Álgebra Lineal I. Curso 2020 **Facultad de Ciencias**

Solución examen 5 de agosto 2020

Álgebra Lineal I. Curso 2020 **Facultad de Ciencias**

Examen 5 de agosto 2020

1. (30 puntos)
   Se consideran matrices cuadradas no nulas A, B de tamaño n tales que $AB = 0$.
   a) Probar que A y B son no invertibles.
   b) Probar que $r(A) + r(B) \leq n$ (sugerencia: relacionar las columnas de B con el núcleo de L_A).
   c) Deducir que si $r(A) = n - 1$, entonces $r(B) = 1$.
   d) Para $n = 4$, dar un ejemplo en que $r(A) = 1$ y $r(B) = 2$.
2. (35 puntos)
   Se consideran los puntos $A = (1, -2, 0)$ y $B = (2, 0, 4)$ en $\mathbb{R}^3$, la recta r que pasa por A y B, y π el plano perpendicular a r que pasa por $(0, 0, 0)$.
   Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:
   - $Im(T) = \pi$,
   - $T(A) = T(B)$.

   a) Hallar una base de π.
   b) Hallar una base de $N(T)$ e interpretarlo geométricamente.
   c) Probar que $N(T) \bigoplus Im(T) = V$.
   d) Probar que existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz ${}_B[T]_B$ es de la forma
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$
   con $ad - bc \neq 0$.
3. (35 puntos)
   Se considera el espacio vectoriales $V = \mathbb{k}_n[t]$ y para cada $\lambda \in \mathbb{k}$, el subconjunto
   $$S_\lambda = \{p \in V \mid p(\lambda) = 0\}.$$
   a) Probar que S_λ es un subespacio de V.
   b) Observar que $S_\lambda \subsetneq V$.
   c) Probar que $B_\lambda = \{x - \lambda, x(x - \lambda), x^2(x - \lambda), \cdots, x^{n-1}(x - \lambda)\}$ es una base de S_λ.
   d) Sean $\lambda \neq \mu$ elementos de $\mathbb{k}$,
      1) $S_\lambda \cap S_\mu \subsetneq S_\lambda$,
      2) Probar que $\dim(S_\lambda \cap S_\mu) = n - 1$,
      3) Deducir que $S_\lambda + S_\mu = V$.

Solución

1. a) Si A fuese invertible, existe A^{-1} matriz cuadrada de tamaño n que cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = Id$. Luego tendríamos

$$B = IdB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$$

Como $B \neq 0$, A no puede ser invertible.

Un argumento análogo sirve para B.

b) De $AB = 0$ se deduce que si $\{b_1, \ldots, b_n\}$ son las columnas de B, se tiene $L_A(b_i) = 0 \ \ \forall i$ entonces

$$\langle \{b_1, \ldots, b_n\} \rangle \subset N(L_A)$$

luego

$$r(B) = dim(\langle \{b_1, \ldots, b_n\} \rangle) \leq dim N(L_A)$$

Por el teorema de las dimensiones

$$n = dim(Im(L_A)) + dim(N(L_A)) \geq r(A) + r(B)$$

c) Si $r(A) = n - 1$, por la parte b), obtenemos $r(B) \leq 1$. Como $r(B) = 0$ implica $B = 0$, tiene que ser $r(B) = 1$.

d) Se pueden considerar por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) Como π pasa por $(0, 0, 0)$ y es normal a la recta r, para la cual $B - A = (1, 2, 4)$ es un vector director tenemos:

$$\pi : x + 2y + 4z = 0$$

Al ser un plano que pasa por el origen, π es un subespacio de dimensión 2, y una base del mismo es

$$\{(2, -1, 0), (0, -2, 1)\}$$

pues es un subconjunto l.i. de π con 2 elementos.

c) Como $Im(T) = \pi$, tenemos $dim(N(T)) = 1$. Además $T(A) = T(B) \implies T(B - A) = (0, 0, 0)$, es decir que

$$N(T) = \langle \{(1, 2, 4)\} \rangle$$

Geométricamente $N(T)$ es la recta paralela a r que pasa por $(0, 0, 0)$.

c) Tenemos que

$$N(T) = \langle \{(1, 2, 4)\} \rangle \ \text{ e } \ Im(T) = \pi = \langle \{(2, -1, 0), (0, -2, 1)\} \rangle$$

Luego para probar $N(T) \bigoplus Im(T) = V$ basta chequear que

$$\{(1,2,4)\} \cup \{(2,-1,0),(0,-2,1)\} = \{(1,2,4),(2,-1,0),(0,-2,1)\}$$

es base de $\mathbb{R}^3$.

d) Si consideramos como $B = \{(1,2,4),(2,-1,0),(0,-2,1)\}$ la base hallada en c), y ponemos $v_1 = (1,2,4)$, $v_2 = (2,-1,0)$, y $v_3 = (0,2,-1)$, obtenemos

- $T(v_1) = (0,0,0)$ porque $v_1 \in N(T)$.
- $T(v_2), T(v_3) \in \pi$ porque $Im(T) = \pi$.

Luego como $\{v_2, v_3\}$ es base de π tenemos $T(v_2) = av_2 + cv_3$ y $T(v_3) = bv_2 + dv_3$ es decir

$$_B[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$ tendríamos que $\{T(v_2), T(v_3)\}$ es l.d., por lo que la matriz tendría rango 1, lo que contradice $Im(T) = \pi$.

3. *a*) Queda para el estudiante.

b) Tomando $\mu \in \mathbb{k}, \mu \neq \lambda$ se tiene que el polinomio de grado 0 $\mu \in V$ no es un elemento de S_λ.

c) Como los elementos de $B_\lambda \subseteq S_\lambda$ son polinomios de grado distinto 2 a 2, se tiene que B_λ es li en S_λ.

De todas maneras, escribimos la prueba de que B_λ es li, para este caso particular. Supongamos que

$$\alpha_0(x-\lambda) + \alpha_1 x(x-\lambda) + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}(x-\lambda) = 0.$$

El término de grado mayor en el polinomio de arriba es $\alpha_{n-1}x^n$ por lo que $\alpha_{n-1} = 0$, y se deduce

$$\alpha_0(x-\lambda) + \alpha_1 x(x-\lambda) + \cdots + \alpha_{n-2}x^{n-2}(x-\lambda) = 0.$$

De manera similar, mirando el término de mayor grado, se deduce $\alpha_{n-2} = 0$ y así , se prueba que todo $\alpha_i = 0$.

Por tanto $\dim(S_\lambda) \geq n$. De la parte anterior, se deduce que $\dim(S_\lambda) = n$ y por lo tanto B_λ es base de S_λ.

d) Se tiene $x - \lambda \in S_\lambda$ y $x - \lambda \notin S_\mu$.

1) Recordemos que

$$\dim(S_\lambda + S_\mu) = \dim(S_\lambda) + \dim(S_\mu) - \dim(S_\lambda \cap S_\mu)$$

Se deduce que

$$\dim(S_\lambda) + \dim(S_\mu) - \dim(S_\lambda \cap S_\mu) \leq n+1$$

puesto que S_λ y S_μ tienen dimensión n y $S_\lambda + S_\mu$ tiene dimensión menor o igual a $n+1$. Se tiene entonces

$$\dim(S_\lambda \cap S_\mu) \geq n-1$$

y como no es todo S_λ no puede tener dimensión n.

2) Se deduce además, volviendo a la primera igualdad de la parte anterior, que $\dim(S_\lambda + S_\mu) = n + n - n + 1 = n+1$, de donde

$$S_\lambda + S_\mu = V.$$