Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática
Primer semestre de 2013

Examen marzo 2021

1.
   a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por $(1,2,1)$ y es perpendicular al vector $(1,1,1)$.
   b) Probar que π no es un subesapcio de $\mathbb{R}^3$ y hallar la ecuación del plano π' paralelo a π que sí es subespacio.
   c) Calcular la distancia de π a π'.

2. Sea
$$T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$$
la transformación lineal cuya matriz asociada de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ 0 & 2 & 2 & b \end{pmatrix},$$
para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.
Recordamos que la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la ordenamos así:
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   a) Hallar $T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) Hallar $\dim Im(T)$ y $\dim N(T)$, discutiendo según a, b.

3.

4. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que T es *nilpotente* si $\exists s \in \mathbb{N}$ tal que $T^s = 0$.
   a) Probar que si T es nilpotente, entonces no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
   b) Si V es de dimensión n probar que T es nilpotente $\iff$ $T^n = 0$. (*Sugerencia:* considerar si las inclusiones $\ker T^i \subset \ker T^{i+1}$ son estrictas o no).
   c) Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V. Se define la transformación lineal $T : V \to V$ de la siguiente forma:
$$T(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & i = n \end{cases}$$
   Probar que $T^n = 0$ y $T^{n-1} \neq 0$.
   d) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada i, $2 \leq i \leq n$, construir una transformación lineal nilpotente $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T^i = 0$ y $T^{i-1} \neq 0$.