

Introducción a los Sistemas Dinámicos

Alejandro Passegi y Luis Piñeyrúa

Índice general

Consideraciones	III
Introducción	IX
0.1. Modelos	X
1. Dinámica Topológica	1
1.1. Descomposiciones dinámicas	4
1.2. Otras nociones dinámicas	9
1.3. Shift y Sub-shift de tipo finito	12
1.4. Suspensiones	18
2. Dinámicas en variedades	21
2.1. Sistemas Morse-Smale	22
2.2. Mapas expansores de \mathbb{S}^1	24
2.3. La herradura de Smale	27
2.4. Anosov	34
3. Teorema de Poincaré-Bendixon	39
3.1. Demostración del teorema	39
3.2. La ecuación de Van der Pol	48
4. Teoría de Rotación en \mathbb{S}^1	51
4.1. Número de Rotación	52
4.2. Consecuencias dinámicas	57
4.3. El ejemplo de Denjoy	61
5. Un poco de teoría de Rotación en \mathbb{A} y \mathbb{T}^2	65
5.1. Levantamientos de mapas en \mathbb{A} y \mathbb{T}^2	65
5.2. Conjunto de rotación en \mathbb{A}	67
5.3. Herradura rotacional	69
5.4. Conjunto de Rotación para \mathbb{T}^2	72

Consideraciones

Lo expuesto en este documento no pretende ser más que la percepción del autor sobre débiles trazos históricos de los diferentes temas de Sistemas Dinámicos que se presentan en estas notas, y otras percepciones vinculadas, pudiendo inclusive ser erradas. El objetivo es dar al lector la oportunidad de una primera aproximación a las ricas raíces históricas detrás de los sistemas dinámicos, que podrá luego profundizar.

Aunque en algún sentido se puede decir que la idea de Dinámica en matemática es algo que pertenece a los orígenes mismos de esta, la llegada de las ecuaciones diferenciales motivada por la mecánica Newtoniana es sin duda el origen de la teoría de Sistemas Dinámicos tal como se desarrolla actualmente. Todos los problemas de dinámica que se trabajan tienen en algún sentido relación con la teoría de ecuaciones diferenciales, aunque esta relación sea muchas veces difícil de trazar. Tal dificultad se basa reiteradamente en la sistematización axiomática de la dinámica tal como se la concibe hoy, que aleja la teoría de los ejemplos que la motivaron, problema que consideramos no es particular a la teoría de Sistemas Dinámicos sino general en la enseñanza de la matemática.

En este desarrollo histórico surge el nombre de Henri Poincaré asociado a la mayor revolución de la teoría, quien cambió el enfoque con el que se concebían a las ecuaciones diferenciales radicalmente: en lugar de estudiar las soluciones explícitas de las ecuaciones, se puede caracterizar la geometría asociada a las soluciones del sistema, lo cual en muchos casos arroja más luz a los intereses de entender la evolución bajo la ley considerada.

La nota histórica que da cuenta de este aporte de Poincaré es el concurso de matemática en honor del rey Oscar II de Suecia, donde se proponía resolver el *El problema de los Tres Cuerpos*: el estudio de la ecuación diferencial inducida por tres masas que se atraen según la Ley de Newton. La propuesta era determinar la solución utilizando la expansión por series de potencias (método muy usado en la época a partir de los trabajos de Weierstrass [10]). En 1887 Poincaré obtiene el premio de la competencia sin encontrar estas series; en cambio propone un estudio geométrico de las soluciones de la ecuación que muestra un gran poder descriptivo, al punto de que la gran pregunta sobre estabilidad de las soluciones puede ser abordado desde este punto de vista (ver [1]). La siguiente cita sacada del artículo de Wikipedia *Henri Poincaré* es parte del reporte de Weierstrass (quien estaba en el jurado) sobre el trabajo:

This work cannot indeed be considered as furnishing the complete solution of the question proposed, but that it is nevertheless of such importance that its publication will inaugurate a new era in the history of celestial mechanics.

La anécdota no termina aquí, ya que en 1912 el matemático Karl Sundman encontró la serie para la solución, la cual no aportó en el entendimiento real de las soluciones que surgió del método cualitativo de Poincaré. Más allá del problema concreto, el estudio cualitativo de Poincaré permitió entender mecanismos geométricos que vivían detrás de preguntas básicas de la teoría de ecuaciones diferenciales.

A continuación mencionamos algunos temas vinculados al trabajo de Poincaré que aparecerán en las notas.

El problema de integrabilidad de Sistemas Hamiltonianos.

Las ecuaciones diferenciales que surgen de las leyes de Newton para sistemas conservativos tienen asociadas siempre la función Energía, o el Hamiltoniano. Esto es una función del espacio de fase a \mathbb{R} regular, tal que la ecuación diferencial del sistema está dada por

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q}H(p, q) \\ \dot{q} = \frac{\partial}{\partial p}H(p, q) \end{cases}$$

que claramente impone en particular que las soluciones vivan en las curvas de nivel de H . Esta información extra para las ecuaciones diferenciales resulta muy útil para este importante contexto. Por ejemplo si el sistema tiene un espacio de fase de dimensión dos, las curvas de nivel genéricamente tendrán dimensión uno y por lo tanto describirán perfectamente las curvas solución. El lector debe tener en mente el ejemplo del péndulo conservativo.

Si ahora aumentamos la dimensión del problema, por ejemplo considerando el problema de tres cuerpos, las curvas de nivel dentro de un espacio de fase de dimensión $n > 2$ tendrán genéricamente dimensión $n - 1$, y por lo tanto estarán lejos de caracterizar las soluciones que son de dimensión 1. Surge la pregunta natural de si para algunos sistemas mecánicos de relevancia, podremos encontrar otras funciones *Integrables* h_1, \dots, h_{n-2} (esto es funciones que guardan las soluciones del sistema en sus curvas de nivel), de forma que al intersectar todas las curvas de nivel obtengamos las curvas soluciones. Tal buen sistema se llamará *completamente integrable*¹.

Por ejemplo, para el problema de Kepler, dos cuerpos en un plano atraídos según la Ley de Newton, se puede mostrar la completa integrabilidad (ver [5]). La pregunta sobre la integrabilidad del problema de 3 o más cuerpos era fundamental en los tiempos de Poincaré, y dentro de sus técnicas geométricas comenzó a dejar claro mecanismos que prohíben la integrabilidad de un sistema: primeramente caracterizado por los exponentes de órbitas periódicas del sistema que

¹Usamos aquí esta definición para el contexto, aunque en la literatura general puede variar un poco

miden localmente su poder de contracción y expansión, llegando luego a uno de los descubrimientos más fascinantes de los sistemas dinámicos: *Intersecciones homoclinicas transversales* ([1]), que están dadas por puntos donde se encuentran las variedades estable e inestable de un punto silla, transversalmente.

Esta estructura dinámica que Poincaré encontró (luego de que apareciera un error en su primer artículo) implicaba la no integrabilidad para el problema de los tres cuerpos, pero en sí misma contenía una geometría que fue imposible entender completamente hasta mediados del siglo XX. Poincaré escribe sobre esta estructura geométrica ([4]):

Cuando se intenta representar la figura formada por estas dos curvas y sus intersecciones en número infinito donde cada una de ellas corresponde a una solución doblemente asintótica, estas intersecciones forman un tipo de enrejado, de tejido, de red de mallas infinitamente finas; cada una de estas curvas no puede volver a cortarse con ella misma, sino que tiene que plegarse sobre ella de una manera muy compleja para volver a cortar una infinidad de veces todas las mallas del entramado. La complejidad de esta figura es tan chocante, que ni siquiera intento dibujarla: No hay nada más apropiado para darnos una idea de la complicación del problema de tres cuerpos y en general de todos los problemas de la Dinámica para los cuales no hay integral uniforme y donde las series de Bohlín son divergentes.

A mediados del siglo XX se logra madurar modelos sencillos donde aparecen estas intersecciones homoclinicas dando lugar a la teoría de dinámica hiperbólica. El trabajo más famoso en este sentido es debido a S. Smale titulado *Finding horseshoes on the beaches of Río* [9], donde se logra el modelo más sencillo que induce intersecciones homoclinicas llamado la *herradura de Smale* que se verá en las notas.

Métodos cualitativos en ecuaciones diferenciales.

El problema sobre la resolución de ecuaciones en el sentido clásico, de dar explícitamente la función solución, no admite solución general y ni siquiera se puede llevar a cabo en casos muy particulares y relevantes. Por ejemplo, el caso lineal sí admite solución, pero cuando el campo es polinomial de grado mayor a uno, no siempre se puede encontrar una solución.

