Álgebras de Boole

Definición: Un *álgebra de Boole* $\mathbb{A}$ es una sextupla $\mathbb{A} = (A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ donde A es un conjunto $0, 1 \in A$, los mapas $\wedge, \vee$ son operaciones binarias en A y $'$ es una operación unaria en A tales que:

$$
\begin{aligned}
&(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) && (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) && \text{(asociatividad)}\\
&x \vee y = y \vee x && x \wedge y = y \wedge x && \text{(conmutatividad)}\\
&x \vee x' = 1 && x \wedge x' = 0 && \text{(complementos)}\\
&x \vee 0 = x && x \wedge 1 = x && \text{(neutros)}\\
&x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) && x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) && \text{(distributividad)}
\end{aligned}
$$

Definición: Dadas dos álgebras de Boole $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ decimos que $f : A \to B$ es un *homomorfismo de álgebras de Boole* si:

$$
\begin{aligned}
f(0_{\mathbb{A}}) &= 0_{\mathbb{B}}\\
f(1_{\mathbb{A}}) &= 1_{\mathbb{B}}\\
f(x \vee y) &= f(x) \vee (y)\\
f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y)\\
f(x') &= f(x)'
\end{aligned}
$$

Proposición: (Propiedades básicas): Sea $\mathbb{A}$ un algebra de Boole, entonces para todos $x, y \in A$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
&x \vee x = x && x \wedge x = x && \text{(idempotencia)}\\
&1 \vee x = 1 && x \wedge 0 = 0 && \text{(ceros)}\\
&x = x \vee (x \wedge y) && x \vee y = x \vee (y \wedge x') && \text{(absorción y diferencia)}\\
&(x \vee y)' = x' \wedge y' && (x \wedge y)' = x' \vee y' && \text{(de morgan)}\\
&x'' = x && 0' = 1 && \text{(doble complemento)}
\end{aligned}
$$

Ejemplos varios

(1) Si consideramos $A = \{0\}$ con las operaciones triviales obtenemos la llamada álgebra de Boole trivial.

(2) Si X es un conjunto podemos considerar $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \ ^c, \emptyset, X)$, esto es claramente un álgebra de Boole que llamamos álgebra de Boole de las partes de X.

(3) Si (X, τ) es un espacio topológico consideramos $\mathscr{C}\ell(X) := \{A \in \tau : A \text{ es cerrado}\}$ entonces $(\mathscr{C}\ell(X), \cup, \cap, \ ^c, \emptyset, X)$ es un álgebra de Boole que llamamos la álgebra de clopens de (X, τ).

(4) Si $\mathbb{A} = (A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ es un álgebra de Boole entonces $\mathbb{A}^{\mathsf{op}} = (A, \wedge, \vee, ', 1, 0)$ es un álgebra de Boole que llamamos álgebra de Boole opuesta y $' : A \to A$ es un isomorfismo entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^{\mathsf{op}}$

Orden en un álgebra de Boole

Definición: Sea $\mathbb{A}$ un álgebra de Boole, definimos en A la relación $x \leq y \equiv x = x \wedge y$ entonces tenemos que:

1. $\leq$ es un orden parcial en A (reflexiva, antisimetrica y transitiva)
2. $x \leq y$ si y solo si $y = x \vee y$

Observación: Observar que el orden esta definido de manera algebraica, luego es fácil verificar que un isomorfismo de álgebras de Boole preserva el orden.

Observación: En el caso de un álgebra de conjuntos, este orden se reduce al orden de la inclusión $\subset$.

Definición: Sea $\mathbb{A}$ un álgebra de Boole, decimos que $F \subset A$ es un filtro si:

1. $1 \in F$
2. Si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$
3. Si $a \in F$ y $a \leq b$ entonces $b \in F$

Decimos que el filtro es propio si $0 \notin F$, decimos que F es un ultrafiltro si es maximal respecto al orden de la inclusión.

