Matemática 2 - módulo I
Curso 2022

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

14 de julio de 2023

1. Considerar la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Encontrar una matriz fila $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que
$$XA = (0, 0, 0, 0).$$

   b) Supongamos que Y es un vector solución de
$$AY = b,$$
   siendo b un vector dado. Probar que si X es solución de la parte *a*) se debe cumplir que $Xb = 0$.

   c) ¿Es A invertible? Justificar.

2. Supongamos que una cierta pobleción está modelada en base a la siguiente matriz de Leslie:
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar valores y vectores propios de L y concluir que es diagonalizable.

   b) Si inicialmente el vector poblacional es $X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$, ¿cómo será la población después de cuatro períodos?

   c) Tomando como referencia una población inicial como en el inciso anterior, indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

      i. $R > 1$, así que la población crece exponencialmente.
      ii. λ_1 no es estrictamente dominante, por lo tanto la población se estabiliza.
      iii. La población tiende a crecer exponencialmente.

Solución

1. *a)* El vector $(0,0,0,0)$ verifica la ecuación, pero la idea es encontrar un vector no nulo que la verifique para lo cual debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Escalerizando obtenemos que las soluciones son de la forma $(x,-2x,-x,x)$ con lo cual una solución no trivial es por ejemplo $X = (1,-2,-1,1)$.

b) Si $AY = b$, multiplicando ambos lados a la izquierda por X tenemos que

$$Xb = X(AY) = (XA)Y = (0,0,0,0)Y = 0.$$

c) Como existe X no nulo tal que $XA = (0,0,0,0)$ se tiene que las filas de A son linealmente dependientes y por lo tanto A no es invertible.

2. *a)* El polinomio característico de L es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2).$$

Entonces los valores propios son -2, 0, y 2. Notar que $\lambda_1 = 2$ no es estrictamente dominante. Además, como tiene tres valores propios distintos L es diagonalizable. Hallando los vectores propios obtenemos que un vector propio asociado a 0 es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, un vector propio asociado a -2 es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \\ 1/32 \end{pmatrix}$, y un vector propio asociado a 2 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/32 \end{pmatrix}$.

b)

$$X_4 = L^4 X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1600 \\ 800 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

c) i es falsa porque λ_1 no es estrictamente dominante con lo cual la condición $R > 1$ no es suficiente para determinar el comportamiento a largo plazo. ii es falsa por la misma razón. Así que iii es la verdadera. Para probar que efectivamente iii es verdadera (aunque esto no era necesario) usamos que

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \\ 1/32 & 1/32 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \\ 1/32 & 1/32 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$