Para aquellos casos donde no aparecen soluciones explícitas se proponen varias alternativas. Algunas conocidas de cursos básicos de ecuaciones diferenciales, como estudiar las singularidades de sistemas autónomos, y ver que en algunos casos, la dinámica alrededor de estas terminan siendo iguales a las del sistema linealizado. Otros métodos anteriores a la época de Poincaré consistían en intentar aproximar la solución utilizando series de potencias, aunque ya en aquellos tiempos se conocían casos donde estas series divergían ([10]).

El gran paso que dio Poincaré fue enfocarse en el *trazo* de las órbitas y no tanto en la función solución que las parametriza. Dicho de otra forma, no importa el tiempo que demoran las órbitas en trazar cierto dibujo en el espacio de fase, sino que se estudia geoméricamente el conjunto de órbitas. Esto lleva a

un problema mucho más topológico, y permite escapar un poco del análisis. La eficacia de este método es indiscutible, ya que permite entender las soluciones de ecuaciones relevantes, que no admiten formulación explícita para sus soluciones. Mencionaremos a continuación algunos casos concretos que se verán en estas notas, donde el contexto general son los sistemas dinámicos autónomos.

- Existencia de órbitas cerradas en espacios dos dimensionales: en el plano, la existencia de órbitas periódicas tiene una fuerte implicancia topológica debido al teorema de Jordan: su complemento estará formado por exactamente dos componentes conexas, una acotada y otra no acotada. Esto implica que si partimos de una condición inicial dentro de la componente acotada, la órbita jamás podrá escapar esta región, lo cual se traduce en muchos casos concretos en estabilidad: mi sistema partiendo de cierta condición inicial tendrá un comportamiento acotado en el espacio de fase. En tal sentido Poincaré estudió criterios para existencias de órbitas periódicas, que derivaron luego en el renombrado teorema Poincaré-Bendixon, siendo una herramienta fundamental tanto en matemática pura como en aplicaciones ([2, 10]) para el estudio de ecuaciones diferenciales planas. En superficies como la esfera, la existencia de curvas cerradas sigue teniendo propiedades de separación, por lo cual resultados cualitativos que den su existencia siguen siendo relevantes.
- Estudio de flujos sin singularidades del toro bi-dimensional: el estudio de este tipo de dinámicas surge naturalmente al considerar sistemas Hamiltonianos de una familia de importantes ejemplos provenientes de la física, como por ejemplo el problema de los tres cuerpos. En ese caso, los toros aparecen como subconjuntos invariantes de la dinámica, y en los casos más sencillos, la dinámica está dada por traslaciones rígidas. En cambio al modificar un poco el Hamiltoniano, existen casos donde estos toros sobreviven, modificándose a nuevos toros invariantes, pero la dinámica ya no se puede considerar como una traslación rígida, aunque se puede asumir que no tendrá singularidades. De ahí surge la necesidad de estudiar las dinámicas de flujos sin singularidades del toro, en especial de dimensión dos. Para el estudio de estas dinámicas Poincaré introduce lo que hoy se conoce como *sección de Poincaré*, que en este caso será un círculo que es transversal a todas las órbitas del flujo y tal que toda órbita regresa infinitas veces a futuro y a pasado a esta sección, y en general, alguna variedad con este tipo de propiedad. Es así que el problema de estudiar la dinámica cualitativa del flujo se traduce a estudiar la dinámica de un mapa discreto del círculo dado por el retorno del flujo. Para esto Poincaré generó una teoría conocida como *Teoría de Rotación del Círculo* para clasificar cualitativamente las dinámicas del círculo, que se transformó en un paradigma de los sistemas dinámicos, dando un enfoque para clasificación de dinámicas en otros contextos, como por ejemplo superficies. En estas notas se hará una introducción a esta teoría.
- Estudio de mapas del anillo bi-dimensional: una herramienta fundamental

que surge del estudio cualitativo impulsado por Poincaré es el estudio de secciones transversales a los flujos, secciones de *Poincaré*. Esto son sub-variedades dentro del espacio de fase, donde las órbitas del flujo van a intersectar transversalmente infinitas veces, a futuro y pasado, generando un mapa cuya dinámica codifica la dinámica del flujo, es decir, para entender el comportamiento de las órbitas del flujo basta con entender el comportamiento de las órbitas para este mapa. El ejemplo base se da en el problema de los tres cuerpos (restringido), donde Poincaré encuentra una superficie transversal al flujo en el espacio de fase ([1]). Esta superficie resulta ser un anillo y la dinámica que se obtiene, asumiendo una de las masas nula, es la de un twist map integrable: es un mapa del cilindro en el cilindro que preserva cada círculo horizontal, rotándolos con ángulo monotonamente creciente en función de la altura. La existencia de esos círculos horizontales invariantes da cuenta de la estabilidad de este sistema ideal. Al asumir la hipótesis más realista de que la masa que era nula, pasa a ser positiva y pequeña, se obtiene un nuevo mapa de retorno, que es una perturbación del mapa twist integrable, y la estabilidad para este problema de los tres cuerpos queda ahora relacionada a que la dinámica del nuevo mapa de retorno tenga solo órbitas acotadas. El estudio de este tipo de mapas se transformó así en un problema fundamental de la dinámica, motivando teorías como la teoría KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) y la teoría de Poincaré-Birkhoff en el anillo. De esto último se verá algo en las notas.

Introducción

La idea de *evolución temporal* en matemática surge naturalmente a partir de la física, y se consolida en la teoría de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, procesos iterativos en matemática existen desde sus comienzos, dando lugar a una clase de objetos muchas veces sorprendentes dentro de la matemática. Para definir un proceso iterativo solo hace falta una función

$$T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

y se podría decir que la teoría de Sistemas Dinámicos se interesa por las sucesiones $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in \mathcal{X}$. Para estudiar estas sucesiones, salvo en casos triviales donde tenemos periodicidad (por ejemplo cuando el espacio es finito) se precisa de estructura en \mathcal{X} . El caso más natural es considerar \mathcal{X} un espacio topológico y entonces estudiar el comportamiento asintótico de las sucesiones, en este caso es natural considerar T continua ya que generará una rigidez especial. A este enfoque se le denomina por *Dinámica Topológica*.

Otra estructura posible es considerar \mathcal{X} espacio de medida, donde la pregunta sobre el comportamiento de las sucesiones se puede estudiar mediante frecuencias de visitas a los distintos conjuntos medibles. Este enfoque concierne a lo que se conoce como *Teoría Ergódica*. En estas notas consideraremos solamente Dinámica Topológica.

Como habrá observado el lector la abstracción realizada hasta el momento deja afuera a los flujos ya que estamos iterando basados en un tiempo discreto. Para un flujo $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ el enfoque dinámico es estudiar asintóticamente en t las funciones $(\phi_t(x))_{t \in \mathbb{R}}$, $x \in \mathcal{X}$. Nuevamente este estudio se puede hacer desde distintos enfoques y en este curso será topológico. Notamos aquí que todo flujo induce homeomorfismos discretos al fijar un tiempo, cuya dinámica estará contenida en la del flujo.

En general, si tenemos un grupo topológico G , un espacio topológico \mathcal{X} y una acción continua $\phi : G \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ podemos considerar esta acción como un Sistema Dinámico, en el sentido de que estamos interesados en el *comportamiento asintótico* de las funciones $(\phi_g(x))_{g \in G}$, $x \in \mathcal{X}$. En estos contextos habrá que especificar el significado de *asintótico*.

0.1. Modelos

Como suele suceder en matemática, uno está interesado en poder clasificar los distintos sistemas dinámicos. En el caso discreto, dos sistemas dinámicos $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ y $S : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ son equivalentes, o conjugados, si existe un homeomorfismo $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que

$$h \circ T = S \circ h.$$

Como bien puede observar el lector, la existencia de una conjugación genera una correspondencia biunívoca entre las órbitas de T y las de S , esto es, $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ y $(S^n(h(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{Z}$ si T y S son invertibles), y más aún por ser h un homeomorfismo los comportamientos asintóticos de $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ y $(S^n(h(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ serán idénticos y vinculados por h . Notamos que esta equivalencia pide en particular que los espacios \mathcal{X} e \mathcal{Y} sean homeomorfos.

