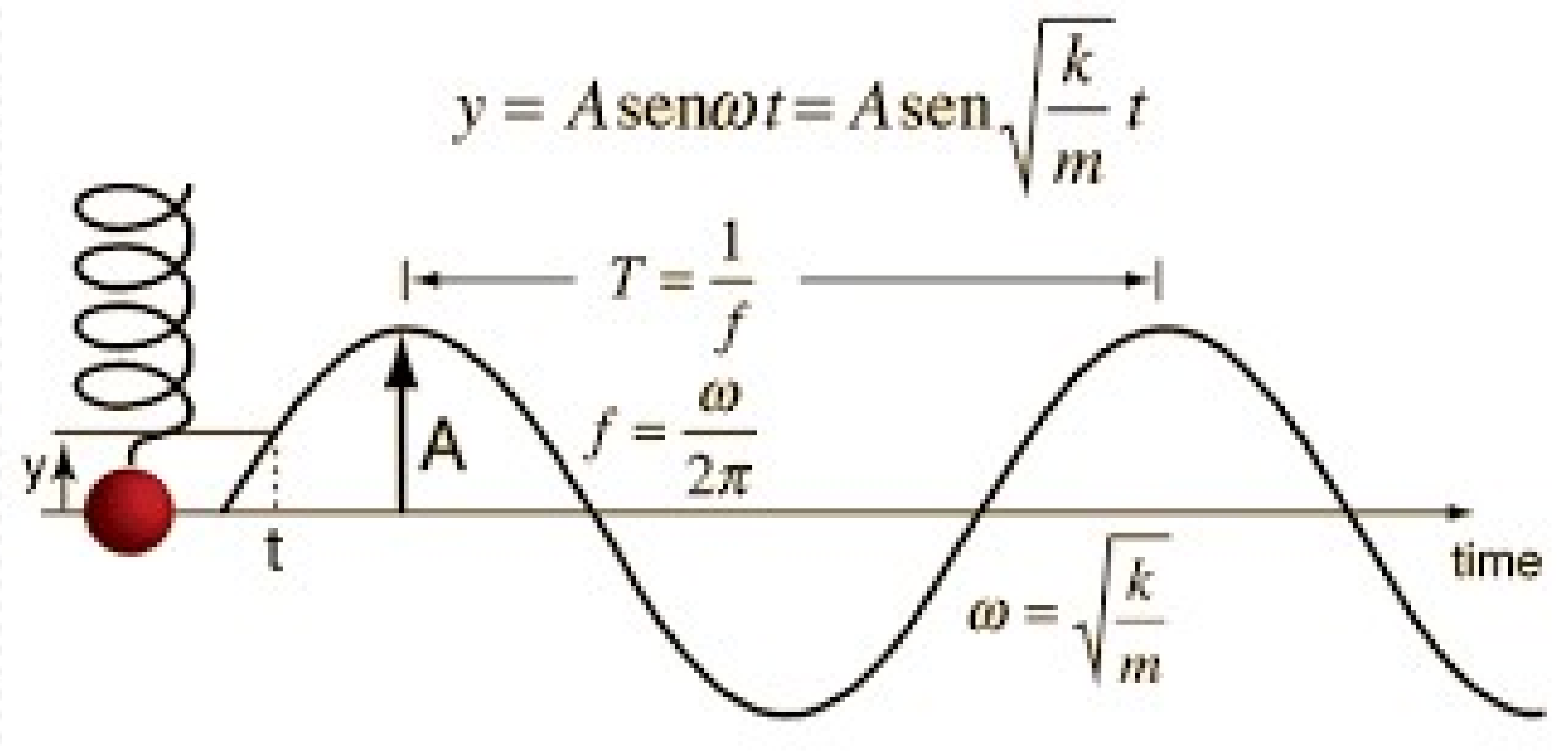
15-MOVIMIENTO PERIÓDICO

Movimiento Armónico Simple

Oscilaciones amortiguadas y forzadas



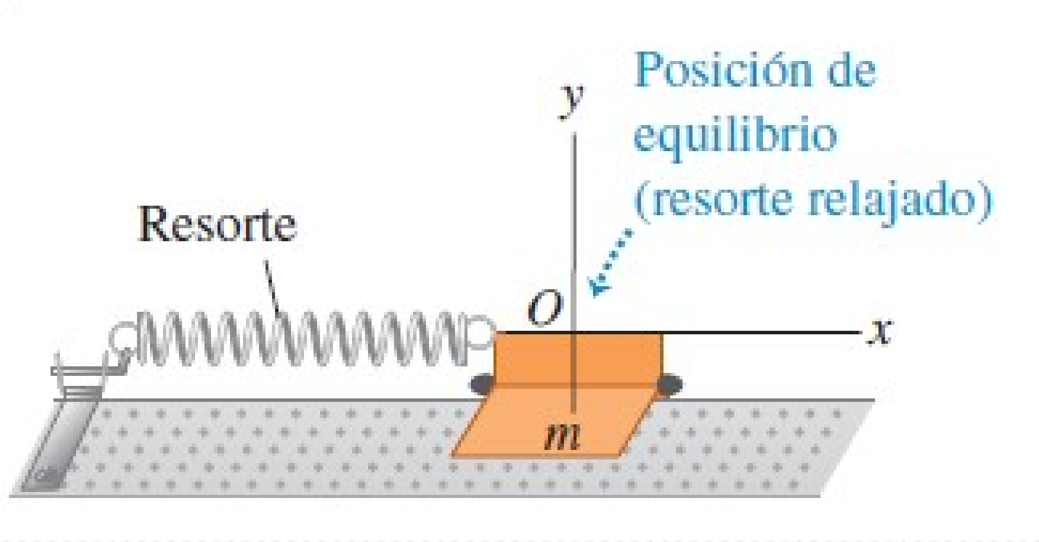
INTRODUCCIÓN

Movimientos que se repiten una y otra vez: movimiento de un resorte, péndulo oscilante de un reloj antiguo, vibraciones sonoras producidas por un instrumento musical: **movimiento periódico u oscilación.**

Un cuerpo que tiene **un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable:** cuando se le aleja de esa posición y se suelta, entra en acción una fuerza o torque para hacerlo regresar al equilibrio; pero cuando llega ahí ha adquirido cierta energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta detenerse del otro lado… donde será impulsado nuevamente hacia su posición de equilibrio.

