Álgebra Lineal y Geometría I
Primer semestre de 2022

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen teórico (25 puntos). 11/07/22.

1. **(6 puntos).** En los casos que siguen se pide dar la fórmula y explicar cómo se llega a ella.

   a) Ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector no nulo $n = (a, b, c)$.

   b) Ecuación del plano que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y es ortogonal al vector no nulo $n = (a, b, c)$.

   Alcanza con que en cada caso den una ecuación, no tienen que dar todas las ecuaciones posibles.

2. **(6 puntos).** Sean A y B matrices 2×2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (indicando por qué) o falsas (dando un contraejemplo).

   a) Vale $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

   b) Vale $\det(-A) = -\det(A)$.

   c) Si $AB = -BA$, entonces[1] $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

3. **(7 puntos).** Sea V un espacio vectorial.

   a) Definir conjunto linealmente dependiente (LD) y conjunto linealmente independiente (LI).

   b) Dar un ejemplo de un conjunto LD y de uno LI, justificando las afirmaciones.

   c) Sean $u, v, w \in V$. Probar que si $\{u, v\}$ es LI y w no es combinación lineal de $\{u, v\}$, entonces $\{u, v, w\}$ es LI.

4. **(6 puntos).** Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

   a) Probar que vale $T(o) = o$, es decir, T lleva el vector nulo de V en el vector nulo de W.

   b) Definir el *núcleo* de T.

   c) Probar que T es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker}(T) = \{o\}$.

Nota. En las demostraciones se deben justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo “usando el teorema que dice ..., entonces ...”

[1] Recordar: $A^2 := A \cdot A$, para toda matriz $A \in M_2$.