Dualidad entre anillos y álgebras de Boole

Definición: Sea $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$ un anillo, decimos que R es un *anillo de Boole* si $a^2 = a$ para todos $a \in R$

Proposición: Si R es un anillo de Boole entonces:

1. $a + a = 0$ para todo $a \in R$
2. R es un anillo conmutativo

Dem:
Observar que $a + a = (a+a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a$ de aquí se deduce que $a + a = 0$.

Por otro lado, sean $a, b \in R$ entonces tenemos que $a + b = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b = (a+b) + (ab + ba)$ de aquí deducimos que $ab + ba = 0$ pero como $1_R = -1_R$ tenemos que $ab = ba$. ∎

Proposición / definición:

- Sea $\mathbb{A}$ un álgebra de Boole su anillo de Boole asociado $R_{\mathbb{A}}$ esta dado por $R_{\mathbb{A}} = (A, +, \cdot, 0, 1)$ donde $a + b := (a \wedge b') \vee (b \wedge a')$ y $a \cdot b := a \wedge b$, verificar que así definido $R_{\mathbb{A}}$ es un anillo es un poco tedioso, que es un anillo de Boole es inmediato por la idempotencia de $\wedge$.
- Sea $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$ un anillo de Boole su álgebra de Boole asociada $\mathbb{A}_R$ esta dada por $\mathbb{A}_R = (R, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ donde $a \vee b := a + b + a \cdot b$, $a \wedge b := a \cdot b$ y $a' = 1 - a$
- Estas construcciones son mutuamente inversas.

Observación: Un anillo de Boole también admite un orden parcial que resulta ser idéntico al de su álgebra de Boole asociada pues $a \wedge b = a \cdot b$.

Proposición: Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras de Boole, entonces $f : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras de Boole si y solo si es un homomorfismo de anillos entre sus anillos de Boole asociados.
Dem:
Supongamos que f es un homomorfismo de álgebras de Boole, entonces:

- Es inmediato ver que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$
- $f(x + y) = f((a \wedge b') \vee (b \wedge a')) = f(a \wedge b') \vee f(b \wedge a') = (f(a) \wedge f(b)') \vee (f(b) \wedge f(a)') = f(a) + f(b)$
- $f(x \cdot y) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x) \cdot f(y)$

luego f es un homomorfismo entre los anillos asociados.
Recíprocamente, si f es un homomorfismo entre los anillos asociados:

- Es inmediato ver que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$
- $f(x \wedge y) = f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = f(x) \wedge f(y)$
- $f(x \vee y) = f(x + y + x \cdot y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x') = f(1 - x) = f(1) - f(x) = 1 - f(x) = f(x)'$

luego f es un homomorfismo entre las álgebras asociadas. ∎

Proposición: Sea R un anillo de Boole entonces $I \subset R$ es un ideal si y solo si $F_I := \{a' : a \in I\}$ ¿? es un filtro en $\mathbb{A}_R$
Dem:
Supongamos que I es un ideal, y consideramos F_I como en la letra, entonces:

- $1 \in F_I$ pues $0 \in I$ al ser I un ideal y $1 = 0'$
- Si $a, b \in F_I$ entonces $a', b' \in I$ de aquí deducimos que $a' + b' + a'b' \in I$ luego $(a' + b' + a'b')' \in F_I$ pero $(a' + b' + a'b')' = (a' \vee b')' = a \wedge b$, es decir $a \wedge b \in F_I$
- Si $a \in F_I$ y $b \in R$ es tal que $a = a \wedge b$ (es decir $a \leq b$) queremos ver que $b \in F_I$ o equivalentemente $b' \in I$, pero observar que $a' \in I$ y se tiene $a' = a' \vee b' = a' + b' + a'b'$ luego $b' = a'b' \in I$ pues I es un ideal.

