03.3-FUENTES DE CAMPOS MAGNÉTICOS

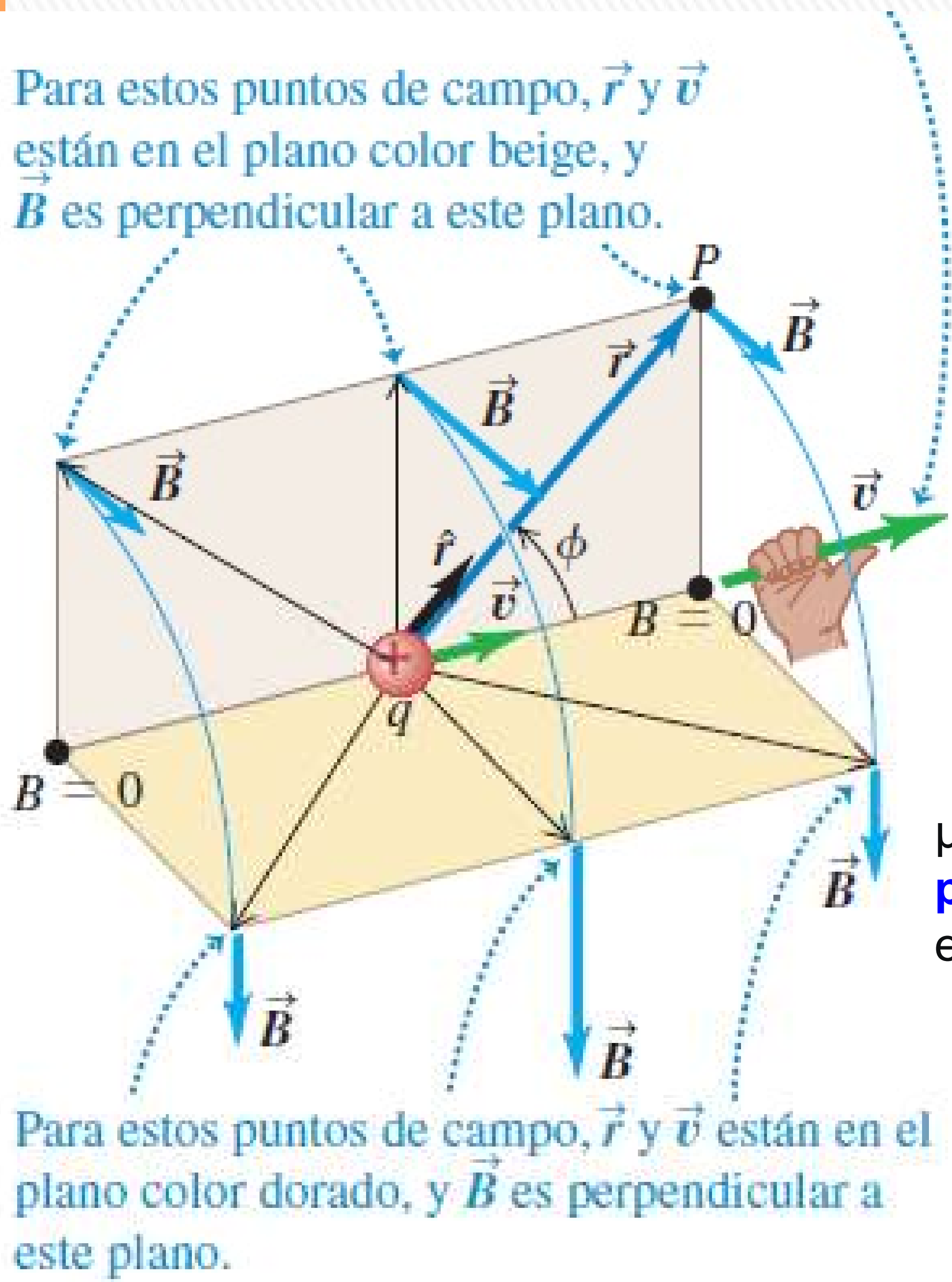
Un laboratorio de cateterismo cardíaco está listo para recibir a un paciente que sufre de fibrilación auricular. Los grandes objetos blancos lado de la mesa de operaciones son imanes fuertes que colocan al paciente en un campo magnético. El electrofisiólogo procede a realizar una ablación con catéter sentándose junto a una computadora en la parte izquierda de la habitación. Con la orientación del campo magnético, utiliza un joystick y otros controles para penetrar con la punta magnéticamente sensible de un catéter cardíaco a través de los vasos sanguíneos o a través de las cavidades del corazón.

INTRODUCCIÓN

¿Cómo se *crean los campos magnéticos?*
Sabemos que los imanes permanentes y las corrientes eléctricas en los electroimanes crean campos magnéticos.
Una carga crea un campo eléctrico y éste ejerce una fuerza sobre cualquier otra carga…
Pero un campo *magnético ejerce una fuerza solo si la carga* está en *movimiento*
¿Será verdad también que una carga crea un campo magnético solo cuándo está en movimiento?

La respuesta es afirmativa: la carga debe estar en movimiento para crear un campo magnético.