Empezaremos analizando estos movimientos periódicos u oscilaciones por el caso más sencillo: un **sistema masa-resorte ideal**.

Descripción de la oscilación



x es el ***desplazamiento del cuerpo con respecto al equilibrio*** *y* el cambio de longitud del resorte.

Sistema más sencillo que puede tener movimiento periódico: **sistema masa-resorte ideal.**

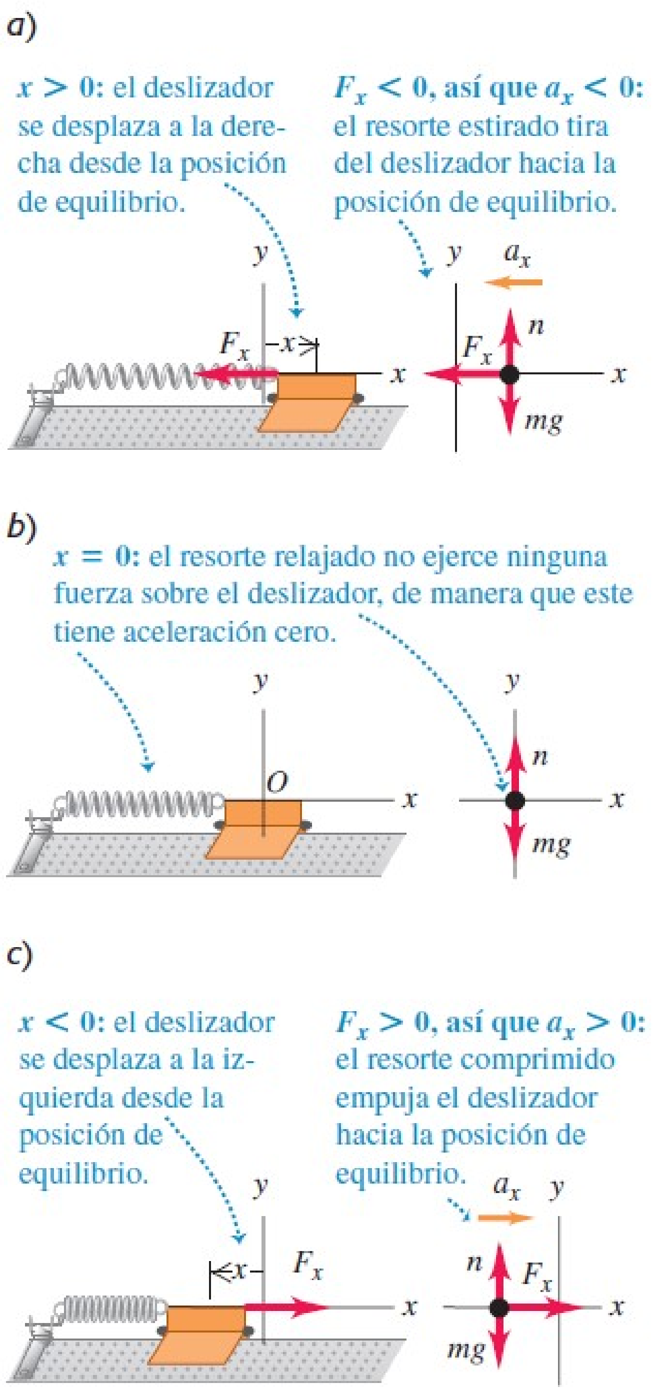
Cuerpo de masa *m sobre guía horizontal sin fricción que* solo puede desplazarse a lo largo del eje *x, conectado a un resorte ideal (perfectamente elástico y de masa despreciable)*

Extremo izquierdo del resorte fijo, y el derecho está unido al cuerpo.

La fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo; las fuerzas normal y gravitacional verticales en este caso suman cero.

Fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x *y la componente x de la aceleración,* a_x, *está dada por :* $a_x = F_x/m$

Descripción de la oscilación



Origen del sistema de coordenadas *en la* posición de equilibrio (resorte ni estirado ni comprimido)

x es el ***desplazamiento del cuerpo con respecto al equilibrio*** *y* el cambio de longitud del resorte.

Fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x *y la componente x de la aceleración,* a_x*, está dada por*

$a_x = F_x/m.$

Siempre que el cuerpo se desplaza con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza del resorte tiende a regresarlo a dicha posición.

Llamamos a una fuerza con esa característica **fuerza de restitución.**

Solo hay oscilación si hay una fuerza de restitución que tiende a regresar el sistema a la posición de equilibrio.

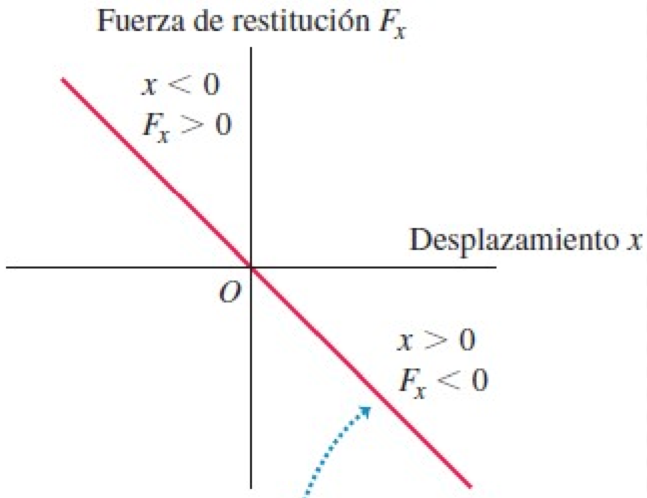
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La oscilación más sencilla: cuando la **fuerza de restitución *F_x* *es directamente proporcional al desplazamiento x con respecto al equilibrio***.

Esto ocurre si el **resorte es ideal y obedece la ley de Hooke**. La constante de proporcionalidad entre F_x *y x es la constante de fuerza k.*

En ambos lados de la posición de equilibrio, ***F_x y x siempre tienen signos opuestos:*** ***$F_x = -kx$ (fuerza de restitución de un resorte ideal)***

La constante de fuerza *k siempre es positiva y tiene unidades* de N/m.



La fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal es directamente proporcional al desplazamiento (ley de Hooke, $F_x = -kx$): la gráfica de F_x contra x es una recta.