Ahora si F es un filtro queremos probar que $I_F = \{a' : a \in F\}$ es un ideal:

- $0 \in I_F$ pues $0 = 1'$ y $1 \in F$
- Si $a, b \in I_F$ queremos ver que $a + b \in I_F$ pero $a + b \in I_F$ si y solo si $(a+b)' \in F$ es decir $[(a \wedge b') \vee (b \wedge a')]' \in F$ es decir $(a' \vee b) \wedge (b' \vee a) \in F$ luego alcanza probar que $(a' \vee b), (b' \vee a) \in F$ pero recordar que $a, b \in I_F$ luego $a', b' \in F$ y por lo tanto $a' \wedge b' \in F$, finalmente observar que $(a' \wedge b') \leq (a' \vee b)$ y $(a' \wedge b') \leq (b' \vee a)$

- Si $a \in I_F$ queremos ver que $-a \in I_F$ pero $a = -a$ pues es un anillo de Boole.
- Si $a \in I_F$ queremos ver que $ab \in I_F$ para cualquier b. Esto equivale a ver que $(ab)' \in F$ es decir $a' \vee b' \in F$ y esto es claro pues recordar que como $a \in I_F$ entonces $a' \in F$ y se tiene que $a' \leq a' \vee b'$

Esto prueba el resultado ■

Ejemplos de anillos de Boole

(1) Uno de los anillos de Boole mas sencillos que podemos considerar es $\mathbb{Z}_2$

(2) Si R es un anillo de Boole entonces vimos que $1+1=0$ y que $Z(R) = R$ pues es conmutativo por lo tanto podemos considerar el homomorfismo de anillos $\lambda : \mathbb{Z}_2 \to R$ dado por $\lambda(\overline{n}) = n1$, esto nos induce una multiplicación $\mathbb{Z}_2 \times R \to R$ dada por $\overline{n}a = \lambda(\overline{n}) \cdot a$ a que dota a R con la estructura de una $\mathbb{Z}_2$-álgebra.

(3) Si X es un espacio topológico entonces $C(X, \mathbb{Z}_2)$ con las operaciones punto a punto es un anillo de Boole.

Proposición: (IMPORTANTE) En el ejemplo anterior el mapa $f \mapsto V_f := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es un isomorfismo de anillos entre $C(X, \mathbb{Z}_2)$ y $R_{\mathscr{C}\ell(X)}$
Dem:
Es claro que el codominio es el indicado pues si $f \in C(X, \mathbb{Z}_2)$ entonces $f^{-1}(\{1\})$ es un abierto y cerrado en X
Para ver que es un morfismo de anillos observar que si $f, g \in C(X, \mathbb{Z}_2)$:

- 1 va al 1: Si pues $V_1 = \{x \in X : 1 \neq 0\} = X$
- 0 va al 0: Si pues $V_0 = \{x \in X : 0 \neq 0\} = \emptyset$
- Respeta suma: Si pues $V_{f+g} = \{x \in X : (f+g)(x) \neq 0\} = \{x \in X : f(x) + g(x) \neq 0\} = (V_f \setminus V_g) \cup (V_g \setminus V_f) = V_f + V_g$
- Respeta producto: Si pues $V_{fg} = \{x \in X : (fg)(x) \neq 0\} = \{x \in X : f(x)g(x) \neq 0\} = V_f \cap V_g = V_f \cdot V_g$

Ahora, para ver que es biyectiva observar que si $f \neq g$ entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = 1$ y $g(x) = 0$ o viceversa, en cualquiera de los dos casos $V_f \neq V_g$, para ver la sobreyectividad, dado $A \in R_{\mathscr{C}\ell(X)}$ basta tomar $f = \mathbb{1}_A$, que es continua pues A abierto y cerrado, luego se tiene $A = V_f$ ■

(4) Si $\alpha : X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos , entonces $\alpha^* : C(Y, \mathbb{Z}_2) \to C(X, \mathbb{Z}_2)$ dada por $\alpha^*(f) := f \circ \alpha$ es un homomorfismo de anillos y un isomorfismo si α es un homeomorfismo.