Campo magnético de una carga en movimiento



Decimos que la **carga en movimiento** en un instante dado es el **punto fuente,** y el punto P *donde queremos calcular el campo* es el **punto de campo** (u de **observación**).

Los experimentos muestran que el campo magnético ***B****, creado por una carga puntual q que se mueve con una velocidad* ***v*** *constante está dada por la siguiente expresión:*

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\bar{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

$\mu_0/4\pi$ una constante de proporcionalidad

μ_0 es una constante denominada **permeabilidad del vacío**, cuyo valor en el S.I. es: $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T.m/A

$\bar{r}$ es el vector que va desde el punto fuente al punto del campo P

$\hat{r} = \frac{\bar{r}}{r}$ es un versor de **r** (vector unitario)

Campo magnético de una carga en movimiento

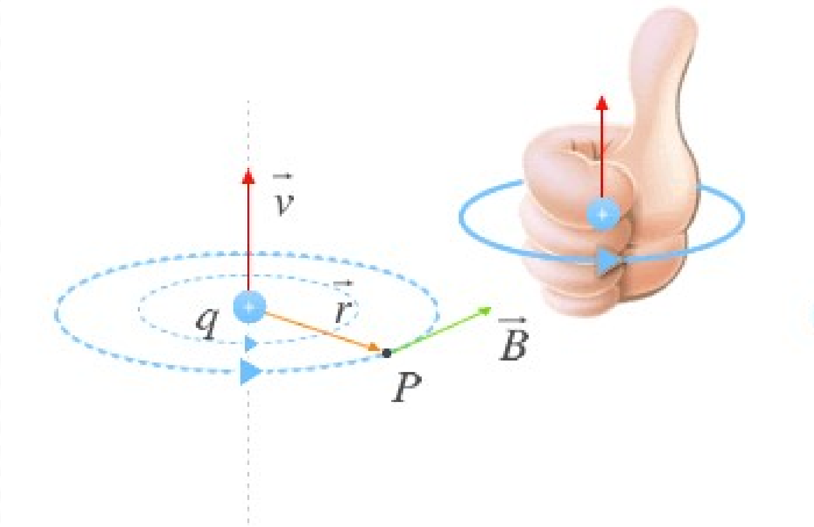
$$\overline{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\overline{\boldsymbol{v}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

Su módulo vale: $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{|q|\,v\,\sin\phi}{r^2}$

Φ es el ángulo que forman los vectores **r** y **v**.

Observar que **B** no es un campo central (según la dirección de **r**) sino que es perpendicular al plano que determinan **r** y **v**.
La dirección y sentido se pueden determinar por:

Regla de la mano derecha para el campo magnético debido a una carga positiva que se mueve a velocidad constante:
Apunte el pulgar de su mano derecha en dirección y sentido de la velocidad. Ahora cierre sus dedos alrededor de la carga en dirección de las líneas del campo magnético. (Si la carga es negativa, las líneas del campo van en sentido opuesto).



Para una carga puntual que se mueve con una cierta velocidad ***v***, las líneas de campo magnético son *círculos con centro en la línea que pasa por q determinada por* ***v*** *y que se* encuentran en planos perpendiculares a esta línea.

Campo magnético de un elemento de corriente – Ley de BIOT-SAVART

También hay un principio de superposición de campos magnéticos:
el campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales.