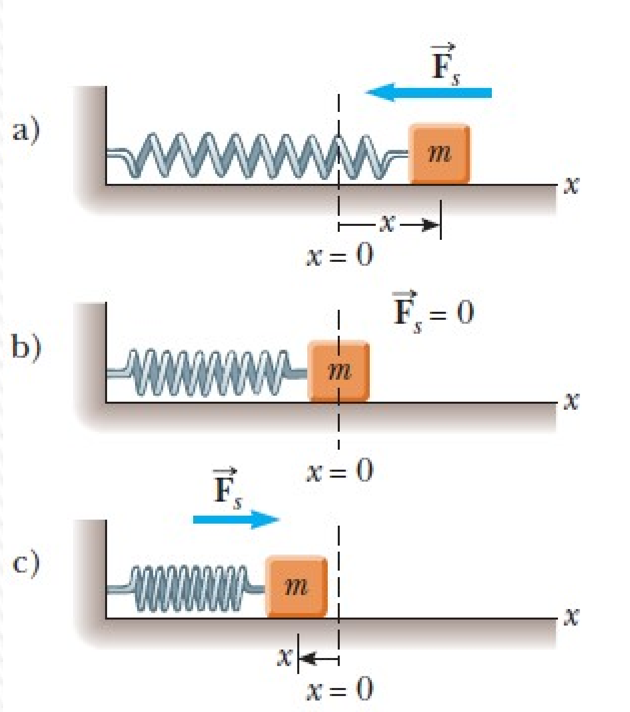
Cuando la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, la oscilación se denomina **movimiento armónico simple**, *que se abrevia como* ***MAS.***

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

El signo menos indica que la aceleración y el desplazamiento siempre tienen signos opuestos.

Un cuerpo que está en movimiento armónico simple se denomina **oscilador armónico.**

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS



Para el sistema masa-resorte ideal, la ecuación de movimiento dada por la segunda ley de Newton según el eje x , teniendo en cuenta que la fuerza neta vale –kx: $m.a = F = -kx$

Y además $a=d^2x/dt^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución es efectivamente:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

Donde A y ϕ *son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales, es general los valores de* $x(0) = x_0$ *y* $v(0) = v_0$.

También se puede usar como soluciones:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

Amplitud del movimiento A, *magnitud máxima del desplazamiento* con respecto al punto de equilibrio (valor máximo de *x).*

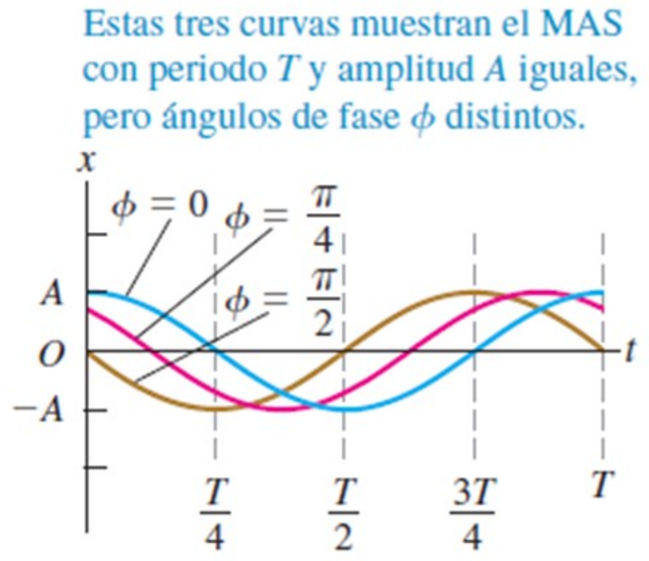
Ciclo *o* ***vibración completa:*** *viaje completo* (de ida y vuelta), de *A a -A y de regreso a A, se recorre una distancia total de 4A. .*

Periodo *T:* *tiempo que se tarda en realizar un ciclo.* $f = \frac{1}{T}$ ó $T = \frac{1}{f}$

Frecuencia *f :* *número de ciclos en la unidad de tiempo* (hertz: Hz)

Frecuencia angular, ω: 2π veces la frecuencia: ω = 2π*f* *(rad/s).* $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Constate de fase **ϕ ángulo de fase**, indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando *t = 0.*



Constante ϕ ángulo de fase,

x_0 posición en t = 0 con.

Sustituyo t = 0 y *x = x_0 se tiene: x_0= A cos ϕ.*

Si ϕ = 0, entonces *x_0 = A cos 0 = A; por lo tanto, la partícula parte desde el máximo desplazamiento positivo*

si ϕ = π, entonces *x_0 = A cos π = -A;*

por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento *negativo máximo;*

si ϕ = π/2, entonces x_0 = A cos(π/2) = 0.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

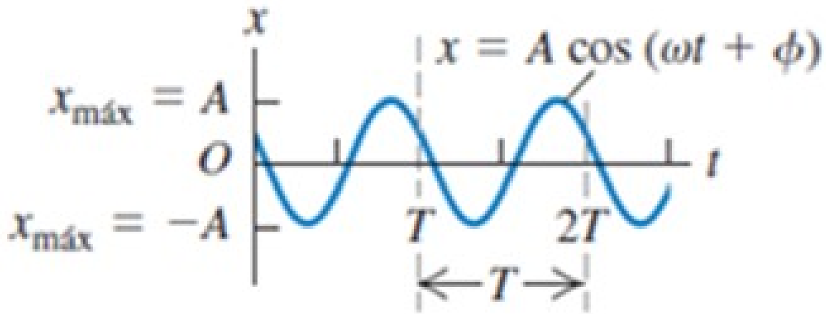
$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

Derivando obtenemos:

$(\cos u)' = -\text{sen}(u) * u'$

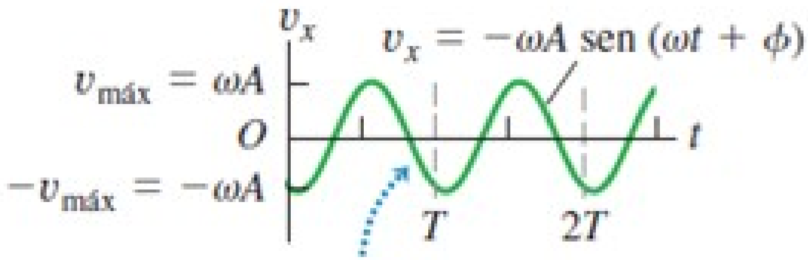
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \Phi)$$

a) Desplazamiento x en función del tiempo t



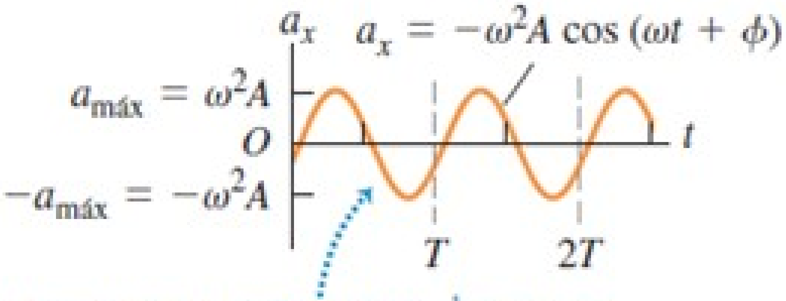
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \Phi$$

b) Velocidad v_x en función del tiempo t



La gráfica v_x-t se desplaza por $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica $x-t$.

