Ejercicio 1

(a) La onda incidente está dada por $P_i' = Ae^{i(\omega t - kx)}$. En el cambio de impedancia volumétrica debido al orificio se produce una onda reflejada P_r' y una onda transmitida P_t' dentro del tubo y una onda P_1' radiada fuera del tubo a través del orificio. Expresamos estas ondas como:

$$P_r' = Be^{i(\omega t + kx)}$$

$$P_t' = Ce^{i(\omega t - kx)}$$

$$P_1' = A_1 e^{i(\omega t - ky)}$$

En el límite de bajas frecuencias ($ka, ka_0 \ll 1$) tenemos como condición de borde en $x = 0$, $y = 0$

$$P_i' + P_r' = P_t' = P_1' \qquad (1)$$

$$U_i + U_r = U_t + U_1 \qquad (2)$$

donde $U = Su$ es la velocidad volumétrica de cada onda, siendo S el área de sección transversal. De la condición (1) tenemos:

$$C = A + B\,;\, A_1 = A + B$$

Por otro lado, tenemos que $U = P'/Z_v$, siendo $Z_v = Z_e/S$ la impedancia volumétrica. Por lo tanto, de la ecuación (2) tenemos:

$$\frac{1}{Z_v^{(0)}}\,(A - B) = \frac{1}{Z_v^{(0)}}C + \frac{1}{Z_v^{(1)}}A_1$$

Donde el superíndice (0) refiere a la impedancia dentro del tubo y el (1) a la impedancia en el orificio. Combinando con la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{1}{Z_v^{(0)}}\,(A - B) = \left(\frac{1}{Z_v^{(0)}} + \frac{1}{Z_v^{(1)}}\right)(A + B)$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{2}{Z_v^{(0)}} + \frac{1}{Z_v^{(1)}}\right) = -\frac{A}{Z_v^{(1)}} \Rightarrow B = -A\left[\frac{Z_v^{(0)}}{2Z_v^{(1)} + Z_v^{(0)}}\right]$$

Ahora podemos obtener la amplitud de la onda transmitida hacia la derecha del tubo:

$$C = A + B = A\left[1 - \frac{Z_v^{(0)}}{2Z_v^{(1)} + Z_v^{(0)}}\right] = A\,\left[\frac{2Z_v^{(1)}}{2Z_v^{(1)} + Z_v^{(0)}}\right]$$

Finalmente, el coeficiente de transmisión en potencia $\alpha_T^{(P)}$ está dado por:

$$\alpha_T^{(P)} = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \left|\frac{2Z_v^{(1)}}{2Z_v^{(1)} + Z_v^{(0)}}\right|^2$$

La impedancia volumétrica del orificio está dada por:

$$Z_v^{(1)} = R + iX$$

Con

$$R \cong \frac{\rho_0 c}{S_h}\left(\frac{ka}{2}\right)^2 \; ; X \cong \frac{\rho_0 c}{S_h}\left(\frac{8}{3\pi}\right) ka$$

$$S_h = \pi a^2$$

La aproximación vale para bajas frecuencias de manera que $ka \ll 1$. La impedancia volumétrica del tubo está dada por:

$$Z_v^{(0)} = \frac{\rho_0 c}{S}$$

$$S = \pi a_0^2$$

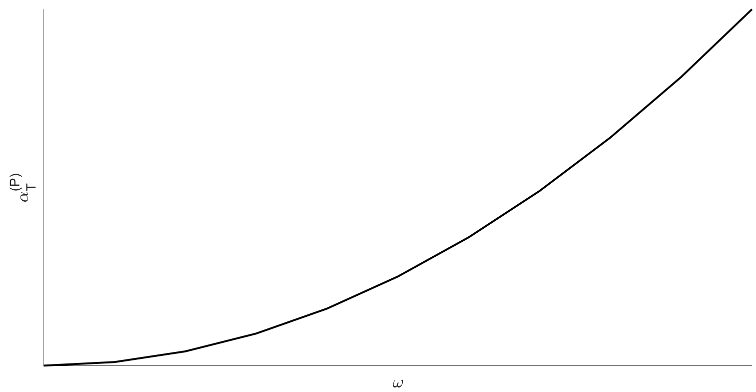
Por lo tanto, tenemos:

$$\alpha_T^{(P)} = \frac{\frac{4(\rho_0 c)^2}{S_h^2}\left[\left(\frac{ka}{2}\right)^4 + \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2 (ka)^2\right]}{(\rho_0 c)^2\left[\left(\frac{1}{S} + \frac{2}{S_h}\left(\frac{ka}{2}\right)^2\right)^2 + \frac{4}{S_h^2}\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2 (ka)^2\right]}$$

Conservando solamente los términos de orden cuadrático en (ka) tenemos:

$$\alpha_T^{(P)} \cong \frac{4S^2}{S_h^2}\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2 (ka)^2 = \frac{a_0^4}{a^4}\left(\frac{16}{3\pi}\right)^2 (ka)^2$$

(b) En el resultado anterior sustituimos $k = \omega/c$ y encontramos que el coeficiente de transmisión en potencia crece como ω^2. Por lo tanto, el gráfico $\alpha_T^{(P)}(\omega)$ corresponde a una parábola, comportándose como un filtro pasa altos.