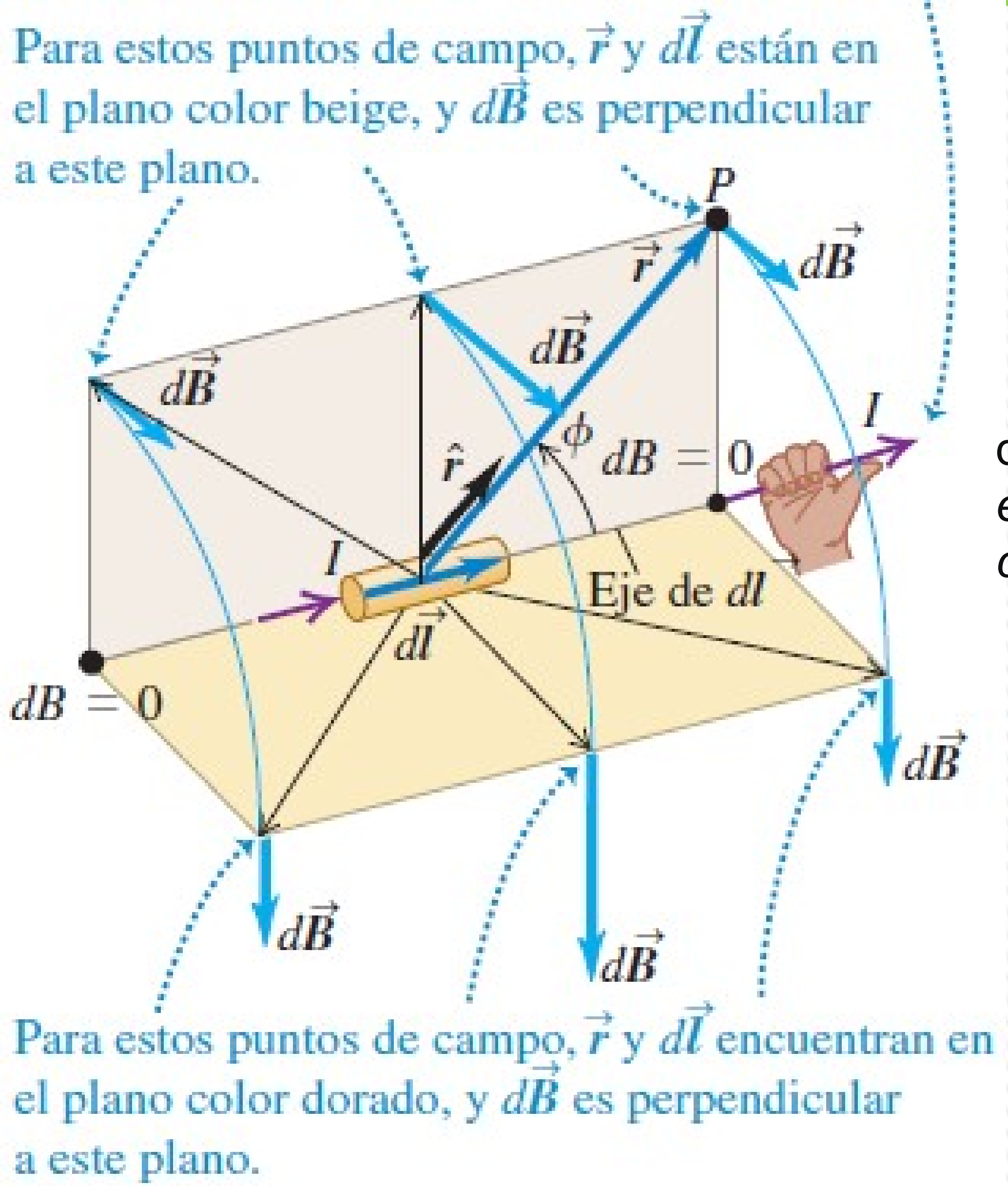
Vamos a calcular el campo magnético generado por un segmento pequeño *d**l*** de un conductor que transporta corriente, cuyo volumen es *A dl, donde A es el área de la sección transversal del conductor.*
Si hay *n partículas cargadas en movimiento por unidad de volumen, cada una* con una carga *q, la carga total dQ que se mueve en el segmento es: dQ=nqAdl.*
Las cargas en movimiento en este segmento son equivalentes a una sola carga *dQ* que viaja con una velocidad igual a $\boldsymbol{v_d}$ la velocidad de *deriva.*
(Los campos magnéticos debidos a los movimientos *al azar de las cargas, en promedio, se cancelarán en* cada punto)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|dQ|\,v_d\,\sin\phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n|q|A\,dl\,v_d\,\sin\phi}{r^2}$$

Pero: $(n|q|v_d)A = I$

Por lo que podemos escribir: $$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I dl\,\sin\phi}{r^2}$$

Campo magnético de un elemento de corriente – Ley de BIOT-SAVART



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\ \sin\phi}{r^2}$$

En forma vectorial

$$d\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\bar{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

donde ***dl*** es un vector con longitud *dl, en la misma dirección y sentido que la corriente en el* conductor

Para obtener el campo magnético total en cualquier punto del espacio debido a la corriente en un circuito completo, se integra la ecuación con respecto a todos los segmentos que conduzcan corriente:

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\bar{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

Campo magnético de un elemento de corriente – Ley de BIOT-SAVART

$$d\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\bar{\mathbf{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\ \sin\phi}{r^2} \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\bar{\mathbf{l}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

Estas expresiones reciben el nombre de **Ley de Biot y Savart**, por J.B.Biot (1774-1862) y F. Savart (1791-1841) qu llegaron a una expresión que da el valor del campo magnético en algún punto del espacio, en función de la corriente que lo produce.