(5) La correspondencia $(X \overset{\alpha}{\to} Y) \mapsto (C(Y, \mathbb{Z}_2) \overset{\alpha^*}{\to} C(X, \mathbb{Z}_2))$ es un functor contravariante de la categoría de los espacios topológicos en la de los anillos de Boole.

Radical de un anillo de Boole

Proposición: Si R es un anillo de Boole entonces rad$(R) = 0$ (donde rad(R) es la intersección de todos los ideales maximales de R).
Dem:
Si $b \in R$ no es 0 entonces $1 - b$ no es invertible y por lo tanto esta incluido en un ideal maximal M, y entonces $b \notin M$ ■

Caracteres de un álgebra de Boole $\mathbb{B}$

Definición: Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole, un *carácter* de $\mathbb{B}$ es un homomorfismo $\chi : \mathbb{B} \to \mathbb{Z}_2$. Cada carácter χ es entonces un elemento del conjunto producto $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{B}}$

Proposición: El mapa $\chi \mapsto \ker \chi$ es una biyeccion entre el conjunto de caracteres de $\mathbb{B}$ y el conjunto de ideales maximales de $\mathbb{B}$.
Dem
Por un lado tenemos que $\frac{\mathbb{B}}{\ker \chi} \cong \mathbb{Z}_2$ que es un cuerpo luego $\ker \chi$ es un ideal maximal

Recíprocamente, si M es un ideal maximal entonces observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, dotted, "\phi := \Delta \circ \pi"] & \\ \frac{\mathbb{B}}{M} \arrow[r, "\cong_\Delta"'] & \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd}$$

Ahora, como $\frac{\mathbb{B}}{M}$ es un anillo de Boole, todos sus elementos son idempotentes, pero también es un cuerpo, luego debe ser el anillo con dos elementos 0 y 1. De aquí observamos que $\phi := \Delta \circ \pi$ es un carácter y se tiene $M = \ker \phi$ ■

Proposición: Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole, en $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{B}}$ consideramos la topología producto, entonces $\mathbb{X}_{\mathbb{B}} := \{\chi : \mathbb{B} \to \mathbb{Z}_2 : \chi \text{ es un carácter}\}$ con la topología inducida de $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{B}}$ es un espacio de Stone, es decir, es de Hausdorff, compacto y totalmente inconexo.
Dem:

- Es claro que es de Hausdorff pues es un subespacio de un espacio de Hausdorff.
- Para ver que es compacto nos alcanza ver que es cerrado (pues $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{B}}$ es compacto por Tijonov), para esto tomamos una red χ_i tal que $\chi_i \xrightarrow{i} \chi$ (recordar que esta es la topología de la convergencia puntual) luego $\chi_i(x) \xrightarrow{i} \chi(x)$, pero como en $\mathbb{Z}_2$ tenemos la topología discreta esto quiere decir que a partir de un cierto i_0 la sucesión $\chi_i(x)$ es constante igual a $\chi(x)$, de aquí deducimos que χ es un carácter, luego $\mathbb{X}_{\mathbb{B}}$ es cerrado luego compacto.
- Es totalmente inconexo pues es un subespacio de un espacio totalmente inconexo, esto se debe a que el producto de espacios totalmente disconexos lo es. (Argumentar por absurdo y usar la proyección).

Esto prueba el resultado $\blacksquare$

Proposición: Sea $\mathbb{B}$ un anillo de Boole, dado $b \in \mathbb{B}$ sea $V_b := \{\chi \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}} : \chi(b) = 1\}$, por utilizar la topología producto sabemos que $\{V_b : b \in \mathbb{B}\}$ es una subbase de la topología de $\mathbb{X}_{\mathbb{B}}$. En este caso también se verifica que es una base.
Dem:
Primero observemos que si $a, b \in \mathbb{B}$ entonces se tiene que:

$$V_a \cap V_b := \{\chi \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}} : \chi(a) = 1 \text{ y } \chi(b) = 1\} = \{\chi \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}} : \chi(a)\chi(b) = 1\} = \{\chi \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}} : \chi(ab) = 1\} = V_{ab}$$