En una primera impresión, que pedimos al lector busque, nos podemos dar cuenta de que una clasificación bajo una lista de modelos imposible de llevar a cabo en general, inclusive fijando los espacios. Por ejemplo, dado cualquier continuo del plano que no separa, esto es un conjunto compacto y conexo cuyo complemento tiene una única componente conexa, uno puede definir una dinámica T cuyos puntos fijos sean exactamente el continuo elegido. Dado que los continuos del plano no admiten una clasificación natural, se sigue que las dinámicas tampoco la tendrán.

Siendo menos exigentes podemos buscar relacionar dos tipos de dinámicas topológicas $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ y $S : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ de la siguiente manera: decimos que T es *semiconjugado* a, o es una *extensión* de, S si existe un mapa continuo y sobreyectivo $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que

$$h \circ T = S \circ h.$$

En este caso no tenemos una relación biunívoca entre las órbitas de T y las de S , en cambio tenemos que para cada $y \in \mathcal{Y}$ su órbita por S es representada para T por la órbita de la preimagen $h^{-1}(y)$, esto es, $(T^n(h^{-1}(y)))_{n \in \mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{Z}$ en caso de trabajar con homeomorfismos). Esta relación representa la proyección de una dinámica sobre otra (la de T sobre la de S en este caso) y es mucho menos restrictiva, ya que en particular podemos cambiar de clase de espacio topológico, por ejemplo del toro \mathbb{T}^2 al círculo \mathbb{S}^1 . Aún así, la tarea de una clasificación natural y general escapa lo razonable (uno puede pensar en analogía con la idea de clasificar espacios topológicos por la relación de homeomorfismos, o mapas continuos y sobreyectivos).

Otro enfoque aún más débil pero igual de relevante, es entender que propiedades dinámicas son invariantes de un espacio, es decir, fijado un espacio \mathcal{X} encontrar propiedades dinámicas que todo sistema definido en \mathcal{X} debe cumplir. Encontramos en esta clase de resultados dos ejemplos fundamentales: Teorema de punto fijo de Brouwer en el disco cerrado y el Teorema de Poincaré-Hopf en la esfera de dimensión 2.

La necesidad histórica de entender distintos tipos de dinámicas, problema paradigmáticamente representado en los trabajos de H. Poincaré, ha llevado a

clasificar un gran espectro de dinámicas que son fundamentales en varios contextos, y que permiten generar ideas globales y distintas teorías dentro de Sistemas Dinámicos. En estas notas exponemos algunos modelos y resultados representantes de estas teorías que consideramos de máxima relevancia. Debemos admitir que varios otros ejemplos y resultados básicos no serán presentados, dado que son notas para un curso semestral y, por lo tanto, el tamaño debe ser adaptado.

Capítulo 1

Dinámica Topológica

En este capítulo introducimos invariantes básicos, esto son propiedades de sistemas dinámicos preservadas por conjugaciones, y algunos primeros ejemplos. De aquí en más trabajaremos en espacios métricos que abstractamente llamaremos por \mathcal{X} y mapas continuos que abstractamente llamaremos T . Para ahorrar espacio, los conceptos serán en su mayoría definidos para dinámicas a tiempo discreto que consideraremos homeomorfismos, en caso de no serlo uno debe sustituir \mathbb{Z} por \mathbb{N} . Las correspondientes definiciones que faltan para flujos, deberán ser completadas por el lector.

Para $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ y $x \in \mathcal{X}$ la *órbita* de x queda dada por la sucesión $(T^n(x))_{n \in \mathbb{Z}} := \mathcal{O}(x, T)$; para un flujo $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ la *órbita* de x queda dada por la función $(\phi_t(x))_{t \in \mathbb{R}} := \mathcal{O}(x, \phi)$. Para el primer caso decimos que la órbita de x es *periódica* si la sucesión/función correspondiente es periódica, y su período será el período de la sucesión/función. Un punto es *periódico* si su órbita es periódica, para tiempo discreto denotamos por $\text{Per}_q(T)$ al conjunto de puntos periódicos de período $q \in \mathbb{N}$ y para tiempo continuo $\text{Per}_s(\phi)$ al conjunto de puntos periódicos de período $s \in \mathbb{R}^+$. Para tiempo discreto los puntos fijos son los elementos de $\text{Per}_1(T) =: \text{Fix}(T)$ y para tiempo continuo los puntos fijos o singularidades son los elementos $\text{Per}_0(\phi) =: \text{Sing}(\phi)$. Por último damos cuenta de un usual abuso de lenguaje que aquí también cometeremos, de llamar órbita tanto a las funciones como a su imagen.

Estas definiciones cubren los casos finitos para los posibles comportamientos asintóticos de órbitas, que son los casos sencillos. De todas formas como veremos, es muy ingenuo pensar que solo con estos conceptos finitos lograremos dar una descripción global de las dinámicas. En el próximo ejercicio buscamos discutir esta idea.

Ejercicio 1.0.1.

1. Observar que en un espacio \mathcal{X} finito toda órbita de un homeomorfismo es periódica.
2. Definir rotaciones racionales e irracionales en $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3. Mostrar que en el caso racional toda órbita es periódica y además todas tienen el mismo período.
4. Mostrar que en el caso irracional no hay órbitas periódicas y que toda órbita acumula en todo el espacio \mathbb{S}^1 .
5. Definir traslaciones de vectores $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ en el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Mostrar que si $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ entonces sucede lo mismo que para el caso racional de \mathbb{S}^1 , que si α, β son racionalmente independientes entonces sucede lo mismo que para el caso irracional en \mathbb{S}^1 . Estudiar que sucede en el caso complementario a los dos anteriores.

Vista la complejidad que puede llegar a tener una órbita, introducimos los siguientes conceptos. Para una dinámica discreta $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ y $x \in \mathcal{X}$ el *omega-límite* y el *alfa-límite* quedan respectivamente definidos por

$$\omega(x, T) = \{z \in \mathcal{X} : z = \lim_k T^{n_k}(x), n_k \nearrow +\infty\}$$

$$\alpha(x, T) = \{z \in \mathcal{X} : z = \lim_k T^{-n_k}(x), n_k \nearrow +\infty\}.$$

En contextos compactos estos conjuntos son no vacíos, mientras en contextos generales pueden dar vacío, como sucede con las traslaciones en el plano. Además son cerrados e invariantes para la dinámica, detalle que dejamos al lector (para homeomorfismos $K \subset \mathcal{X}$ es invariante si $T^{-1}(K) = K = T(K)$, mientras para dinámicas no invertibles debemos hablar de positivamente invariante, esto es $T(K) = K$, pero quizá $T^{-1}(K)$ es mas grande que K). Por último dejamos a cargo del lector que las conjugaciones corresponden de manera biunívoca los conjuntos definidos.

El siguiente ejercicio propone discutir posibles topologías para los omega y alfa límites.

Ejercicio 1.0.2.

1. Para los casos del ejercicio anterior, discutir como son topológicamente los omega y alfa límites.
2. Construya ejemplos de flujos y mapas discretos en el disco unitario \mathbb{D} donde toda órbita tenga como alfa límite el centro del disco y como omega límite todo el borde.
3. Construya ejemplos de flujos y mapas discretos en la esfera \mathbb{S}^2 donde existan dos puntos N, S tales que N es el alfa límite de todo punto y S el omega límite de todo punto.
4. Construya un ejemplo de un flujo en un disco tal que para cierto punto $x \in \mathbb{D}$ se tiene $\omega(x, \phi) \neq \omega(x, \phi_1)$ (ϕ_1 es el tiempo 1 del flujo).

5. Mostrar que el omega límite de cualquier punto para un flujo en un espacio compacto debe ser conexo. Mostrar con un ejemplo que esto no es cierto para el caso no compacto ni para el caso discreto. Para el caso discreto hacer los ejemplos en espacios conexos y construir un ejemplo donde algún omega límite sea topológicamente un conjunto de Cantor.
6. Mostrar con un ejemplo que el conjunto unión de todos los omega límites puede no ser cerrado (lo mismo para los alfa límites).
7. Estudiar la relación que se puede obtener entre los omega y alfa límites de dinámicas semiconjugadas.

Siendo que en Sistemas Dinámicos interesa el comportamiento asintótico de las órbitas, hay partes del espacio donde este actúa que no van a interesar. Por ejemplo, en el caso de la esfera con la dinámica norte-sur del ejercicio 1.0.2 parte 3, solo los puntos N, S son interesantes, el resto *fluye* a futuro y a pasado hacia estos puntos.