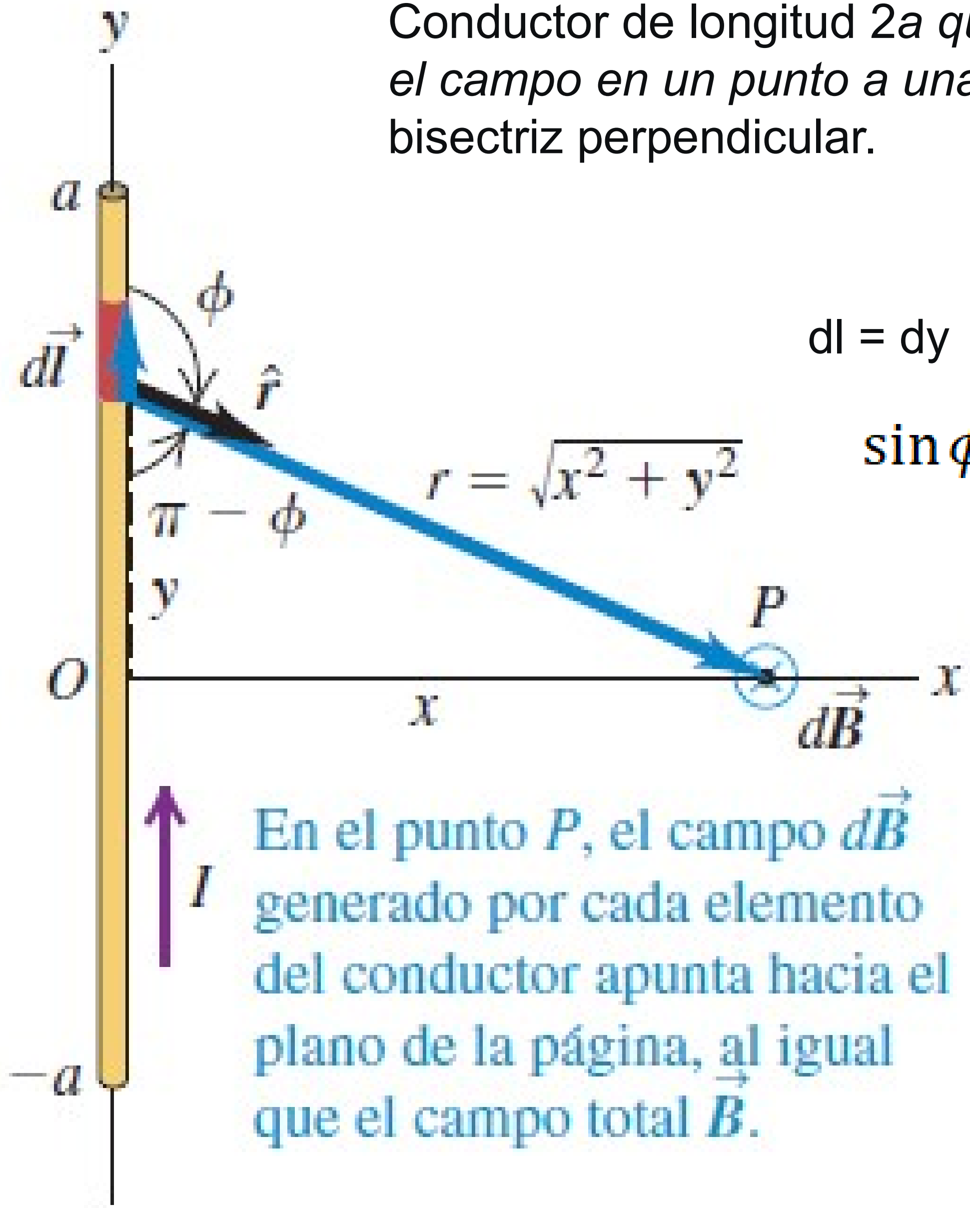
Un enfoque más fundamental de los campos magnéticos hace uso de una ley que aprovecha la simetría presente en ciertos problemas para simplificar el cálculo de B. Esta ley se considera más fundamental que la ley de Biot-Savart y conduce a otra de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo (o de Maxwell).

Este nuevo resultado es lo que constituye la ***ley de Ampere:***

$$\oint \bar{\boldsymbol{B}}\cdot d\bar{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I_{enc}$$

Expresa que la integral de línea de ***B***.d***l*** *alrededor de cualquier trayectoria cerrada* es igual $\mu_0 I_{enc}$, *donde* I_{enc} *es la corriente estable total* a través de cualquier superficie acotada por la trayectoria cerrada.

Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente



Conductor de longitud 2*a que* conduce una corriente *I, calculamos el campo en un punto a una distancia x del conductor,* sobre la bisectriz perpendicular.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\ \sin\phi}{r^2}$$

dl = dy $\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\sin\phi = \sin(\pi - \phi) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Por la regla de la mano derecha se tiene que $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}$

es perpendicular al plano de la figura , entrante

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idy}{x^2 + y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idy}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{xIdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{xdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para resolver esta primitiva podemos recurrir a una tabla de integrales, por ejemplo Manual Bronshtein

Notación: $X = x^2 + a^2$

206) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{xy}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{-a}^{a} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(a+a)}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2a}{x\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2a}{x\sqrt{x^2+a^2}}}$$

Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

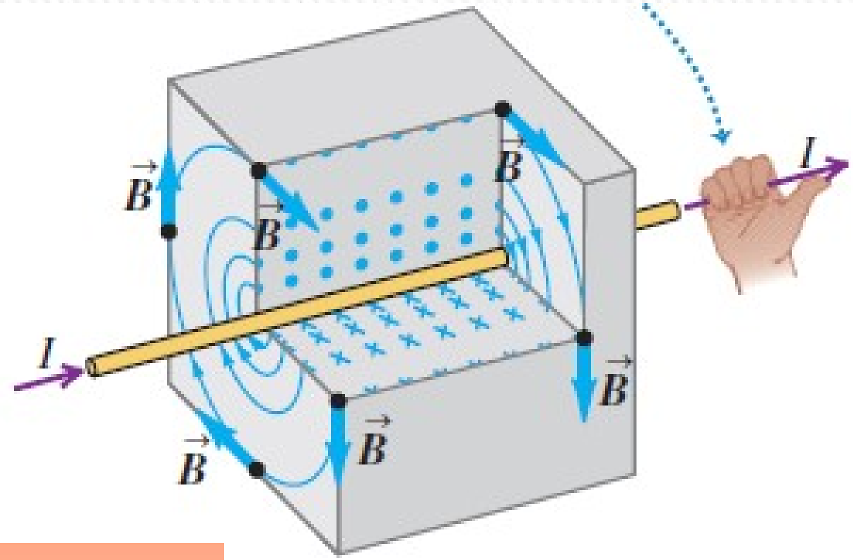
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Cuando la longitud 2*a del conductor es muy grande en comparación con su distancia x desde el punto P, se puede considerar infinitamente larga.*