Luego una base viene dada por $\{\bigcap_{i=1}^n V_{b_i} : n \in \mathbb{N} \text{ y } b_i \in \mathbb{B}\} = \{V_{\prod_{i=1}^n b_i} : n \in \mathbb{Z} \text{ y } b_i \in \mathbb{B}\} = \{V_b : b \in \mathbb{B}\}\blacksquare$

Corolario: Sea $\mathbb{B}$ un anillo de Boole entonces $\mathbb{B} \cong R_{\mathscr{C}\ell(\mathbb{X}_{\mathbb{B}})}$ vía el mapa $b \mapsto V_b$
Dem:
Probar que es un morfismo de anillos es análogo a la cuenta realizada en la proposición anterior. Para ver que es biyectiva observar que:

- Inyectiva: Esto es equivalente a probar que el único elemento mapeado al 0 es 0, observar que si $1 \neq b \neq 0$ entonces $1-b$ no es invertible luego existe M ideal maximal que contiene a $1-b$ pero no a b, recordar que $M = \ker \chi$ para algún carácter χ, luego $b \notin \ker \chi$, es decir, $V_b \neq \emptyset$.
- Sobreyectiva: Sea $A \in \mathscr{C}\ell(\mathbb{X}_{\mathbb{B}})$ entonces $A = V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n}$ observar que entonces:

  $$A^{\complement} = \bigcap_{j=1}^{n} (V_{b_j})^{\complement} = \bigcap_{j=1}^{n} V_{1-b_j} = V_{\prod_{j=1}^n (1-b_j)}$$

  luego tenemos que $A = V_{1-\prod_{j=1}^n (1-b_j)}$

Esto prueba el resultado $\blacksquare$

Corolario: Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole, entonces se tiene que $\mathbb{B} \cong_{V_b} R_{\mathscr{C}\ell(\mathbb{X}_{\mathbb{B}})} \cong_{\mathbb{1}_A} C(\mathbb{X}_{\mathbb{B}}, \mathbb{Z}_2)$

Teorema: Sean X, Y espacios de Stone, si $R_{\mathscr{C}\ell(X)} \cong R_{\mathscr{C}\ell(Y)}$ entonces X es homeomorfo a Y.
Dem:
En efecto, supongamos que $\Gamma : R_{\mathscr{C}\ell(X)} \to R_{\mathscr{C}\ell(Y)}$ es un isomorfismo.

Si $x \in X$ entonces $\{x\} = \bigcap\{V : V \in \mathscr{C}\ell_x\}$, donde $\mathscr{C}\ell_x$ es la base local en x formada por los elementos de $\mathscr{C}\ell(X)$ que contienen a x.

La familia de compactos $\{\Gamma(V) : V \in \mathscr{C}\ell_x\}$ tiene intersección no vacía (pues tienen la P.I.F e Y es compacto). Supongamos que y esta en dicha intersección.

Si $V_0 \in \mathscr{C}\ell_x$ entonces $\Gamma(V_0)$ es un abierto (y cerrado) en Y que contiene a y. Como Γ^{-1} preserva el orden (recordar que es la inclusión), se tiene que $\Gamma^{-1}(W) \in \mathscr{C}\ell_x$ para cualquier $W \in \mathscr{C}\ell_y$ tal que $W \subset \Gamma(V_0)$, ya que $\Gamma^{-1}(W)$ es abierto, cerrado y contenido en V_0.
Veamos esto con mas detalle, supongamos que $x \notin \Gamma^{-1}(W)$ entonces $V_0 \setminus \Gamma^{-1}(W)$ es un abierto y cerrado que contiene a x, luego deberíamos tener $y \in \Gamma(V_0 \setminus \Gamma^{-1}(W)) = \Gamma(V_0) \setminus W$ lo cual es un absurdo.

