 \cup E_2) = m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2)$
dem: Basta probar que $m_\alpha^*(E_1 \cup E_2) \geq m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2)$ pues la otra desigualdad la tenemos por subaditividad.
Dado cualquier δ-cubrimiento $\mathcal{F} = \{F_j\}$ de $E_1 \cup E_2$ con $\delta < d(E_1, E_2)/2$, observemos que ningún conjunto de $\mathcal{F}$ corta simultáneamente a E_1 y E_2 entonces definimos:

$$\mathcal{F}_1 := \{F \in \mathcal{F} : E_1 \cap F \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2 := \{F \in \mathcal{F} : E_2 \cap F \neq \emptyset\}$$

Entonces $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son δ-cubrimientos de E_1 y E_2 respectivamente, entonces como $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son disjuntos tenemos:

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1) + \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_2) \leq \sum_{F\in\mathcal{F}_1} |F|^\alpha + \sum_{F\in\mathcal{F}_2} |F|^\alpha \leq \sum_{F\in\mathcal{F}} |F|^\alpha$$

donde va el menor igual porque hay conjuntos que pueden no cortan a E_1 ni a E_2.
Tomando el ínfimo en los cubrimientos y haciendo δ tender a 0 tenemos la desigualdad buscada.

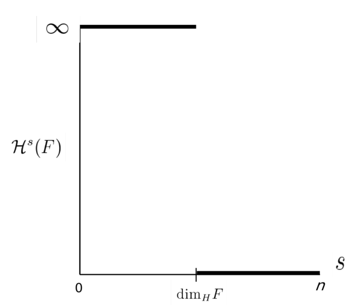
Estas 3 proposiciones nos prueban que m_α^* es una medida métricamente exterior en (X,d) entonces se restringe a una medida (que llamaremos m_α) en los Borelianos.

Propiedad 4: La medida de Hausdorff m_α (en $\mathbb{R}^d$) es invariante por traslaciones y rotaciones. Mas aun $m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E)$
dem: Observar que el diámetro es invariante por traslaciones y rotaciones.

Propiedad 5: m_0 coincide con la medida de conteo en (X,d).

Propiedad 6: En $\mathbb{R}^d$ se tiene que $m_d = \dfrac{2^d}{v_d} m$ donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y $v_d = m(B(0,1))$

Propiedad 7: Si $m_\alpha^*(E) < \infty$ y $\beta > \alpha$ entonces $m_\beta^*(E) = 0$. Análogamente, si $m_\alpha^*(E) > 0$ y $\beta < \alpha$ entonces $m_\beta^*(E) = \infty$



dem: Si $|F| < \delta$ y $\beta > \alpha$ entonces:
$$|F|^\beta = |F|^{\beta-\alpha}|F|^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha}|F|^\alpha$$
consecuentemente
$$\mathcal{H}^\delta_\beta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha}\mathcal{H}^\delta_\alpha(E) \leq \delta^{\beta-\alpha}m^*_\alpha(E)$$
como $m^*_\alpha(E) < \infty$ y $\beta - \alpha > 0$ tenemos que en el limite cuando δ tiende a 0 que $m^*_\beta(E) = 0$.
Análogamente para el otro.

Obs: Dado un boreliano $E \subset X$ de la propiedad anterior deducimos que existe un único α tal que:
$$m_\beta(E) = \begin{cases} \infty \text{ si } \beta < \alpha \\ 0 \text{ si } \alpha < \beta \end{cases}$$
En otras palabras, α esta dado por
$$\alpha := \sup\{\beta : m_\beta(E) = \infty\} = \inf\{\beta : m_\beta(E) = 0\}$$
En ese caso, decimos que E tiene dimensión de Hausdorff α y escribimos $\dim(E) = \alpha$

Definición: Decimos que una función $f : X \to Y$ es γ-Holder si $d_Y(f(x), f(y)) \leq M(d_X(x, y))^\gamma$ para todos $x, y \in X$

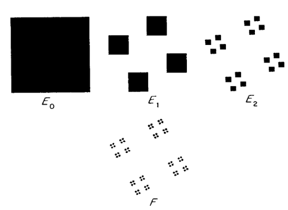
Lema: Si f esta definida en un compacto E y satisface una condición Holder con exponente γ entonces:

1. $m_\beta(f(E)) \leq M^\beta m_\alpha(E)$ donde $\beta = \frac{\alpha}{\gamma}$
2. $\dim f(E) \leq \frac{1}{\gamma}\dim E$

dem: Sea $\{F_k\}$ un cubrimiento de E, entonces $\{f(E \cap F_k)\}$ cubre $f(E)$ y $|f(E \cap F_k)| \leq M|F_k|^\gamma$ entonces:
$$\sum_k |f(E \cap F_k)|^{\alpha/\gamma} \leq M^{\alpha/\gamma} \sum_k |F_k|^\alpha$$
de aquí se deduce la parte (1).

Sea $s > \dim E$ entonces $m_{s/\gamma}(f(E)) \leq M^{s/\gamma}m_s(E) = 0$ de donde deducimos que $m_{s/\gamma}(f(E)) = 0$ entonces $\dim f(E) \leq \frac{s}{\gamma}$ (porque era el ínfimo de los que dan 0). Pero tenemos eso para todo $s > \dim E$ de aquí deducimos que $\dim f(E) \leq \frac{\dim E}{\gamma}$

Construcción del Polvo de Cantor: Tomamos $[0, 1]^2$ en cada paso de la construcción los cuadrados son subdivididos en 16 cuadrados mas pequeños con un cuarto de longitud del lado, donde nos quedamos con los cuadrados en el mismo patrón.



Teorema: Sea $F \subset [0, 1]^2$ el Polvo de Cantor, entonces $1 \leq m_1(F) \leq \sqrt{2}$ por lo cual $\dim F = 1$
dem Tomando el cubrimiento de F dado por los 4^k cuadrados de lados 4^{-k} (es decir, de diámetro $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$) en E_k, la k-esima etapa de la construcción, obtenemos un estimativo $\mathcal{H}^\delta_1(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$, cuando $k \to \infty$ tenemos $\delta \to 0$ entonces $m_1(F) \leq \sqrt{2}$.

Para la cota inferior, sea $p : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ la proyección ortogonal, es fácil verificar que $d(p(x), p(y)) \leq d(x, y)$. Además, por la construcción de F se tiene que $p(F) = [0, 1]$, entonces:
$$1 = m([0, 1]) = m_1([0, 1]) = m_1(p(F)) \leq m_1(F)$$
"Teorema:"(Calculo heurístico) Sea $F \subset [0, 1]$ el conjunto de Cantor usual, entonces $\dim F = \frac{\log 2}{\log 3}$
dem: El conjunto de Cantor F se parte en su componente izquierda $F_L = F \cap [0, 1/3]$ y su componente derecha $F_R = F \cap [2/3, 1]$. Claramente ambas componentes son geometricamente similares a F pero escaladas por una razón de $1/3$ y además $F = F_L \sqcup F_R$. Entonces, para cualquier $s > 0$:
$$m_s(F) = m_s(F_L) + m_s(F_R) = \frac{1}{3^s}m_s(F) + \frac{1}{3^s}m_s(F)$$
Asumiendo que en el valor critico $s = \dim F$ tenemos $0 < m_s(F) < \infty$ podemos dividir por $m_s(F)$ para obtener $1 = \frac{2}{3^s}$ o equivalentemente $\dim F = s = \frac{\log 2}{\log 3}$