(c) Ahora queremos averiguar el radio a del orificio para el cual el coeficiente de transmisión en potencia vale 1/2.

$$\Rightarrow \frac{a_0^4}{a^4}\left(\frac{16}{3\pi}\right)^2 (ka)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2\left(\frac{16}{3\pi}\right)^2 k^2 a_0^4$$

Finalmente llegamos a:

$$a = \sqrt{2}\left(\frac{16}{3\pi}\right)(ka_0)a_0$$

Ejercicio 2.

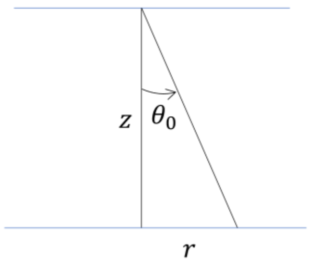
(a) El diagrama de directividad de la fuente circular está dado por:

$$H(\theta) = \frac{2J_1(ka\sin(\theta))}{ka\sin(\theta)}$$

El primer cero de J_1 se da para un ángulo θ_0 dado por:

$$ka\sin(\theta_0) = j_{11}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta_0) = \frac{j_{11}}{ka} \Rightarrow \cos(\theta_0) = [1 - \sin^2(\theta_0)]^{1/2} = \frac{1}{ka}[(ka)^2 - (j_{11})^2]^{1/2}$$



A una profundidad z, la distancia r que abarca el lóbulo principal está dado por:

$$r = z\tan(\theta_0) = z\frac{j_{11}}{[(ka)^2 - (j_{11})^2]^{1/2}}$$

Por lo tanto, la superficie S_z que "ilumina" el lóbulo principal está dada por:

$$S_z = \pi r^2 = \pi z^2\left(\frac{(j_{11})^2}{[(ka)^2 - (j_{11})^2]}\right)$$

(b) Si $f = 10^4$ Hz, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} \cong 42\ m^{-1}$. Además $a = 0{,}5$ m $\Rightarrow ka \cong 21$. El primer cero de J_1 es $j_{11} = 3{,}83$ y $z = 10$ m. Sustituyendo en la expresión hallada en la parte anterior tenemos:

$$S_z = 100\pi\left(\frac{(3{,}83)^2}{[(21)^2 - (3{,}83)^2]}\right) \cong 10{,}8\ m^2$$

(c) Una posible estrategia es utilizar una apodización en la emisión del radar. En vez de que toda la superficie del radar vibre con la misma amplitud, se puede hacer que la amplitud de vibración sea función de la distancia σ al centro, de manera que $U_0 = U_0(\sigma)$. Como el diagrama de directividad en campo lejano es proporcional a la transformada de Fourier de $U_0(\sigma)$, teóricamente es posible elegir esta función de manera que el lóbulo principal sea más ancho que el de la función J_1.

(d) El coeficiente de reflexión en potencia $\alpha_R^{(P)}$ para incidencia normal está dado por:

$$\alpha_R^{(P)} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow Z_2^2 + Z_1^2 - 2Z_2Z_1 = \alpha_R^{(P)}[Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_2Z_1]$$

$$\Rightarrow \left(1-\alpha_R^{(P)}\right) Z_2^2 - 2Z_1\left(1+\alpha_R^{(P)}\right) Z_2 + \left(1-\alpha_R^{(P)}\right) Z_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{2Z_1\left(1+\alpha_R^{(P)}\right)}{2\left(1-\alpha_R^{(P)}\right)} \pm \frac{\left[4Z_1^2\left(1+\alpha_R^{(P)}\right)^2 - 4Z_1^2\left(1-\alpha_R^{(P)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-\alpha_R^{(P)}\right)}$$

$$= Z_1\left[\frac{\left(1+\alpha_R^{(P)}\right)}{1-\alpha_R^{(P)}} \pm 2\frac{\sqrt{\alpha_R^{(P)}}}{1-\alpha_R^{(P)}}\right]$$

Tenemos $\alpha_R^{(P)} = 0{,}15$. Sustituyendo en la ecuación anterior encontramos:

$$Z_2 = \begin{cases} 2{,}264\ Z_1 \\ 0{,}442\ Z_1 \end{cases}$$

Sabemos que la onda reflejada está desfasada 180º respecto a la onda incidente. Por lo tanto $Z_2 < Z_1 \Rightarrow Z_2 = 0{,}442\ Z_1$. Tenemos

$$Z_1 = \rho c = 1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) \cdot 1500\left(\frac{m}{s}\right) = 1{,}500 \times 10^6\ Rayls$$

Finalmente

$$Z_2 = 0{,}442\ Z_1 = 6{,}630 \times 10^5\ Rayls$$