Una manera natural de definir este corazón de la dinámica es definir el conjunto límite

$$\mathcal{L}(T) = \text{cl} \left[\bigcup_{x \in \mathcal{X}} \omega(x, T) \cup \alpha(x, T) \right].$$

Por lo tanto cuando queremos estudiar cierta dinámica desde el punto de vista topológico estamos interesados en entender como es topológicamente $\mathcal{L}(T)$ y la dinámica restringida a este conjunto. Por ejemplo, en la dinámica norte-sur de la esfera, en lugar de mirar la esfera miramos $\{N, S\}$, donde tanto el espacio como la dinámica es trivial. En cambio para traslaciones irracionales del toro, todo el espacio resulta relevante.

Es interesante observar que fijado un espacio \mathcal{X} la estructura de los conjuntos límites y su dinámica deben tener cierta información del espacio original, esto es, \mathcal{X} . Por ejemplo en el caso de la dinámica norte-sur de la esfera pensada como flujo, por más que sorprenda que pueda haber una relación entre \mathbb{S}^2 y $\{N, S\}$, la misma es la siguiente: es necesario que $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ pueda deformarse continuamente hasta colapsar en S , propiedad que por ejemplo no es cierta para un par de puntos $\{N, S\}$ en el toro \mathbb{T}^2 . Aquel estudiante avanzado puede leer de esto que la estructura de los conjuntos límites mantiene relación con invariantes topológicos del tipo característica de Euler.

Una extensión del conjunto límite $\mathcal{L}(T)$ es lo que se conoce como conjunto no-errante de la dinámica. En la mayoría de los casos que uno suele imaginar estos conjuntos coinciden, pero puede no suceder. Veamos la definición: un punto es errante si tiene un entorno U de él tal que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto no-errante es

$$\Omega(f) = \{\text{pts. errantes}\}^c.$$

Dicho de otra forma el conjunto errante son los puntos contenidos en algún abierto que no vuelve a visitarse, y el conjunto no-errante su complemento.

Naturalmente, el conjunto no-errante es cerrado e invariante. La siguiente proposición es sencilla por lo que omitimos su prueba:

Proposición 1.0.3. $\mathcal{L}(T) \subset \Omega(T)$.

Dejamos a cargo del lector la definición de conjunto límite y conjunto no-errante para flujos y cerramos con un ejercicio difícil como lo señala el *, notación que se mantendrá a lo largo de las notas.

Ejercicio* 1.0.4.

1. Mostrar que los conjuntos límite y no-errantes corresponden para dinámicas conjugadas mediante la conjugación, y estudiar que relación se obtiene para dinámicas semi-conjugadas.
2. Mostrar con un ejemplo que el conjunto límite y el conjunto no-errante pueden no coincidir.
3. Mostrar que en espacios compactos el conjunto no-errante y el conjunto límite para T^n coincide con dichos conjuntos para T .

1.1. Descomposiciones dinámicas

Mirando la dinámica norte-sur de la esfera en contraste con las traslaciones totalmente irracionales, encontramos una diferencia sustancial en sus conjuntos límites o no-errantes a nivel topológico. A nivel dinámico hay también una diferencia clara: mientras que en el ejemplo de la esfera se puede descomponer el conjunto en cerrados invariantes no vacíos, en el caso del toro es imposible tal descomposición. Buscamos entonces nociones de *descomponibilidad* de conjuntos límites o no-errantes. Para ser más precisos, buscamos una propiedad dinámica interesante, digamos (P), tal que para toda dinámica se tenga:

$$\mathcal{L}(f) = \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha \text{ con } \{K_\alpha\}_{\alpha \in I} \text{ familia de cerrados invariantes,}$$

disjuntos dos a dos, verificando (P).

Como se intentará mostrar, existen varias nociones que apuntan a esta idea, donde todas tienen fortalezas en algunos contextos y debilidades en otros.

Para el ejemplo en la esfera podemos considerar la descomposición dinámica $\Omega(T) = \{N\} \cup \{S\}$ mientras para el ejemplo en el toro todo lo que podemos considerar es $\Omega(T) = \mathbb{T}^2$. En ambos casos las piezas, N, S, \mathbb{T}^2 de la descomposición cumplen una propiedad fundamental: no contienen cerrados invariantes propios (esto es, distinto de vacío y que no sea el conjunto mismo). Las dinámicas con esta propiedad se llaman *minimales*, ya que si miramos todos los subconjuntos cerrados invariantes ordenados por inclusión son un minimal, y cuando tenemos un subconjunto K de \mathcal{X} con esta propiedad, se le llama minimal. Por lo tanto N, S son los dos conjuntos minimales de la dinámica norte-sur de la esfera, y \mathbb{T}^2 es el único conjunto minimal de la traslación totalmente irracional del toro. El siguiente ejercicio busca profundizar en la noción de minimalidad dinámica.

Ejercicio 1.1.1.

1. Probar que la noción de minimalidad es un invariante dinámico y que una conjugación representa una relación biunívoca entre los conjuntos minimales de los sistemas conjugados.
2. Mostrar que si \mathcal{X} es compacto, siempre existe un subconjunto minimal K . Mostrar que sin la condición de ser compacto, esto puede no ser cierto.
3. Mostrar que la definición de que el conjunto $K \subset \mathcal{X}$ sea minimal para T es equivalente a lo siguiente: para todo $x \in K$ la órbita de x es densa en K .
4. Mostrar que si T es minimal y semiconjugada a S entonces S lo es. Mostrar que el recíproco no es cierto.
5. Mostrar que si un espacio discreto totalmente desconexo \mathcal{X} es minimal, o bien es una órbita periódica o bien es topológicamente un conjunto de Cantor.

Introducimos ahora un nuevo ejemplo. Consideremos un campo X del plano \mathbb{R}^2 donde todo vector tiene norma 1 y pendiente totalmente irracional. El flujo ϕ asociado a este campo tiene como órbitas las rectas en la dirección de X , y su tiempo 1 será una traslación totalmente irracional que baja al toro, ya que es \mathbb{Z}^2 periódica. Podemos considerar una modificación cambiando el campo X por un campo Y de forma de que $Y = h \cdot X$ donde $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función \mathbb{Z}^2 -periódica tal que:

- (i) $h(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $h(x) = 0$ sii $x = 0$.
- (ii) $h(x) = 1$ para todo $x \in \left[\bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}^2} \left(B(0, \frac{1}{10}) + (m, n) \right) \right]^c$,

El flujo resultante para Y se representa en la figura 1.1 y su flujo nuevamente se puede proyectar a \mathbb{T}^2 induciendo una dinámica discreta $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Estamos interesados en la siguiente pregunta: ¿es cierto en general que los conjuntos límites se pueden descomponer siempre como unión de subconjuntos minimales?, donde la unión puede ser de una familia no numerable de conjuntos. Como veremos, el mapa f nos dará una respuesta negativa.

El detalle interesante es que el mapa f resulta ser *transitivo*, es decir, tiene una órbita que es densa. Entonces si x es el punto que tal que $\text{cl}[\mathcal{O}(x, T)] = \mathbb{T}^2$, se tiene que el único minimal que podría contener a x debe ser \mathbb{T}^2 , lo cual no es posible ya que $\pi(0, 0) =: p_0$ es fijo para f ($\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es el mapa cociente). Por lo tanto no siempre se puede descomponer el conjunto límite en dinámicas minimales.

Quedamos debiendo la prueba de que f es transitivo. El siguiente ejercicio es una guía para ello.

Ejercicio 1.1.2.

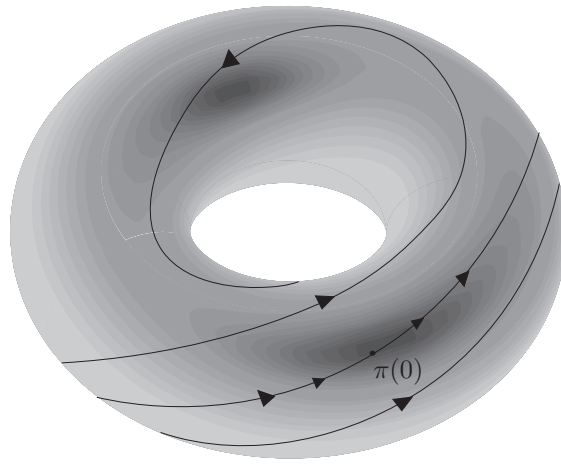


Figura 1.1: Ilustración del flujo que define el mapa f : tiene las mismas órbitas del flujo irracional salvo por la recta por $\pi(0)$ que se descompone en tres órbitas.

1. Mostrar que en un espacio \mathcal{X} que es completo y N_2 se tiene que T es transitivo si, y solo si, para todo par de abiertos A y B existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.
2. Utilizando el criterio anterior mostrar que f es transitivo.
3. * Intente encontrar cuales son todos los posibles conjuntos minimales para el ejemplo f .