$$si\ a \gg x \quad entonces: \sqrt{x^2 + a^2} \approx a$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Si a→∞ existe simetría axial con respecto al eje *y.*, *B* debe tener la misma *magnitud en todos los puntos de un círculo con centro en el conductor* y que se encuentre en un plano perpendicular a él, y la *dirección de debe ser* tangente en cualquier parte del círculo. Así, en todos los puntos de un círculo de radio *r alrededor del conductor, la magnitud B es*



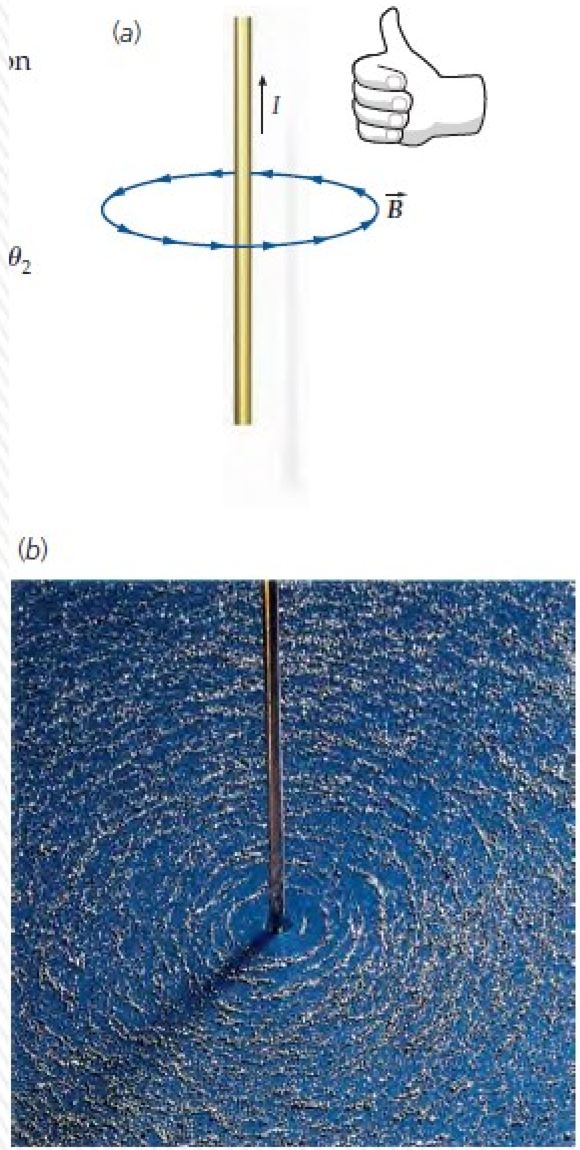
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Campo cerca de un conductor largo y recto portador de corriente

Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

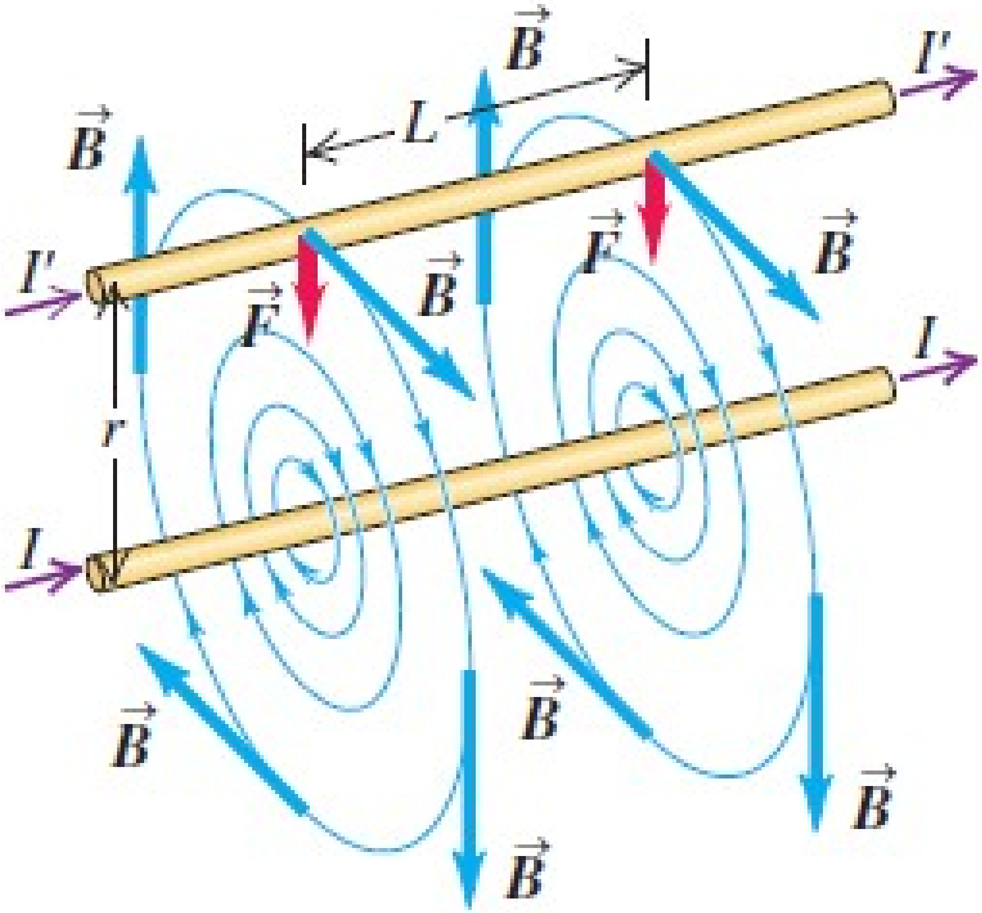
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Las líneas de campo magnético son circunferencias concéntricas al alambre.
El sentido del campo está dado por la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura.



