Álgebra Lineal I
Primer semestre de 2020

Examen Febrero 2021
Prueba Práctica

1. *a*) Probar la *identidad de Lagrange*:

$$\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

   b) Deducir que si u y v son perpendiculares, el volumen del paralelipípedo determinado por los vectores $u, v, u \wedge v$ es $\|u\|^2\|v\|^2$.

2. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(a + bx + cx^2) = (a, b + c, -a, b)$.

   (i) Probar que T es inyectiva y no sobreyectiva.

   (ii) Probar que $Im(T) \bigoplus U = \mathbb{R}^4$, siendo U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 0, 2, 0)$.

   (iii) Hallar una transformación lineal $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2[x]$ que verifica $S \circ T = id_{\mathbb{R}^4}$ y $N(S) = U$.

3. Consideremos la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

   (i) Calcular su rango.

   (ii) Determinar geométricamente la imagen de L_A, y dar alguna ecuación que la caracterice.

   (iii) Dar una base de $\frac{\mathbb{R}^4}{N(L_A)}$.

Solución(boceto)

1. *a*) Como $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\||sen(\alpha)|$ y $\|\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\||cos(\alpha)|$, siendo α el ángulo entre u y v, se deduce usando la igualdad
$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1.$$
   b) El cuadrado del volumen en cuestión es el producto
$$\|u\|^2\|v\|^2\|u \wedge v\|^2.$$
   La perpendicular de u y v implica $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2$ por la parte anterior. Se deduce entonces que el cuadrado el volumen a buscar es $\|u\|^4\|v\|^4$ y por lo tanto la tesis.

2. *a*) $T(a + bx + cx^2) = 0$ implica $a = b + c = b = 0$ de donde $a = b = c = 0$. Se deduce que T es inyectiva.
   Por otra parte, el vector $(1, 0, 0, 0)$ no está en la imagen de T porque su primera y su tercera coordenadas no son opuestas. Se deduce que T no es sobreyectiva.
   b) Se prueba fácilmente que la imagen de T tiene dimensión 3 y que U tiene dimensión 1, por lo que alcanza con ver que $U \cap Im(T) = 0$. Eso es cierto porque $(a, b, c, d) \in U$ implica $c = 2a, b = d = 0$ y $(a, b, c, d) \in Im(T)$ implica $c = -a$, se deduce $2a = -a$ de donde $a = c = 0$.
   c) $S(1, 0, 2, 0) = 0$, $S(1, 0, -1, 0) = 1$, $S(0, 1, 0, 1) = x$ y $S(0, 1, 0, 0) = x^2$. son condiciones que determinan S.

3. *a*) Es fácil ver que la tres filas de A son ld y las dos primeras no, por lo tanto A tiene rango 2.
   b) $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de rango 2, por lo tanto es un plano por el origen, paralelo a los dos primeros vectores columna. Su ecuación implícita es: $2x - 5y + z = 0$.
   c) El núcleo en cuestión tiene dimensión 2 por el teorema de las dimensiones, por lo que el espacio buscado tiene dimensión $4 - 2 = 2$. Buscamos entonces una base con dos elementos.
   El primer teorema de isomorfismo nos permite asegurar que por ejemplo $[(1, 0, 0)]$ y $[0, 1, 0]$, por ser clases de elementos que van a parar a dos linealmente independientes de la imagen, son li en el cociente en cuestión.