La pregunta natural ahora es si con la noción de transitividad podemos obtener una buena definición de descomposición del conjunto límite o no errante. La respuesta en este caso es nuevamente negativa, y tiene una razón conceptual. Mientras dos subconjuntos minimales K, K' de \mathcal{X} o bien coinciden o son disjuntos (como bien puede verificar el lector), para conjuntos transitivos esto es falso. De hecho, en el último ejemplo que vimos tenemos que $\{p_0\}$ es transitivo y a su vez \mathbb{T}^2 es transitivo, obteniendo dos conjuntos transitivos con intersección no vacía y distinta de uno de ellos. De manera que la transitividad no es una buena definición para hablar de descomposición, salvo en algunos contextos particulares.

En el siguiente ejercicio introducimos un simple pero importante sistema llamado *Twist map*, y pedimos discutir las ideas presentadas hasta el momento.

Ejercicio 1.1.3. Consideramos el anillo $\mathbb{A} = \mathbb{R}^2 / \sim$ donde $x \sim y$ si $x - y$ tiene su primera coordenada en \mathbb{Z} . El twist map se define como $\tau : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ definido por la proyección del mapa $T(x, y) = (x + y, y)$.

1. Mostrar que τ admite una descomposición dinámica por una familia de círculos cerrados esenciales disjuntos dos a dos (esto es, círculos cuyo complemento consiste exactamente de dos componentes conexas infinitas).
2. Mostrar que $\Omega(f) = \mathbb{A}$.
3. Determinar todos los conjuntos minimales para τ y determinar todos los conjuntos transitivos para τ .
4. Dar una modificación τ' de τ de forma que su conjunto límite y no-errante coincida con el conjunto

$$\pi(\mathbb{R} \times \text{Cant})$$

donde Cant es el conjunto de Cantor usual de \mathbb{R} y π es el mapa cociente.

Para este nuevo ejemplo, tanto la minimalidad como la transitividad vuelven a ser buenos conceptos, ya que nos descomponen el conjunto límite, y lo mismo ocurre para el ejemplo modificado τ' si se hace con cuidado. Sin embargo, topológicamente surge para ambos ejemplos τ y τ' una descomposición natural y diferente que mirar los conjuntos minimales: para el primer caso el conjunto de círculos horizontales (como se muestra en el ejercicio) y para el segundo estos mismos círculos de altura en el cantor Cant. Esto representa una nueva problemática (quizá de orden más estético) en las nociones de descomposiciones.

1.1.1. Aislación dinámica

Abrimos un paréntesis para analizar un tipo de descomposición que suele ser importante. Listemos los ejemplos más relevantes hasta ahora vistos.

1. Dinámica Norte-Sur de las esferas.
2. Traslaciones o rotaciones racionales.
3. Traslaciones o rotaciones totalmente irracionales.
4. Mapa $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ transitivo pero no minimal.
5. Twist map τ .
6. Modificado del twist map τ' .

Topológicamente vemos una diferencia fundamental en la estructura de los conjuntos límites y no-errantes de los ejemplos 1 y 6 con el resto: los ejemplos 1 y 6 presentan conjuntos límites y no-errantes disconexos (distintos del resto del espacio). En el primer caso las componentes conexas son N y S y en el 6 son los círculos de la forma $\pi(\mathbb{R} \times \{\beta\}) = C_\beta$ con $\beta \in \text{Cant}$. La diferencia entre las descomposiciones $\{N, S\}$ y $\{C_\beta\}_{\beta \in \text{Cant}}$ es obvia: en la esfera los elementos de la descomposición son aislados topológicamente y en el segundo caso no lo son. En el segundo caso, elegido un elemento de la descomposición C_{β_0} dado cualquier entorno $U = \bigcup_{x \in C_{\beta_0}} B(x, \varepsilon_x)$ de él, existe otro cerrado invariante $C_{\beta'} \subset U$.

Esto motiva la definición de conjunto *dinámicamente aislado* o *localmente maximal*: un cerrado $K \subset \mathcal{X}$ es *localmente maximal* para un homeomorfismo T si existe un entorno U de K tal que

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U).$$

Claramente de la definición K resulta invariante. Profundizando esta definición llegamos a la importante noción de *atractor* y *repulsor*. Un atractor es un conjunto $A \subset \mathcal{X}$ tal que para un entorno U se tiene

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(U) \text{ y } T(\text{cl}[U]) \subset \text{int}[U].$$

Un repulsor $R \subset \mathcal{X}$ es un conjunto tal que existe un entorno U que verifica

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(U) \text{ y } T^{-1}(\text{cl}[U]) \subset \text{int}[U].$$

Estudiamos estas nociones en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.1.4.

1. Mostrar que una conjugación determina una correspondencia biunívoca entre subconjuntos localmente maximales. Estudiar la relación entre este tipo de conjuntos bajo semiconjugaciones.
2. Describir todos los conjuntos localmente maximales, los atractores y los repulsores para los ejemplos del 1 al 6, donde para el último ejemplo asumimos que la construcción es tal que en los Gaps entre los círculos C_β las órbitas decrecen.
3. Construir algún ejemplo de conjunto localmente maximal que verifique la primer condición de la definición de atractor pero no lo sea.

Cerramos esta sección con una idea que surge de lo analizado. Existen varias nociones dinámicas como *minimalidad*, *transitividad*, *maximalidad local* que en diferente contextos ayudan a establecer descomposiciones de los conjuntos límites y no-errantes. La riqueza de los posibles tipos de dinámicas no permiten establecer a priori una única noción que sea suficientemente sustancial en todos los casos. Por último, cabe mencionar, que existen otras nociones de descomposición dinámicas que son muy relevantes como, por mencionar alguna, la transitividad por cadenas que está acompañada por un resultado muy importante sobre descomposición dinámica conocido como el teorema de Conley ([3]).

1.2. Otras nociones dinámicas

Establecemos en esta sección un conjunto de conceptos dinámicos relevantes en distintos contextos. Estos conceptos como hemos visto anteriormente, tienen el objetivo de diferenciar los distintos tipos de dinámicas.

Un punto $x \in \mathcal{X}$ es *recurrente a futuro*, si $x \in \omega(x, T)$, y tenemos la definición análoga al pasado cuando la dinámica es invertible. Claramente todo punto periódico es recurrente. Notamos $\mathcal{R}(f)$ al conjunto de los puntos recurrentes de f . En general tenemos

$$\mathcal{R}(f) \subset \mathcal{L}(f) \subset \Omega(f).$$

En este caso, este conjunto no es necesariamente cerrado (como veremos más adelante), pero si es invariante. En el próximo ejercicio se propone analizar esta propiedad.

Ejercicio 1.2.1.

1. Mostrar que en contextos compactos siempre existen puntos recurrentes.
2. Mostrar que una conjugación entre dos dinámicas pone a los puntos recurrentes en correspondencia biunívoca. Estudiar el concepto para semiconjugaciones.
3. Para los ejemplos 1,2,3 y 5,6 hallar el conjunto de puntos recurrentes.
4. Pensar el mismo problema para el ejemplo 4.

Un segundo concepto que suele ser relevante es el de la propiedad *mixing*. Un sistema $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es mixing o topológicamente mixing si fijados cualquier par de abiertos $U, V \subset \mathcal{X}$ existe N tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n > N$. Visualmente, uno puede pensar en la superficie de pintura blanca en una lata, a la cual se le agrega una gota de color. Cuando uno comienza a revolver, este color se estira y fijado cualquier entorno en dicha superficie, a partir de un momento el nuevo color va a tomar este entorno.

Ejercicio 1.2.2.

1. Mostrar que esta propiedad da un invariante dinámico. Estudiar el concepto para semiconjugaciones.
2. Mostrar que en un espacio completo y N_2 un sistema mixing es transitivo.
3. Determinar cuales de los ejemplos listados del 1 al 6 son mixing y cuales no.

La propiedad Mixing resulta conceptualmente interesante. Pensemos en que nuestro sistema mixing T es la ley de cierto modelo empírico. Si quisieramos ahora saber la evolución según esta ley, deberíamos fijar una condición inicial $x_0 \in \mathcal{X}$ y estudiar $T^n(x_0)$ y esta condición inicial sale de una foto que hacemos sobre la realidad del momento. Resulta que aquí tenemos un error, es decir si la

realidad es y_0 lo que introducimos como x_0 es una aproximación. Generalmente podemos pensar $x_0 \in B(y_0, \varepsilon)$. La propiedad Mixing afirma que $T^n(B(y_0, \varepsilon))$ se va a comenzar a estirar y va a *tomar* todo el espacio, esto quiere decir que a la larga **puede** que perdemos el control de la distancia $d(T^n(y_0), T^n(x_0))$, y que esta se haga muy grande, dando un mal resultado en nuestra predicción.