ATENCIÓN:
Si bien este resultado es exacto sólo si la longitud del alambre es infinito, se puede usar como buena aproximación cuando la distancia donde se calcula el campo es mucho menor que la longitud del alambre y se desprecian los efectos de borde.

Fuerza entre dos conductores paralelos

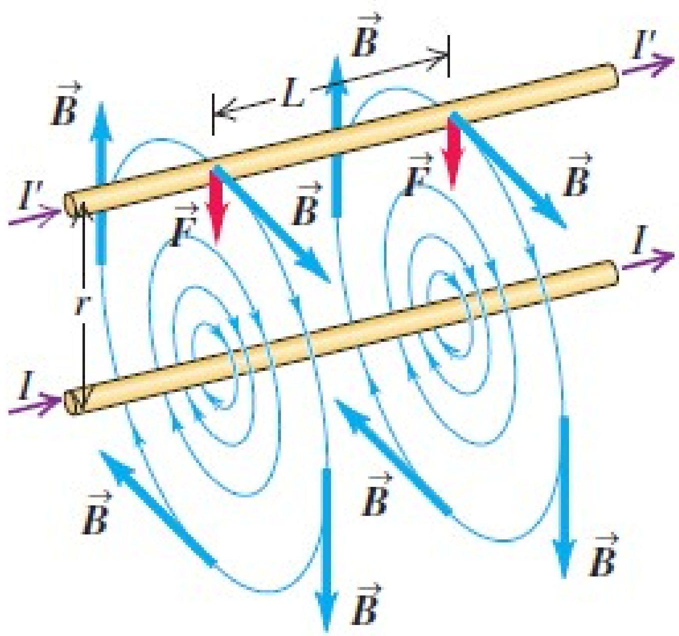


Consideremos dos conductores largos, rectos y paralelos, como se muestra en la figura, separados una distancia *r y que portan las corrientes I e I‘ en el* mismo sentido. Cada conductor se encuentra en el campo magnético producido por el otro, por lo que cada uno experimenta una fuerza.
Se muestran algunas de las líneas de campo generadas por la corriente en el conductor de la parte inferior.
El conductor inferior produce un campo en la posición del conductor de arriba dado por: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Un segmento del conductor superior experimenta una fuerza dada por: F=BI’L

$F = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} I' L$ La fuerza por unidad de longitud vale: $\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$

Fuerza entre dos conductores paralelos



$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

Al aplicar la regla de la mano derecha, se tiene que la fuerza sobre el conductor superior está dirigida *hacia abajo.*

La corriente en el conductor *superior también origina un campo en la posición del inferior. Operando en forma similar, se puede ver* que la fuerza sobre el conductor inferior va *hacia arriba.*, *y tiene igual magnitud de F/L. Dos conductores paralelos que transportan corriente en el mismo sentido se atraen uno al otro.*

Si se invierte el sentido de cualquiera de las corrientes, las fuerzas también se invierten. *Dos conductores paralelos que transportan corriente en sentidos opuestos se repelen entre sí.*

Conductores paralelos que llevan corrientes en un mismo sentido se atraen, conductores paralelos que llevan corrientes en sentidos opuestos se repelen.