c) Aceleración a_x en función del tiempo t



La gráfica a_x-t se desplaza $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica v_x-t y $\frac{1}{2}$ ciclo con respecto a la gráfica x-t.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

Si conocemos la posición y la velocidad iniciales x_0 *y* v_0 *del cuerpo oscilante, podemos* determinar la amplitud *A y el ángulo de fase* ϕ.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

$$x(t=0) = x_0 = A\cos\Phi \qquad v(t=0) = v_0 = -A\omega \sin\Phi$$

$$\sin\Phi = -\frac{v_0}{A\omega} \quad \text{y} \quad \cos\Phi = \frac{x_0}{A}$$

$$\Phi - \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

Dividiendo miembro a miembro: $\dfrac{\sin\Phi}{\cos\Phi} = \dfrac{-\frac{v_0}{A\omega}}{\frac{x_0}{A}} = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}$

$$A\sin\Phi = -\frac{v_0}{\omega} \quad \text{y} \quad A\cos\Phi = x_0$$

Elevando al cuadrado cada miembro de estas dos igualdades y sumando a miembro a miembro:

$$A^2 sin^2\Phi + A^2 cos^2\Phi = \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + (x_0)^2$$

$$A^2(sin^2\Phi + cos^2\Phi) = A^2 = \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + (x_0)^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Observe que si el cuerpo tiene tanto un desplazamiento inicial x_0 *como una velocidad* inicial v_0 *distinta de cero, la amplitud A no es igual al desplazamiento inicial.*

ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

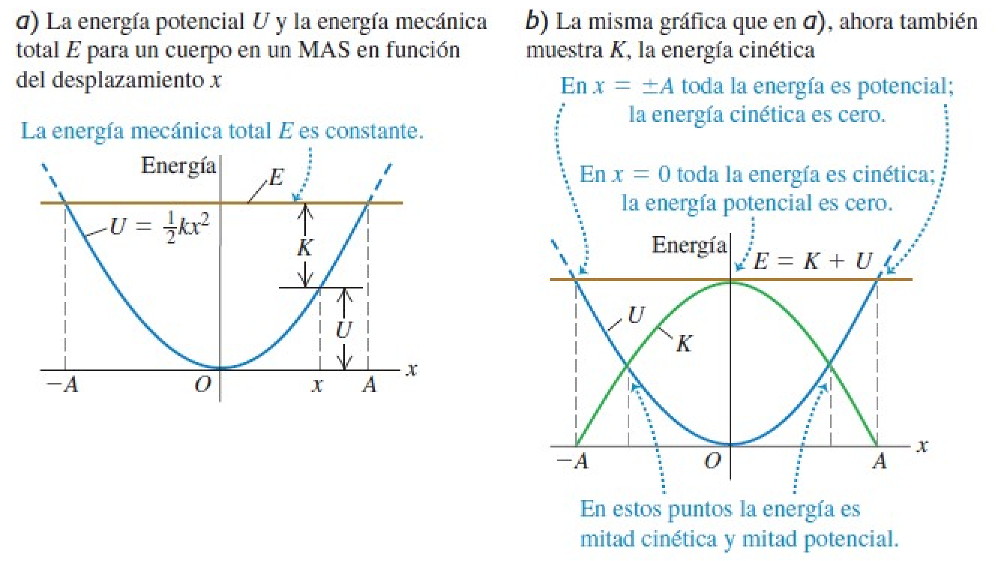
Fuerza del resorte única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo.
La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que **se *conserva la* energía mecánica total del sistema**.
También supondremos que la masa del resorte es despreciable.
Como no hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total *E* = *K* + *U*

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

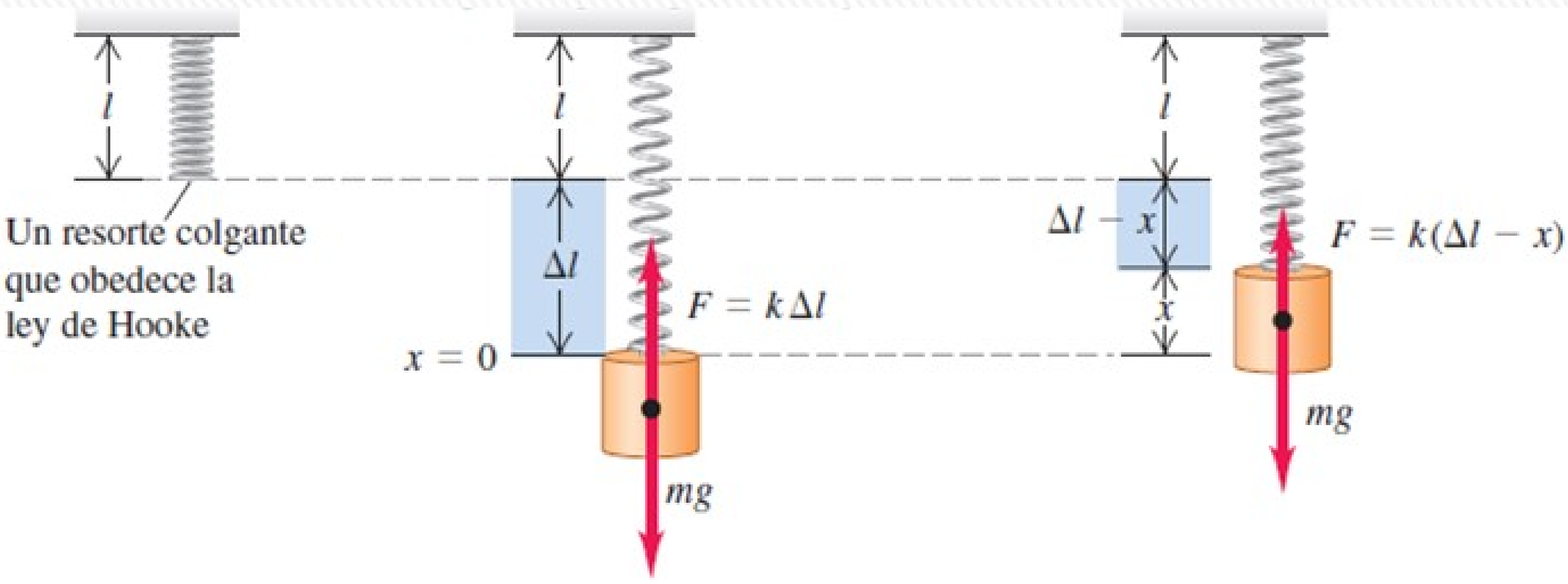
$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \Phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$



MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE VERTICAL



Si colgamos un resorte ideal con constante de fuerza *k y suspendemos* un cuerpo de masa *m, las oscilaciones ahora serán verticales: sigue desarrollando un* MAS.

E*l cuerpo cuelga en reposo, en equilibrio.* En tal posición, el resorte se estira una distancia Δl *tal que la* fuerza vertical hacia arriba $k\,\Delta l$ *del resorte sobre el cuerpo equilibre su peso mg:* $mg = k\,\Delta l$

El MAS vertical no difiere en esencia del horizontal: el único cambio real es que la posición de equilibrio $x = 0$ *ya no corresponde* al punto donde el resorte no está estirado.

EJEMPLO: Ejercicio 4.1.1

Un resorte se estira 5,0 cm cuando se le cuelga una masa de 0,300 kg.
a) ¿Cuál es la constante del resorte?
b) Si la masa se estira 10,0 cm de la posición anterior, ¿cuál es la amplitud y el periodo de oscilación?

a) Al suspenderse la masa *m*, estira el resorte una cantidad ΔL de mdo que la fuerza elástica del resorte equilibra el peso de la masa:

$$mg = k\Delta L$$

$$k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{(0{,}300)(9{,}8)}{0{,}050} = 58{,}8\ N/m$$

k= 59 N/m

b) Supongo que la masa se estira y se suelta con velocidad inicial nula, por lo que:
$x(0) = x_0 = 0{,}100$ m; $v(0) = v_0 = 0$.

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Entonces: $\Phi = 0$ y A= x_0 = 0,100 m

A= 0.10 m

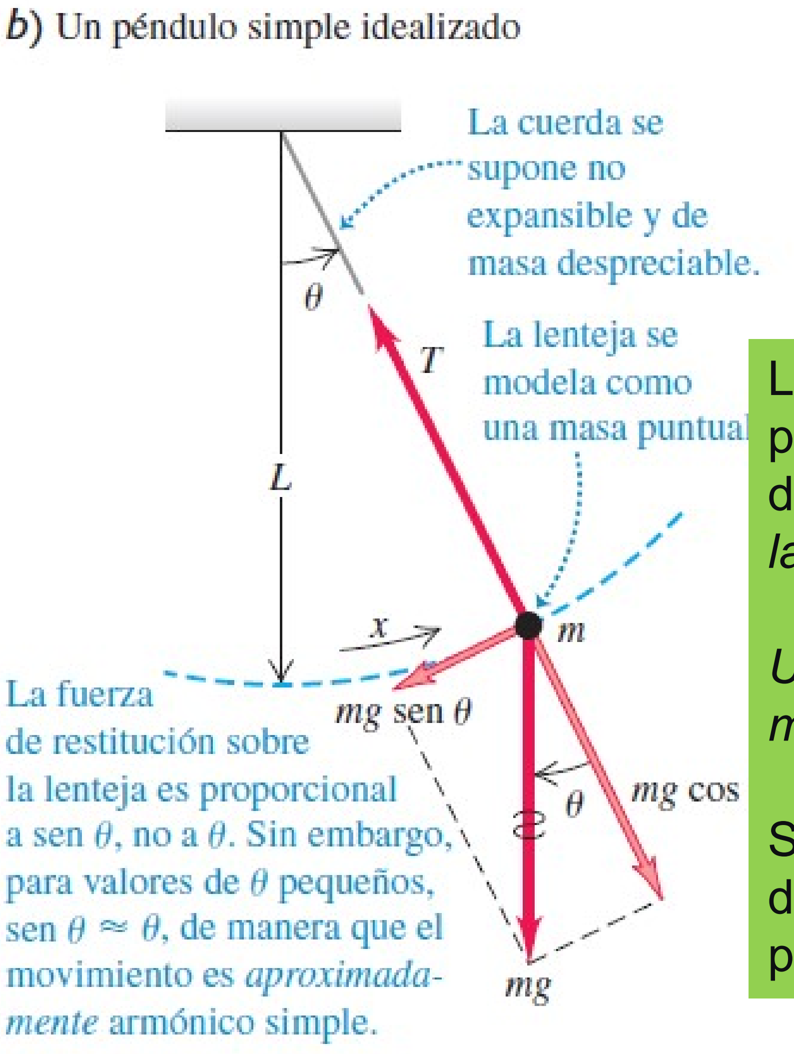
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{58{,}8}{0{,}300}} = 14\ rad/s \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{14} = 0{,}4488\ s$$

T= 0.45 s

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) = (0{,}10\ m)\cos((14\ rad/s)t)$$

PÉNDULO SIMPLE

b) Un péndulo simple idealizado



Modelo idealizado: masa puntual suspendida de una cuerda no extensible y de masa despreciable.

Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical inferior, oscilará alrededor de dicha posición.

La trayectoria de la partícula puntual (llamada pesa o lenteja) no es una recta, sino un arco de un círculo de radio *L igual a la longitud de la* cuerda.

Usamos como coordenada la distancia x medida sobre el arco.

Si el movimiento es armónico simple, la fuerza de restitución debería ser directamente proporcional a *x, o bien a θ (porque x = Lθ).*

La **fuerza de restitución *F_θ* *es la componente* tangencial de la fuerza neta**:

$$F_\theta = -mg\sin\theta \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

PÉNDULO SIMPLE

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión *T solo actúa para hacer que la* masa puntual describa un arco.