Sea $y' \neq y$, como Y es Hausdorff y $\mathscr{C}\ell(Y)$ es una base de la topología de Y, existe $W \in \mathscr{C}\ell_y$ que no contiene a y' y tal que $\Gamma^{-1}(W) \in \mathscr{C}\ell_x$ y por lo tanto $y' \notin \bigcap\{\Gamma(V) : V \in \mathscr{C}\ell_x\}$

En otras palabras, dicha intersección es precisamente el singulete $\{y\}$. Esta correspondencia $x \mapsto y$ define una función $\epsilon_X^Y : X \to Y$, que es evidentemente continua, la correspondiente función $\epsilon_Y^X : Y \to X$ es evidentemente la inversa de ϵ_X^Y, luego estas funciones son homeomorfismos inversos. $\blacksquare$.

Definición: Sea X un espacio topológico y $\mathbb{B} := C(X,\mathbb{Z}_2)$. Definimos el *carácter asociado a* $x \in X$ como el mapa ϵ_x dado por la evaluación, es decir, $x \mapsto (f \mapsto f(x))$. El mapa $X \to \mathbb{X}_{\mathbb{B}}$ así definido es continuo, mas aun $\epsilon_{(\cdot)} = \epsilon_X^{\mathbb{X}_{C(X,\mathbb{Z}_2)}}(\cdot)$
Dem:
Recordar primero que tenemos $R_{\mathscr{C}\ell(X)} \cong C(X,\mathbb{Z}_2) \cong R_{\mathscr{C}\ell(\mathbb{X}_{C(X,\mathbb{Z}_2)})}$ luego por el teorema se tiene que X es homeomorfo a $\mathbb{X}_{C(X,\mathbb{Z}_2)}$ además conocemos este homeomorfismo, pues en la notación del teorema anterior sabemos que $\Gamma = \mathbb{1}_A \circ V_b = \mathbb{1}_{V_b}$ luego el isomorfismo es el mapa $\epsilon_X^{\mathbb{X}_{C(X,\mathbb{Z}_2)}}$ asociado a Γ.

Intentemos calcular el mapa, fijemos un $x_0 \in X$ y sea $\Delta \in \mathscr{C}\ell_{x_0}$ entonces $\Gamma(\Delta) = \{\chi \in \mathbb{X}_{C(X,\mathbb{Z}_2)} : \chi(\mathbb{1}_\Delta) = 1\}$, recordar que al intersectar sobre todos los posibles Δ solo hay un elemento en esa intersección, ese elemento es la imagen de x_0 por el homeomorfismo, luego basta verificar que

$$\epsilon_{x_0} \in \bigcap_{\Delta \in \mathscr{C}\ell_{x_0}} \{\chi \in \mathbb{X}_{C(X,\mathbb{Z}_2)} : \chi(\mathbb{1}_\Delta) = 1\}$$

lo cual es claramente cierto, luego tenemos que $\epsilon_{(\cdot)} = \epsilon_X^{\mathbb{X}_{C(X,\mathbb{Z}_2)}}(\cdot)$ como se quería probar $\blacksquare$

Proposición: Sea $\beta : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ un homomorfismo de anillos de Boole. Entonces $\chi_1 := \chi_2 \circ \beta$ es un elemento de $\mathbb{X}_{\mathbb{B}_1}$ para toda $\chi_2 \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}_2}$
Dem:
Sean $a, b \in \mathbb{B}_1$ entonces tenemos que: $\chi_1(a+b) := \chi_2(\beta(a+b)) = \chi_2(\beta(a)+\beta(b)) = \chi_2(\beta(a)) + \chi_2(\beta(a)) = \chi_1(a) + \chi_1(b)$. Es análogo para las otras operaciones $\blacksquare$

Proposición: El mapa $\beta_* : \mathbb{X}_{\mathbb{B}_2} \to \mathbb{X}_{\mathbb{B}_1}$ definido como $\chi_1 \mapsto (\chi_2 \circ \beta)$ es continuo
Dem: Sea χ_i una red tal que $\chi_i \xrightarrow{i} \chi$ queremos ver que $\beta_*(\chi_i) \xrightarrow{i} \beta_*(\chi)$, recordar nuevamente que estamos en la topología de la convergencia puntual, luego el resultado es claro $\blacksquare$