Fuerza entre dos conductores paralelos

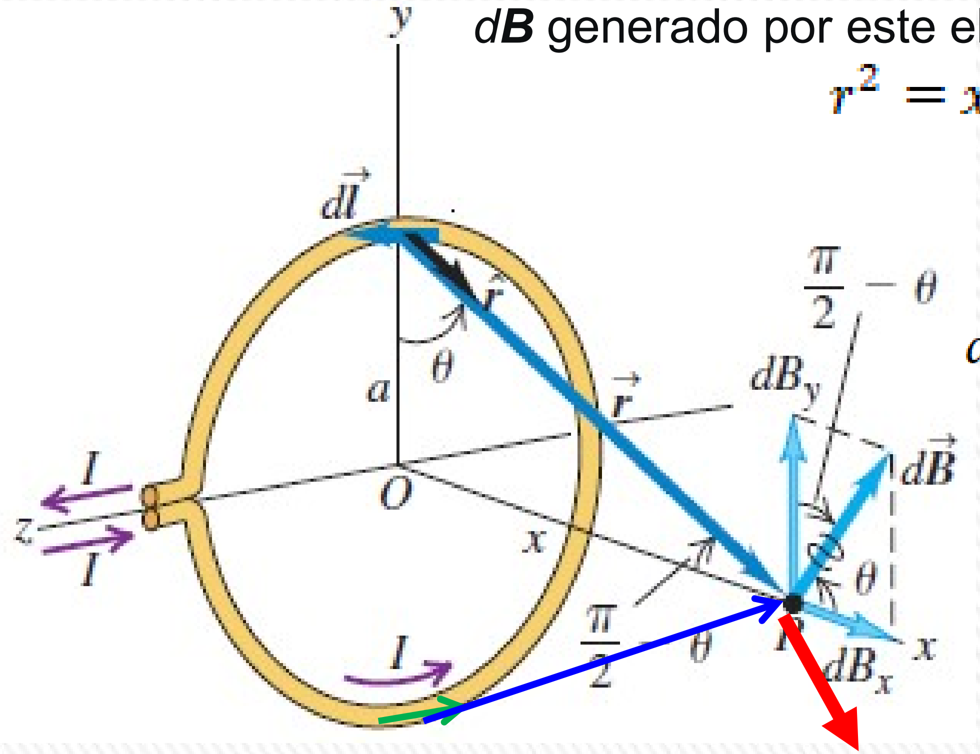
Fuerzas magnéticas y la definición de ampere- La atracción o repulsión entre dos conductores rectos, paralelos y portadores de corriente es la base de la definición oficial del **ampere en el SI:**

Un ampere es la corriente constante que, si está presente en dos conductores paralelos **de longitud infinita y separados por una distancia de un metro de espacio vacío, provoca que cada conductor experimente una fuerza de exactamente 2×10^{-7} newtons por metro de longitud**

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} = 2 \times 10^{-7} \frac{I I'}{r}$$

Campo magnético de una espira circular de corriente

Conductor circular de radio *a, por la que circula una corriente I* a través de dos alambres largos y rectos colocados lado a lado; las corrientes en estos alambres rectos van en sentidos opuestos, y sus campos magnéticos casi se cancelan entre sí Vamos a calcular el campo magnético en el punto *P sobre el eje de la espira, a una* distancia *x del centro usando la ley de Biot y Savart.* $d\vec{l} \perp \hat{r}$



*d**B*** generado por este elemento *d**l*** se encuentra en el plano *xy*

$$r^2 = x^2 + a^2$$

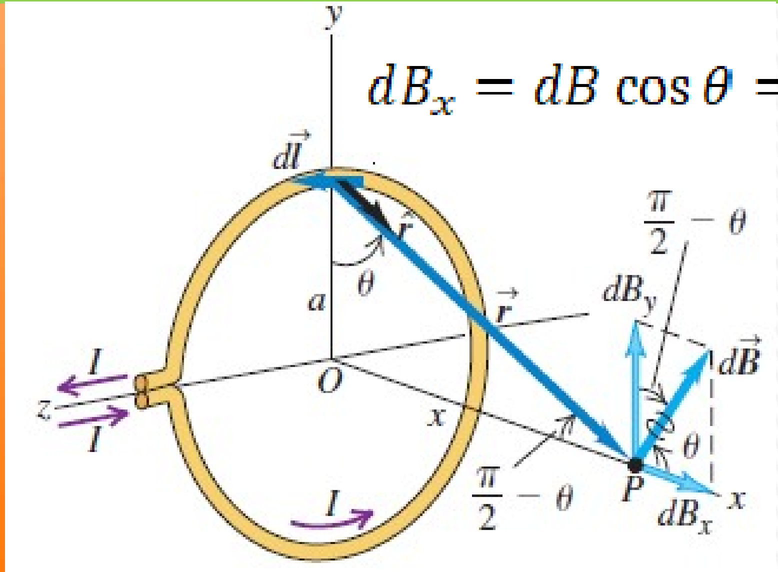
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\,\sin\phi}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)}$$

$$dB_x = dB\cos\theta \qquad dB_y = dB\sin\theta$$

Para cada elemento *d**l*** hay otro elemento correspondiente en el lado opuesto de la espira, con dirección opuesta.