Esto es una primera noción, dentro de una gran lista de nociones, de *sistema caótico*. Note el lector que la transitividad no es una buena noción en vista de lo antes expresado, ya que una traslación por más que sea totalmente irracional, siempre mantendrá $T^n(x_0)$ y $T^n(y_0)$ cerca.

Profundizando en la idea de sistema caótico, podemos ir más lejos, y pedir no solo que algún punto x_0 de cualquier entorno U de y_0 se aleje de y_0 al iterar, sino que todos (salvo, por supuesto, y_0) lo hagan, y lo hagan uniformemente lejos, llegando así a la noción de *expansividad*. Un sistema dinámico $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es *expansivo a futuro* si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$d(T^n(x), T^n(y)) < \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ implica } x = y.$$

Para sistemas invertibles decimos que $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es expansivo si

$$d(T^n(x), T^n(y)) < \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ implica } x = y.$$

Como veremos existen sistemas expansivos que no son expansivos a futuro, esto es, para separar los puntos hay que usar el futuro y el pasado.

Ejercicio 1.2.3.

1. Mostrar que en espacios compactos la expansividad es un invariante, y discutir que sucede ante la falta de compacidad.
2. Estudiar la expansividad para los ejemplos listados del 1 al 6, de donde surge un ejemplo mixing que no es expansivo que el lector debe encontrar. Para el mapa 4, recomendamos mirar lo que sigue.
3. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = 2x$. Mostrar que F define un mapa cociente $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que llamamos *doubling-map*. Mostrar que dicho mapa es transitivo, mixing y expansivo a futuro, y que además el conjunto de puntos periódicos es denso. Mostrar que no es conjugado a ningún ejemplo previo y que del mismo modo podemos trabajar con mapas $F(x) = dx$ con $d \in \mathbb{N}$.

Este último ejemplo introducido es muy importante por ser caótico y estable, como se discutirá más adelante. Reeditamos la lista de ejemplos.

1. Dinámica Norte-Sur de las esferas.
2. Traslaciones o rotaciones racionales.
3. Traslaciones o rotaciones totalmente irracionales.

4. Mapa $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ transitivo pero no minimal.
5. Twist map τ .
6. Modificado del twist map τ' .
7. Doubling-map (o mapas de grado d lineales).

En la lista de ejemplos básicos que tenemos hasta ahora no tenemos ningún ejemplo que sea un homeomorfismo expansivo. De hecho todos los homeomorfismos construidos hasta ahora son el tiempo uno de algún flujo, y como probaremos en la siguiente proposición, en contextos compactos estos nunca pueden ser expansivos.

Sin embargo, existen homeomorfismos expansivos como mostraremos en la siguiente sección, y más aún existen homeomorfismos expansivos en variedades como veremos en el próximo capítulo. Esto implica que existen homeomorfismos en variedades que no son el tiempo uno de un flujo, lo cual responde una pregunta simple pero fundamental que no habíamos considerado hasta el momento. Vale mencionar en este punto la existencia de trabajos fundamentales sobre homeomorfismos expansivos debidos al matemático uruguayo Jorge Lewowicz (ver sección 2.4). Dedicamos la siguiente subsección a la proposición y la pregunta que acabamos de señalar.

1.2.1. Expansividad, tiempos de flujos y homeomorfismos

Veamos primero el resultado sobre la no expansividad para tiempos discretos de flujos en espacios compactos, y luego discutamos básicamente la existencia de homeomorfismos que no son el tiempo discreto de un flujo.

Proposición 1.2.4. *Sea $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un flujo en un espacio compacto \mathcal{X} . Entonces para todo $T \in \mathbb{R}$ el mapa discreto $\phi_T(x) = \phi(T, x)$ no es expansivo.*

Demostración. Fijemos un tiempo T y el correspondiente mapa discreto ϕ_T . Consideremos una constante $\alpha > 0$ arbitrariamente chica. Por ser ϕ un flujo en un espacio compacto, tenemos que los mapas ϕ_t varían continuamente respecto a la topología uniforme de funciones al variar el parámetro t . En particular existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $t \in [0, \delta_0)$ se tiene $d_0(\text{Id}, \phi_t) < \alpha$, es decir $\max_{x \in \mathcal{X}} \{d(x, \phi_t(x))\} < \alpha$ para todo $t \in [0, \delta_0)$.

Consideramos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{T}{N} \in [0, \delta_0)$ y sea $\delta_T = \frac{T}{N}$. De lo anterior, tenemos que se cumple para cualquier punto $x \in \mathcal{X} \setminus \text{Sing}(\phi)$ (que suponemos no vacío de lo contrario el flujo es obviamente no expansivo)

$$d(\phi_{\delta_T}^{i+1}(x), \phi_{\delta_T}^i(x)) = d(\phi_{\delta_T}(\phi_{\delta_T}^i(x)), \phi_{\delta_T}^i(x)) < \alpha.$$

Pero entonces considerando el par x e $y = \phi_{\delta_T}(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(\phi_T^n(y), \phi_T^n(x)) &= d(\phi_{\delta_T}^{Nn}(y), \phi_{\delta_T}^{Nn}(x)) = \\ &= d(\phi_{\delta_T}^{Nn+1}(x), \phi_{\delta_T}^{Nn}(x)) < \alpha, \end{aligned}$$

Por lo cual α no puede ser constante de expansividad de ϕ_T . Como α fue considerado arbitrario, mostramos que el homeomorfismo ϕ_T no puede ser expansivo.

□

Este resultado indica que sobre las órbitas no singulares de flujos se contradice cualquier constante de expansividad que se proponga. Como mencionamos anteriormente, existen homeomorfismos expansivos como se verán en la siguiente sección, y más aún existen en superficies (como se verá en el próximo capítulo). Esto sugiere la existencia de homeomorfismos que no son el tiempo uno de un flujo. A continuación reflexionamos a un nivel básico sobre este hecho.

El primer ejemplo que se suele dar es la simetría axial y el argumento rápido es el siguiente: si este mapa es el tiempo uno de un flujo, puedo hacer un camino continuo (respecto a la topología C^0) de homeomorfismos desde la identidad hasta la simetría. Utilizando herramientas básicas de análisis se puede cambiar este camino a otro camino continuo (en la topología uniforme) que una la identidad con la simetría, esté formado solo por difeomorfismos y sea continuo en la topología C^1 . Pero entonces, el signo del determinante del jacobiano sobre tal camino debe ser constante, ya que no se puede anular, y esto es imposible porque la simetría tiene determinante negativo y la identidad positivo. Tal argumento sirve también para probar que ningún homeomorfismo que revierta orientación puede ser el tiempo uno de un flujo. Desafiamos al lector a mostrar que una simetría axial no es el tiempo uno de un flujo con herramientas puramente topológicas.

Más interesante es intentar construir homeomorfismos que no son tiempo uno de un flujo, y que aún así preservan orientación. En el próximo capítulo nos encontramos con un ejemplo paradigmático como lo es la herradura de Smale. A continuación introducimos los modelos *simbólicos*, que son claves para describir las dinámicas caóticas.

1.3. Shift y Sub-shift de tipo finito

Por espacio de finitos símbolos entendemos a cualquier espacio homeomorfo a $\{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}} = \Sigma_n^+$ o para el caso invertible $\{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} = \Sigma_n$, esto es, el conjuntos de las secuencias con valores en $\{1, \dots, n\}$ y dominios \mathbb{N} o \mathbb{Z} respectivamente. La topología de este espacio, viene dada por la producto que en este caso es metrizable mediante

$$d(\xi, \xi') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\xi(n) - \xi'(n)|}{2^{|n|}},$$

de lo cual obtenemos un espacio compacto, perfecto y totalmente desconexo; en otras palabras, un conjunto de Cantor. Como siempre pedimos al lector llevar a cabo las correspondientes consideraciones para el caso de Σ_n^+ . El *full-shift* es el mapa que corre los valores de las secuencias un lugar para la izquierda, es decir

$$\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n, \quad \sigma(\xi)(i) = \xi(i + 1).$$

Esta construcción simple y abstracta resulta muy poderosa dentro de los Sistemas Dinámicos. El punto es que el full-shift y sus restricciones a subconjuntos invariantes modelan un conjunto impresionante de dinámicas en distintos contextos. Por ejemplo, los sistemas dinámicos caóticos en variedades suelen ser proyecciones de este tipo de dinámicas simbólicas, fenómeno que intentaremos mostrar en algunos ejemplos importantes del próximo capítulo.