Proposición: Sea $\alpha : X_1 \to X_2$ una función continua entre dos espacios de Stone, y sea $\alpha^* : C(X_2,\mathbb{Z}_2) \to C(X_1,\mathbb{Z}_2)$ el morfismo inducido por α entre los correspondientes anillos de Boole. Si Y_1 e Y_2 son los espacios de caracteres de $C(X_2,\mathbb{Z}_2)$ y $C(X_1,\mathbb{Z}_2)$ respectivamente entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\epsilon_{(\cdot)}"', "\cong"] & X_2 \arrow[d, "\cong"', "\epsilon_{(\cdot)}"] \\
Y_1 \arrow[r, "(\alpha^*)_*"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

Dem:
Sea $x_1 \in X_1$ y sea $\chi_2 \in C(X_2,\mathbb{Z}_2)$ ¿? entonces tenemos que:

$$\epsilon_{\alpha(x_1)}(\chi_2) = \chi_2(\alpha(x_1)) = (\chi_2 \circ \alpha)(x_1) = \epsilon_{x_1}(\alpha^*(\chi_2)) = (\alpha^*)_*(\epsilon_{x_1})\Big|_{\chi_2}$$

como se quería probar $\blacksquare$

Dualidad de Stone

Definición: Sea $\mathbb{B}$ un anillo de Boole y $\mathbb{X}_{\mathbb{B}}$ su espacio de caracteres, dado $b \in B$ definimos su *transformada* $\widehat{b} : \mathbb{X}_{\mathbb{B}} \to \mathbb{Z}_2$ como $\widehat{b}(\chi) := \chi(b)$.

Proposición: Se tiene que $V_{\widehat{b}} = V_b$ para todo $b \in \mathbb{B}$, donde recordar que si $\mathbb{A}$ es un álgebra de Boole definimos:

- Para $f \in C(\mathbb{A},\mathbb{Z}_2)$ definimos $V_f := \{x \in \mathbb{A} : f(x) \neq 0\}$
- Para $a \in \mathbb{A}$ definimos $V_a := \{\chi \in \mathbb{X}_{\mathbb{A}} : \chi(a) = 1\}$

Dem
Observar que tenemos $V_{\widehat{b}} = \{x \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}} : \widehat{b}(x) \neq 0\} = \{\chi \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}} : \chi(b) \neq 0\} = \{\chi \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}} : \chi(b) = 1\} = V_b$ $\blacksquare$

Corolario: Sea $\mathbb{B}$ un anillo de Boole entonces $\widehat{b} \in C(\mathbb{X}_{\mathbb{B}},\mathbb{Z}_2)$

Proposición: Sea $\mathbb{B}$ un anillo de Boole, entonces el mapa $\widehat{\ } : \mathbb{B} \to C(\mathbb{X}_{\mathbb{B}},\mathbb{Z}_2)$ tal que $b \mapsto \widehat{b}$ es un homomorfismo inyectivo de anillos de Boole ¿?
Dem:
Primero veamos que es un homomorfismo, esto es sencillo pues observar que $\widehat{(a \wedge b)}(\chi) = \chi(a \wedge b) = \chi(a) \wedge \chi(b) = \widehat{a}(\chi) \wedge \widehat{b}(\chi)$ es decir $\widehat{(a \wedge b)} = \widehat{a} \wedge \widehat{b}$. Es análogo para las otras operaciones.

Ahora veamos la inyectividad, supongamos que $\widehat{a} = \widehat{b}$ entonces tenemos por la proposición anterior que $V_a = V_{\widehat{a}} = V_{\widehat{b}} = V_b$ y se vio en una proposición anterior que el mapa $V_{(\cdot)}$ era un isomorfismo luego $a = b$. $\blacksquare$

Ahora nos proponemos ver que en realidad, la transformada es un isomorfismo.