La fuerza de restitución es proporcional *no a θ sino* a senθ, así que **el movimiento *no es armónico simple.***

Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, sen θ es casi igual a θ en radianes.

Por ejemplo, si θ = 0,1 rad (unos 6°), sen θ = 0,0998, una diferencia de solo 0,2%.

Con esta aproximación, la ecuación se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\theta \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -g\theta$$

Pero: $x=\theta L$

$$\frac{d^2(\theta L)}{dt^2} = -g\theta \qquad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta}$$

Que es un MAS con ω $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

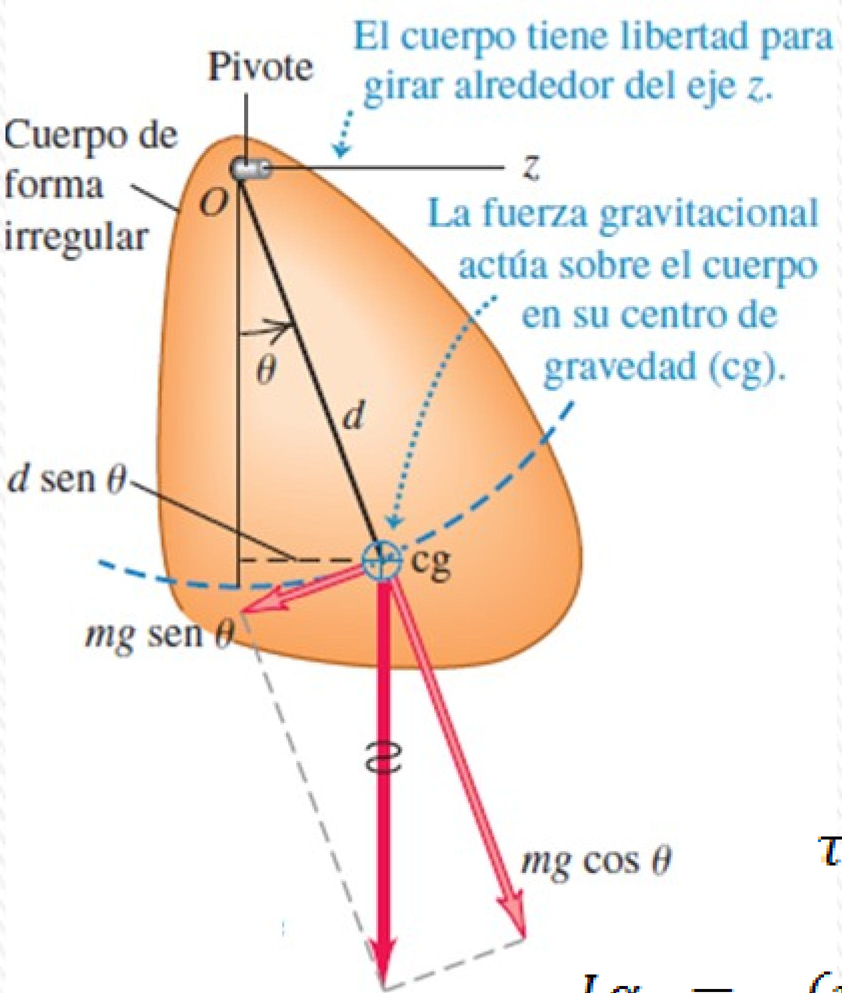
$$\boxed{\theta(t) = \Theta\cos(\omega t + \Phi)}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Expresiones para un péndulo ideal y amplitudes pequeñas.

(errores sen $\theta \approx \theta$: 5º-0,24%, 10º -0,5 %, 15º-1,14%)

PÉNDULO FÍSICO



Cualquier péndulo real que usa un cuerpo de tamaño finito.

Cuerpo de forma irregular que puede girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por el punto *O. En la posición de equilibrio, el centro de gravedad está directamente* abajo del pivote; en la posición que se muestra en la figura, el cuerpo está desplazado del equilibrio un ángulo θ que usamos como coordenada para el sistema.

La distancia de *O al centro de gravedad es d, el momento de inercia del cuerpo alrededor del* eje de rotación a través de *O es I y la masa total es m.*

$$\tau_z = -(mg)d\sin\theta \qquad \sum \tau_z = I\alpha_z$$

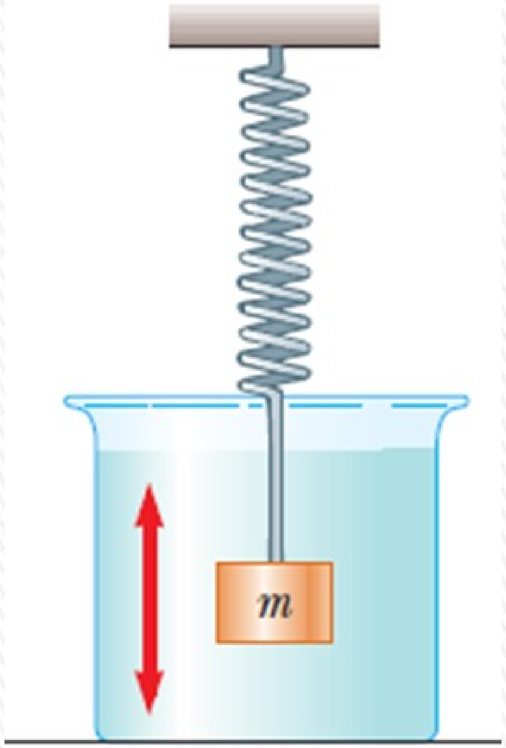
Si θ es pequeño: sen θ ≅ θ

$$I\alpha_z = -(mgd)\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Los sistemas reales siempre tienen fuerzas disipativas, y las oscilaciones cesan con el tiempo, a menos que un mecanismo reponga la energía mecánica disipada.



La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipativas se denomina **amortiguamiento**, y el movimiento correspondiente **oscilación amortiguada.**

Caso más sencillo: oscilador armónico simple, con fuerza de amortiguamiento por fricción proporcional a la *velocidad del cuerpo* oscilante.

Sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción, $F_x = -bv_x$, *donde* $v_x = dx/dt$ *es la velocidad y b es la* ***constante de amortiguación*** *que describe la intensidad* de la fuerza amortiguadora.
El signo menos indica que la fuerza siempre tiene dirección opuesta a la velocidad. La fuerza *neta que actúa sobre el cuerpo :* $\Sigma F_x = -kx - bv_x$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$$

Ecuación diferencial en *x, de segundo orden.*

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$$

Si la fuerza de amortiguamiento es relativamente pequeña $b < \sqrt{4km}$

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi)$$

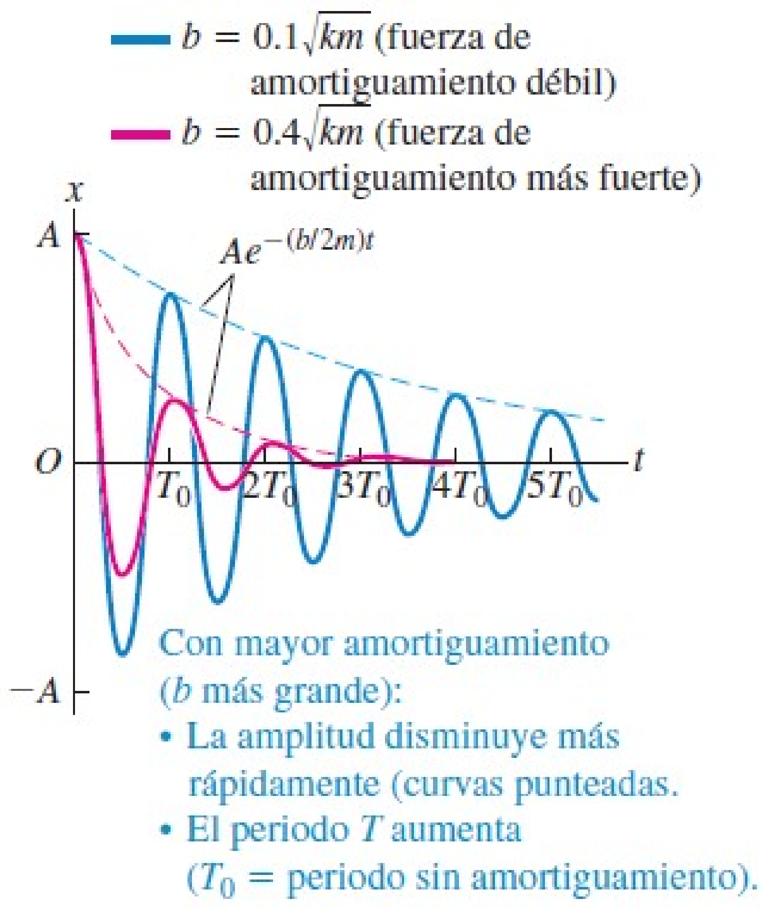
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

La *condición se* llama **subamortiguamiento.**

El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente

Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa.

Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**



OSCILACIONES AMORTIGUADAS

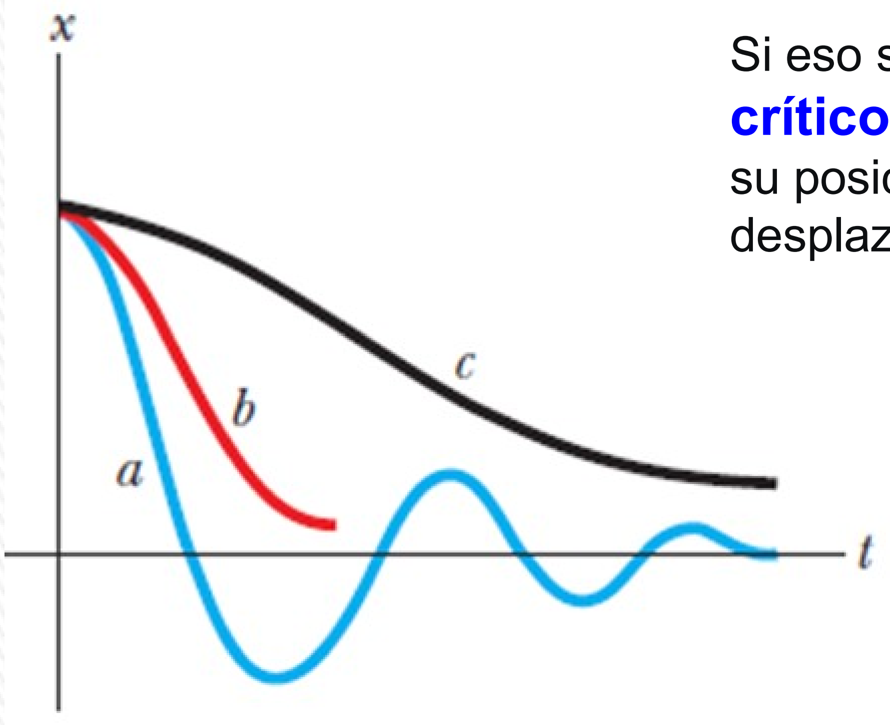
$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

1) La amplitud $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ *no es constante, sino que disminuye con* el tiempo a causa del factor exponencial decreciente $e^{-bt/2m}$.

Cuanto mayor sea el valor de *b, la amplitud disminuirá más rápidamente.*

2) La frecuencia angular ω' ya no es igual $\omega = \sqrt{k/m}$ sino un poco menor, y se vuelve cero si *b es tan grande que* $b = \sqrt{4km}$



Si eso se cumple, tenemos un **amortiguamiento crítico.** El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta (gráfica.en rojo).

Si *b es mayor que la condición crítica se denomina* ***sobreamortiguamiento.*** No hay oscilación, el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico (gráfica color negro).

OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Un oscilador amortiguado deja de moverse tarde o temprano, aunque se puede mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo periódicamente, con periodo y frecuencia definidos, esta fuerza se denomina **fuerza impulsora.**

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Si aplicamos a un oscilador armónico amortiguado una fuerza impulsora que varíe periódicamente con **frecuencia angular ω_d**, se obtiene una **oscilación forzada o *impulsada***, diferente al movimiento que se da con una **frecuencia angular natural ω'**. *Entonces la masa oscila a* la frecuencia angular ω_d,

Si hacemos que el oscilador vibre con una frecuencia angular ω_d por ejemplo con una fuerza impulsora *sinusoidal:* $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$ casi *igual a la frecuencia angular* ω', la amplitud de la oscilación resultante es mayor que cuando las dos frecuencias son muy diferentes.

Al variar la frecuencia ω_d *de la fuerza impulsora, la amplitud* de la oscilación forzada resultante varía.

Cuando hay poco amortiguamiento*, la amplitud tiene un pico* marcado conforme ω_d se acerca a ω'.