Para mostrar la riqueza de este tipo de dinámicas trabajaremos con el full-shift de dos símbolos, esto es, $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Transitividad: claramente este mapa no es minimal, ya que contiene exactamente dos puntos fijos que son la sucesión nula y la sucesión constante 1. Veamos que sin embargo es transitivo. Para esto podemos usar el criterio del ejercicio 1.1.2 o intentar un argumento directo como sigue. Para cada $m \in \mathbb{N}$ tomamos la familia \mathcal{F}_m de todas las sucesiones definidas en $\{-m, \dots, m\}$ a valores en $\{0, 1\}$; en otras palabras todas las tiras posibles de 0's y 1's de tamaño $[-m, m]$. Ahora por recurrencia podemos definir una sucesión $\xi \in \Sigma_n$ tal que dado cualquier $m \in \mathbb{N}$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto

$$\{\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(N_m)\}$$

contiene todas las tiras definidas por la familia \mathcal{F}_m , es decir para cualquier elemento $\tau \in \mathcal{F}_m$ se tiene $\tau = \xi|_{[k-m, k+m]}$ para algún k con $0 \leq k - m < k + m < N_m$.

Esto implica que fijada cualquier sucesión ξ' y un entorno de radio ε de ella misma, podemos encontrar un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ y n_ε con

$$d(\xi', \sigma^{n_\varepsilon}(\xi)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\xi'(n) - \sigma^{n_\varepsilon}(\xi)(n)|}{2^n} \leq \sum_{n < -m_\varepsilon, m_\varepsilon < n} \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Mixing: fijamos dos entornos arbitrarios dados por $B_1 := B(\xi_1, \varepsilon_1)$ y $B_2 := B(\xi_2, \varepsilon_2)$, y buscamos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tenga $\sigma^n(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$. Para esto notamos que es fácil construir una sucesión de sucesiones en Σ_n dada por $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

- $\xi_n \in B_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $\sigma^n(\xi_n) \in B_2$ para todo natural n mayor o igual que un cierto N .

Claramente esto implica que $\sigma^n(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Expansividad, pero NO expansividad futura! Recordamos que el doubling-map sirvió como ejemplo expansivo a futuro, mientras quedó pendiente la pregunta sobre dinámicas expansivas que no lo fueran a futuro. Veamos que el full-shift tiene esta propiedad. Primero que nada observamos que no es expansivo a futuro (ni a pasado), para lo cual fijamos una constante $\alpha > 0$ arbitraria tomamos el punto fijo dado por la sucesión nula ξ_o y tomamos una sucesión ξ' tal que $\xi'(i) = 0$ siempre que $i \neq m_0$ con $m_0 < 0$ tal que $2^{-|m_0|} < \alpha$ y 1 en el caso restante. Para estas consideraciones tenemos

$$d(\sigma^n(\xi_o), \sigma^n(\xi')) \geq \frac{1}{2^{|m_0|}} < \alpha$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, probando que σ no puede ser expansiva a futuro.

Antes de proseguir observamos el interesante hecho de que para las sucesiones construidas se tiene $\xi_o = \lim_n \sigma^n(\xi')$. Ahora bien, partiendo de estas dos sucesiones podemos separarlas utilizando el pasado, de hecho tenemos que $d(\sigma^{m_0}(\xi_o), \sigma^{m_0}(\xi')) = 1$. Con el mismo grado de dificultad se puede mostrar que en general para cualquier par de sucesiones ξ', ξ'' se tiene para algún $n \in \mathbb{Z}$ (es importante usar todo \mathbb{Z} !) que $d(\sigma^n(\xi'), \sigma^n(\xi'')) = 1$ mostrando la expansividad para la constate 1.

Periódicos densos y entropía topológica en contexto: tenemos entonces que el full-shift es un homeomorfismo caótico (recordar que el doubling-map también es caótico). Veamos otras propiedades que usualmente se consideran propias de los mapas caóticos, para lo cual prestamos atención a los puntos periódicos del full-shift de dos símbolos. Es fácil ver que el conjunto de puntos periódicos de período q , esto es $\text{Per}_q(\sigma)$, está en correspondencia biunívoca con las sucesiones finitas definidas en $\{0, \dots, q-1\}$ con valores 0 y 1. De hecho las sucesiones que son puntos periódicos son las sucesiones periódicas que surgen de concatenar las sucesiones finitas mencionadas. Veamos primero que $\text{Per}(\sigma)$ es denso en Σ_n : por lo antes dicho, fijado cualquier entorno $B := B(\xi, \varepsilon)$ podemos considerar $\xi_p \in \text{Per}(\sigma)$ tal que $\xi_p(i) = \xi(i)$ para todo $i \in \{-m, \dots, m\}$ con $2 \sum_{n \geq m} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, de donde $B \cap \text{Per}(\sigma) \neq \emptyset$.

Detengamos el caso de dos símbolos por un momento y pensemos en el full-shift general, esto es de n símbolos. Claramente todo lo hasta acá dicho para dos símbolos funciona en general! Ahora bien, será cierto que el full-shift de dos símbolos y el full-shift de $n \neq 2$ símbolos son conjugados? La respuesta es muy sencilla de argumentar, y es NO. De hecho para 2 símbolos $\#\text{Per}_q(\sigma) = 2^q$ mientras que en general para n símbolos $\#\text{Per}_q(\sigma) = n^q$, y una conjugación correspondería los puntos periódicos.

Este argumento motiva en el contexto simbólico la siguiente definición de *entropía topológica*:

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \lim_q \frac{1}{q} \ln(\#\text{Per}_q(\sigma)).$$

En otras palabras es la tasa exponencial de crecimiento de puntos periódicos. Para el caso de 2 símbolos tenemos $h_{\text{top}}(\sigma) = \ln(2)$ y en general $h_{\text{top}}(\sigma) = \ln(n)$. Aunque pueda parecer rebuscada la definición, su razón es que funciona también en otros contextos, simbólicos y no simbólicos.

La definición general de entropía topológica, independiente de los puntos periódicos, existe y es muy relevante. Sin embargo dado el objetivo de las notas no la introduciremos. El lector interesado puede consultar cualquier referencia básica como [?].

Conjuntos estables e inestables, puntos homoclínicos:

Comencemos esta nueva sección con un paréntesis. En ecuaciones diferenciales se suele introducir los tipos de singularidades de un flujo dados por *pozo*, *fuelle* o *silla*. Esto siempre motivado en los modelos lineales, donde los espacios propios de las matrices suelen determinar espacios invariantes donde el flujo atrae o repele las órbitas. Topológicamente ya hemos definidos los pozos y las

fuentes previamente. A los efectos de estas notas introducimos una definición de punto silla. Decimos que un punto fijo $p \in \mathcal{X}$ de T es un *punto silla* si existe un entorno U de p , un homeomorfismo $h : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$h \circ T = l \circ h$$

donde l es una transformación lineal cuyos valores propios tienen todos módulo distinto de 1, por lo menos uno de módulo mayor a uno y otro de módulo menor que uno. Note el lector que esta ecuación no puede ser verificada en todo $x \in U$ sino solo en aquellos tales que x y $T(x)$ estén en U . La transformación lineal l descompone el espacio \mathbb{R}^n como suma directa de subespacios que son todos invariantes, donde en algunos contraen todas las órbitas hacia 0 y en los restantes las repele (o las contrae al pasado). Notamos por W^s a el espacio generado por todos aquellos espacios donde hay contracción y por W^u a aquellos donde hay repulsión o dicho de otra forma expansión. La existencia de la conjugación local h implica lo siguiente:

1. Para todo $x \in h^{-1}(W^s) = W_U^s(p, T)$ se tiene que $T^n(x) \rightarrow_n p$, y $W_\varepsilon^s(p, T)$ es un conexo por P que para el caso de \mathbb{R}^2 separa U en dos componentes conexas.
2. Para todo $x \in h^{-1}(W^u) = W_U^u(p, T)$ se tiene que $T^{-n}(x) \rightarrow_n p$, y $W_\varepsilon^u(p, T)$ es un conexo por p que para el caso de \mathbb{R}^2 separa U en dos componentes conexas.
3. Si consideramos $V = h^{-1}(U) \cap U \cap h(U)$, se tiene que para todo punto $x \in V$ se tiene que $f^{n_1}(x) \in V^c$ para algún tiempo $n_1 \in \mathbb{N}$ y $f^{-n_2}(x) \in V^c$ para algún tiempo $n_2 \in \mathbb{N}$.