Proposición: Sea X un espacio topológico que tiene una base $\mathcal{B}$ formada por conjuntos abiertos y cerrados, y supongamos que K es un conjunto abierto y cerrado en X. Entonces existen $V_1, ..., V_n \in \mathcal{B}$ tales que $K = V_1 \cup \cdots \cup V_n$

Dem:

Como K es abierto entonces tenemos que $K = \bigcup_{i \in I} V_i$ con $V_i \in \mathcal{B}$, pero al ser K cerrado en un compacto también es compacto, luego existen $i_1, ..., i_n$ tales que $K = \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}$ como se quería probar $\blacksquare$

Proposición: La transformada $\widehat{\ }: \mathbb{B} \to C(\mathbb{X}_{\mathbb{B}}, \mathbb{Z}_2)$ es sobreyectiva

Dem: ¿?

En efecto, si $f \in C(\mathbb{X}_{\mathbb{B}}, \mathbb{Z}_2)$ tenemos que V_f es un abierto y cerrado, recordar también que $\{V_b : b \in \mathbb{B}\}$ era una base formada por abiertos y cerrados de esta topología, de acuerdo al lema existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que $V_f = V_{b_1} \cup \cdots V_{b_n}$ y por lo tanto:

$$(V_f)^{\complement} = \bigcap_{j=1}^{n} (V_{b_j})^{\complement} = \bigcap_{j=1}^{n} V_{1-b_j} = V_{\prod_{j=1}^{n}(1-b_j)}$$

y de aquí $V_f = V_b$ donde $b = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - b_j)$. Entonces $f = \widehat{b}$ $\blacksquare$

Para terminar veremos algunas propiedades de naturalidad de la transformada:

Proposición: La correspondencia $(\mathbb{B}_1 \xrightarrow{\beta} \mathbb{B}_2) \mapsto (\mathbb{X}_{\mathbb{B}_2} \xrightarrow{\beta_*} \mathbb{X}_{\mathbb{B}_1})$ es un functor contravariante de la categoría de los anillos de Boole en la de los espacios topológicos de Stone.

Proposición: El diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\widehat{\ }"', "\cong"] & \mathbb{B}_2 \arrow[d, "\cong"', "\widehat{\ }"] \\
C(\mathbb{X}_{\mathbb{B}_1}, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(\beta_*)^*"'] & C(\mathbb{X}_{\mathbb{B}_2}, \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

Dem:

Sea $b_1 \in \mathbb{B}_1$ y $\chi_2 \in \mathbb{X}_{\mathbb{B}_2}$ entonces tenemos que:

$$\widehat{\beta(b_1)}(\chi_2) = \chi_2(\beta(b_1)) = \chi_2(\widehat{b}_1(\beta)) = (\beta_*)^*(\widehat{\beta}_1)\Big|_{\chi_2}$$

Observación: Los dos diagramas conmutativos que tenemos muestran que las categorías de anillos de Boole y de espacios de Stone son equivalentes.

Dualidad en términos de álgebras de Boole y de ultrafiltros

Si $\mathbb{A}$ es un álgebra de Boole, sea $\mathsf{St}_{\mathbb{A}} := \{u \subset A : u \text{ es un ultrafiltro}\}$. Dado $a \in \mathbb{A}$, sea $U_a := \{u \in \mathsf{St}_{\mathbb{A}} : a \in u\}$. Entonces $\{U_a : a \in \mathbb{A}\}$ es base de una topología en $\mathsf{St}_{\mathbb{A}}$, con la cual $\mathsf{St}_{\mathbb{A}}$ es un espacio de Stone homeomorfo a $\mathbb{X}_{\mathbb{B}_{\mathbb{A}}}$ a través del mapa $\mathbb{X}_{\mathbb{B}_{\mathbb{A}}} \to \mathsf{St}_{\mathbb{A}}$ dado por $\chi \mapsto F_{\ker \chi}$