Si aumenta el amortiguamiento (*b mayor), el pico* se ensancha y se hace más bajo, desplazándose hacia menores frecuencias.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

La ecuación de movimiento es ahora:

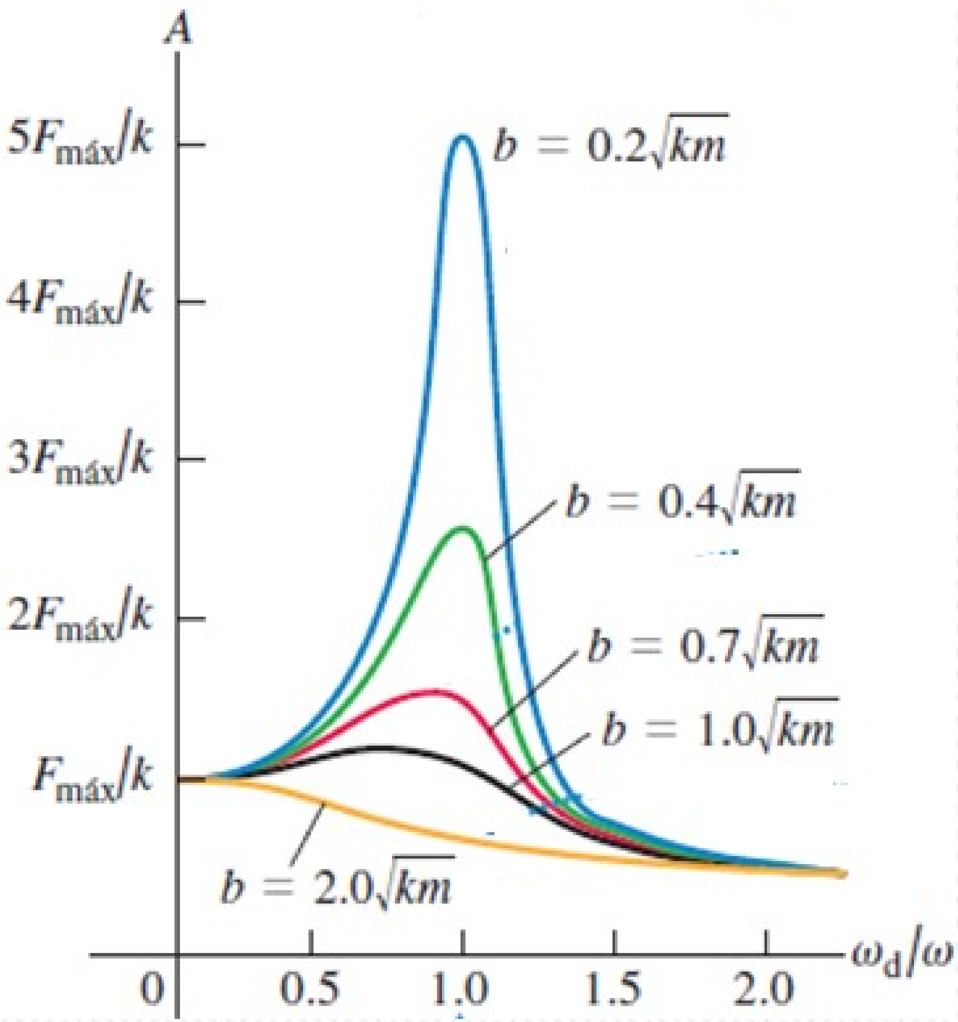
$$F_{max}\cos\omega_d t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La amplitud *A de la oscilación* forzada depende de la frecuencia de una fuerza impulsora sinusoidal:

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + (b\omega_d)^2}}$$

Si $k = m\omega_d^2$ el primer término bajo el radical es cero y A tiene un máximo cerca de

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



La altura de la curva en este punto es proporcional a 1/b; cuanto menor sea el amortiguamiento, más alto será el pico.

RESONANCIA Y SUS CONSECUENCIAS

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia.**

Ejemplos de resonancia; aumentar las oscilaciones de un niño en una hamaca, empujando con una frecuencia igual a la frecuencia natural de la hamaca.
La resonancia también ocurre en los circuitos eléctricos (circuitos de sintonización).

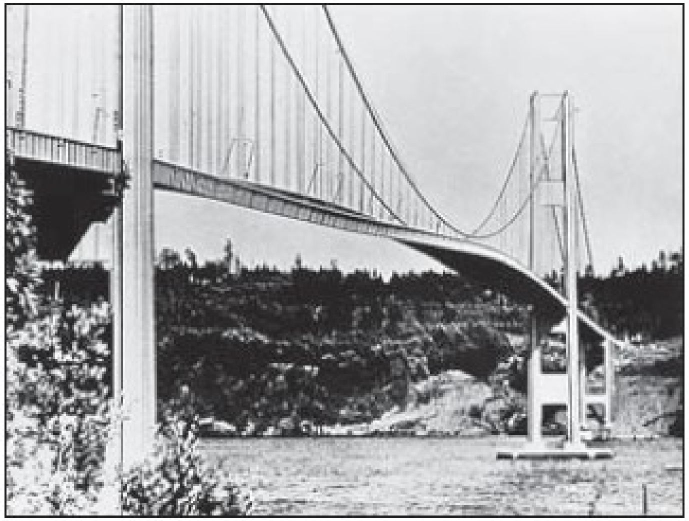
La resonancia en los sistemas mecánicos puede ser destructiva.
Un escuadrón de soldados una vez destruyó un puente marchando sobre él al mismo paso; la frecuencia de sus pasos era cercana a una frecuencia de vibración natural del puente, y la oscilación resultante tuvo suficiente amplitud para resquebrajar el puente.
Desde entonces, se ha ordenado a los soldados que rompan el paso antes de cruzar un puente.
Las vibraciones de los motores de un avión pueden tener la frecuencia adecuada para resonar con las frecuencias naturales de las alas, provocar grandes oscilaciones e incluso hacer que se desprendan las alas.

RESONANCIA Y SUS CONSECUENCIAS

En 1940, el puente Tacoma Narrows, de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el "aleteo" del viento a través del camino (piense en el "aleteo" de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia emparejó con la del puente. Las oscilaciones del puente resultantes hicieron que a final de cuentas colapsara.

https://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag

https://www.youtube.com/watch?v=yQ5ucPK2IEI



a)

b)

Figura 15.24 a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (*UPI/Bettmann Newsphotos*)