

Procesos estocásticos y simulación

Licenciatura en Matemática - FCIEN

22 de junio de 2023

1. Datos del curso

El curso Procesos estocásticos y simulación es un curso opcional de la licenciatura en matemática. Será valido también para las carreras de grado Licenciatura en Estadística e Ingeniería Físico-Matemática¹. Podrá también con la asignación de tareas especiales ser validado en los posgrados de matemática e ingeniería matemática².

Se trata de un curso de 15 semanas de duración, cada semana consta de dos clases teóricas y una clase de práctico-taller, computándose 12 créditos en la Licenciatura en Matemática.

El equipo docente está integrado por Ernesto Mordecki (responsable) junto con Nicolás Frevenza y Manuel Sáenz, y Javier Perazza (práctico)

2. Prerequisitos

Se espera generar intuición sobre los objetos matemáticos involucrados y sus propiedades mediante simulación. Son requisitos imprescindibles:

1. 90 créditos aprobados de la Licenciatura en matemática o carreras equivalentes (como estadística o ingeniería).
2. Un curso del área de la probabilidad y estadística, como ser Probabilidad (FCIEN), Probabilidad y Estadística (FING), Probabilidad 1 o 2 (FCEA)

¹Autorización en trámite

²Autorización en trámite

Adicionalmente, son requisitos recomendados

1. Un segundo curso en el área de probabilidad y estadística o teoría de la medida.
2. Conocimientos de programación, en particular en R o Python.

3. Contenidos reumidos

La edición 2023 del curso “Procesos estocásticos y simulación” estará dedicada al estudio de las martingalas en tiempo discreto, al movimiento Browniano o proceso de Wiener, la integral estocástica y tres de sus herramientas más notables: la fórmula de Itô (o cambio de variable), las ecuaciones diferenciales estocásticas y el teorema de Girsanov (o cambio de medida). La parte final del curso tendrá un carácter experimental y estará dedicada a algunas aplicaciones recientes de las difusiones en machine learning: (i) la generación de imágenes aleatorias, (ii) el problema de la determinación de una dirección en un espacio de gran dimensión (spike problem), (iii) la generación de música aleatoria.

4. Contenidos detallados

1. **Martingalas de tiempo discreto:** Esperanza condicional y propiedades. Martingalas. Teorema del muestro opcional. Convergencia de martingalas. [1]
2. **Martingalas de tiempo continuo:** Generalización de los resultados a tiempo discreto.
3. **Movimiento Browniano:** Vectores gaussianos. Definición del proceso de Wiener o movimiento Browniano. Construcción del proceso de Wiener. Propiedades de las trayectorias. Distribución del máximo y problemas de barrera. [2, 1]
4. **Aplicación 1:** Parada óptima para el movimiento Browniano.
5. **Integración estocástica:** Integración estocástica con respecto al movimiento browniano. Integrales estocásticas con límite superior variable. Extensión de la clase de integrandos. La fórmula de Itô. [3]

6. **Ecuaciones diferenciales estocásticas:** Ecuaciones diferenciales estocásticas. Exponente estocástico. Transformación de Girsanov. [3]
7. **Aplicación 2:** Muestreo en un espacio de imágenes. [5]
8. **Aplicación 3:** Detección de una dirección en grandes dimensiones (spike problem) [6]
9. **Aplicación 4:** Generación de piezas musicales. [7]

Referencias

- [1] Teoría de la Probabilidad (2a. edición). V. Petrov, E. Mordecki. DIRAC, Facultad de Ciencias, Montevideo, Uruguay (2008), 267 pags.
- [2] Procesos estocásticos. Notas de curso. E. Mordecki (2020)
- [3] Stochastic Processes. Andrei Borodin. Birkhauser (2017)
- [4] Probability. A. N. Shiryaev. Springer, 1996.
- [5] Score-based generative modeling through stochastic differential equations. Y. Song, J. Sohl-Dickstein, D. P. Kingma, A. Kumar, S. Ermon, B. Poole. arXiv:2011.13456v2, 2021.
- [6] Posterior Sampling from the Spiked Models via Diffusion Processes. A. Montanari, Y. Wu. arXiv:2304.11449v1 (2023)
- [7] Noise2Music: Text-conditioned Music Generation with Diffusion Models. Q. Huang, D. S. Park, T. Wang, T. I. Denk, A. Ly, N. Chen, Z. Zhang, Z. Zhang, J. Yu, C. Frank, J. Engel, Q. V. Le, W. Chan, Z. Chen, W. Han. arXiv:2302.03917v2 (2023).