Estos dos elementos hacen contribuciones iguales a la componente *x de d**B**,* pero dan componentes *opuestas perpendiculares al eje x. Así, todas las componentes* perpendiculares se cancelan y solo sobreviven las componentes *x.*

Campo magnético de una espira circular de corriente



$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para obtener la componente *x del campo total se integra* incluyendo todos los elementos *d**l*** alrededor de la espira. Todos los elementos de esta expresión, excepto *dl, son constantes, por lo que se pueden sacar de la integral:*

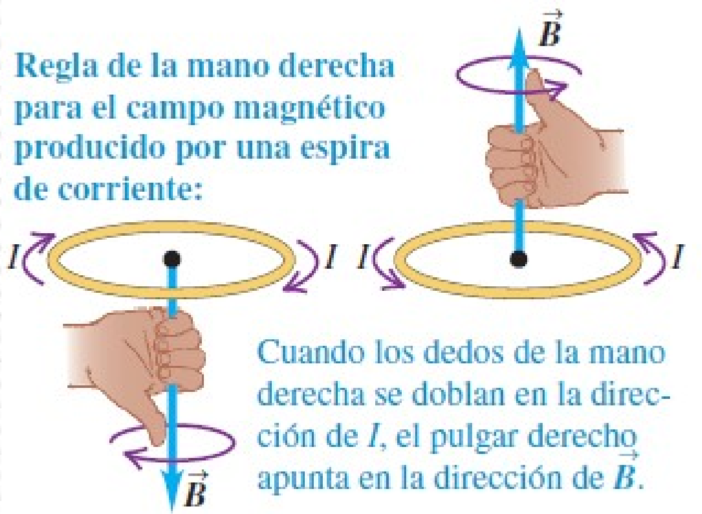
$$B_x = \int \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int dl$$

La integral de *dl es justamente la circunferencia del círculo:* $\int dl = 2\pi a$

$$B_x = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(2\pi a) = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La *dirección del campo magnético sobre el eje de una espira portadora de corriente* está dada por la regla de la mano derecha.



Campo magnético de una espira circular de corriente

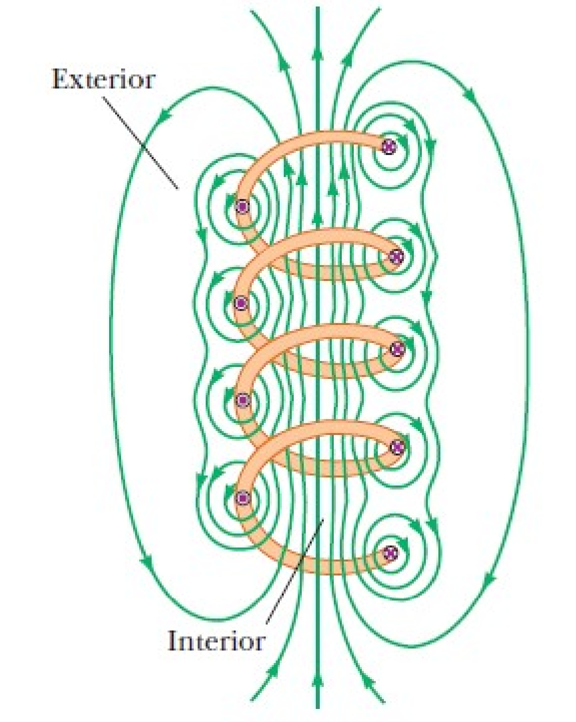
$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

El campo en el centro (x=0) vale: $$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

a) b) c)

a) Líneas de campo magnético que rodean un lazo de corriente.
b) Líneas de campo magnético que rodean un lazo de corriente, mostradas con limaduras de hierro.
c) Líneas de campo magnético que rodean un imán de barra.
Note la similitud entre este patrón de líneas y el de un lazo de corriente

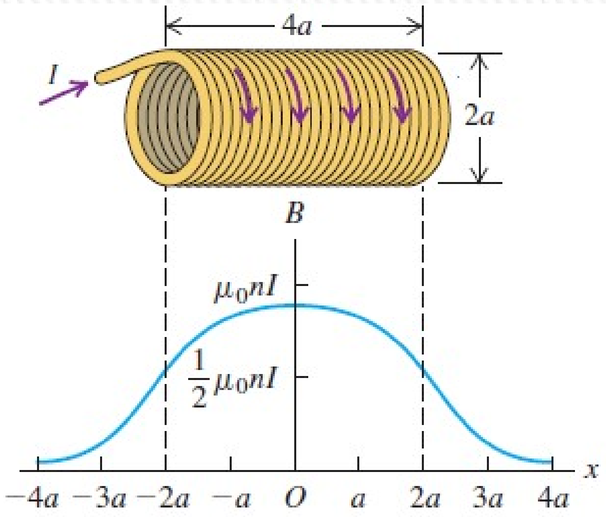
Campo magnético creado por un solenoide



Un solenoide es un alambre largo enrollado en forma de hélice.
Puede producirse un campo magnético bastante uniforme en el *interior del solenoide cuando éste lleva una corriente.*
Si hay poco espacio entre las vueltas, cada una puede tratarse como si fuera una espira circular, y el campo magnético neto es la suma vectorial de los campos que resultan de todas las vueltas.
Para un solenoide largo, con n espiras por unidad de longitud se puede utilizar la siguiente aproximación.
En el interior el campo es uniforme y vale:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

Y en el exterior: B=0.



Campo magnético de un solenoide real