El punto 3 no implica en ningún caso que x no pueda volver a entrar tanto a futuro como a pasado!. De hecho veremos que esto puede suceder, y esperamos dejar claro en las notas que tal comportamiento está asociado a uno de los fenómenos más relevantes en la teoría de sistemas dinámicos. Debemos mencionar aquí un resultado que se suele ver en un curso de ecuaciones diferenciales que nos dice que las singularidades tipo silla inducen efectivamente puntos fijos silla para el tiempo 1 de un flujo. Este resultado es consecuencia del teorema de Grobman-Hartman ([?]) sobre linealización local de singularidades.

En general los conjuntos definidos en 1 y 2 motivan la siguiente definición: para una dinámica $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ y un punto cualquiera $x \in \mathcal{X}$ definimos

- Para $\varepsilon > 0$ el *conjunto estable local* es

$$W_\varepsilon^s(x, T) = \{y \in \mathcal{X} : d(T^n(x), T^n(y)) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

- Para $\varepsilon > 0$ el *conjunto inestable local* es

$$W_\varepsilon^u(x, T) = \{y \in \mathcal{X} : d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

- El conjunto estable de x es

$$W^s(x, T) = \{y \in \mathcal{X} : d(T^n(x), T^n(y)) \rightarrow_n 0\}.$$

- El conjunto inestable de x es

$$W^u(x, T) = \{y \in \mathcal{X} : d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) \rightarrow_n 0\}.$$

La relación entre los conjuntos locales y no locales puede ser muy complicada, como veremos sucede para el shift. Dejamos para el lector mostrar que los conjuntos estables son invariantes a pasado y los inestables a futuro, además, extender las definiciones para flujos.

Volvemos ahora al ejemplo del shift $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Miramos el punto fijo ξ_o dado por la sucesión constante 0. Es claro que no puede ser un punto silla, ya que un entorno de ξ_o será totalmente desconexo, y por lo tanto no puede ser homeomorfo a $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$. Sin embargo podemos ver que ξ_o tiene similitud a un punto silla, dada por la dinámica alrededor del mismo. Para esto fijamos el entorno U de ξ_o dado por todas aquellas secuencias ξ tal es que $\xi(-1), \xi(0), \xi(1) = 0$ y buscamos los conjuntos estable e inestable de ξ_o dentro de U que llamaremos $W_U^s(\xi_o, \sigma)$ y $W_U^u(\xi_o, \sigma)$. Note el lector que si una secuencia ξ de U tiene algún 1 en una posición $i > 1$ entonces $\sigma^j(\xi) \notin U$, y por el contrario, si $\xi(j) = 0$, $j \geq 0$ entonces $\sigma^n(\xi) \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En conclusión

$$W_U^s(\xi_o, \sigma) = \{\xi \in U : \xi(j) = 0 \text{ para todo } j \geq 0\},$$

y de la misma forma se puede ver que

$$W_U^u(\xi_o, \sigma) = \{\xi \in U : \xi(j) = 0 \text{ para todo } j \leq 0\}.$$

Además, cualquier otro elemento $\xi \in U$ que no esté en $W_U^s(\xi_o)$ o $W_U^u(\xi_o)$ debe verificar que existen dos enteros $n_1 < 0 < n_2$ tales que $\sigma^k(\xi) \in U$ si $n_1 < k < n_2$ mientras que $\sigma^{n_1}(\xi)$ y $\sigma^{n_2}(\xi)$ no están en U , hecho que dejamos su verificación a cargo del lector. Por tanto, la dinámica en el entorno U es similar a la dada por un punto fijo silla.

Nos preguntamos ahora como son los conjuntos estable e inestable globales de ξ_o . Es fácil ver que para $\xi \in \Sigma_2$ se tiene $\sigma^n(\xi) \rightarrow_n \xi_o$ si y solo si $\xi(j) = 0$ para todo j mayor que cierto j_0 , es decir

$$W^s(\xi_o, \sigma) = \{\xi \in \Sigma_2 : \text{ existe } j_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \xi(j) = 0 \text{ para todo } j > j_0\},$$

y de la misma manera se puede ver que

$$W^u(\xi_o, \sigma) = \{\xi \in \Sigma_2 : \text{ existe } j_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \xi(j) = 0 \text{ para todo } j < j_0\}.$$

Una primer conclusión de esto es sorprendente: los dos conjuntos, $W^s(\xi_o, \sigma)$ y $W^u(\xi_o, \sigma)$ son densos en el espacio! Por lo tanto claramente no pueden ser cerrados, porque de serlo contendrían entre otras cosas órbitas periódicas y el

lector debe ver que esto no es posible. Re-escribamos el fenómeno que acabamos de ver: los puntos que a futuro mueren en ξ_o son densos en el espacio, así como también los que mueren a pasado.

Mas aún, si miramos los puntos que mueren a futuro y a pasado en ξ_o también tenemos un conjunto denso en el espacio, esto es, $\text{cl}(W^u(\xi_o, \sigma) \cap W^s(\xi_o, \sigma)) = \Sigma_2$.

A los elementos en $W^u(\xi_o, \sigma) \cap W^s(\xi_o, \sigma)$ se les llama puntos homoclínicos de ξ_o . Este tipo de puntos son paradigmáticos en la teoría de sistema dinámicos, y están asociados como vemos en este ejemplo a las dinámicas caóticas. Más adelante nos encontraremos en otros contextos con las intersecciones homoclínicas.

Ejercicio 1.3.1.

1. Mostrar que si $x \in \mathcal{X}$ es un punto periódico de período q de $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, entonces $W^s(x, T) = W^s(x, T^q)$ y el resultado análogo para la variedad inestable.
2. Hallar los conjuntos estables e inestables de los puntos periódicos y mostrar que tienen la misma propiedad que para ξ_o .
3. Mostrar que dados cualquier par de puntos periódicos diferentes, se tiene que los conjuntos estable de uno e inestable del otro se cortan en un conjunto denso de puntos.

1.3.1. Sub-shifts de tipo finito

Más en general podemos considerar restricciones del full shift a dominios dentro de Σ_n , y es muy interesante hacerlo, ya que de este conjunto de dinámicas simbólicas surge una basta cantidad de diferentes modelos que terminan siendo fundamentales mismo en contextos donde el espacio es una variedad y la dinámica diferenciable. Comencemos con el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.3.2. Sea $\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$. Decimos que una secuencia $\xi \in \Sigma_n$ es *casi periódica* si dado cualquier largo de palabra $T \in \mathbb{N}$ existe otro largo $S \in \mathbb{N}$ de modo que toda sub-palabra de ξ de largo T se repite en toda sub-palabra de largo S (Dejamos al lector precisar estas nociones intuitivas).

1. Mostrar que $\sigma|_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M} = \text{cl}\{\sigma^n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es siempre un conjunto minimal.
2. Construir ejemplos de sucesiones casi periódicas que no son periódicas.
3. Estudiar el cardinal del conjunto de subconjuntos minimales para $\sigma : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$.

Otro tipo de restricciones que resultan de gran relevancia son las que se conocen como sub-shifts. Para construir estas, se debe especificar el conjunto invariante Σ_A en Σ_n que siempre debe estar asociado a una matriz A de tamaño $n \times n$ cuyas entradas son 0's y 1's, donde

$$\Sigma_A = \{\xi \in \Sigma_n : A_{\xi(i), \xi(i+1)} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Dicho de otra forma, se puede dibujar un grafo con n vértices, y poner una flecha desde el símbolo j al k , siempre que $A_{j,k} = 1$ y nada en otro caso. Entonces los elementos en Σ_A son aquellas sucesiones de Σ_n que en cada caso $i \in \mathbb{Z}$ respetan el grafo, en el sentido de que existe una flecha entre $\xi(i)$ y $\xi(i+1)$. Veamos el siguiente ejercicio para entender mejor estos sistemas.

Ejercicio* 1.3.3.

1. Mostrar que todo sub-shift contiene al menos un punto periódico y hacer ejemplos con finitas órbitas periódicas y otros con infinitas órbitas periódicas.
2. Dar ejemplos de sub-shift que sean transitivo pero no mixing, uno discreto y otro no.
3. Mostrar que una condición suficiente para que el sub-shift sea mixing es que A^N no tenga entradas nulas para algún $N \in \mathbb{N}$.
4. Mostrar que la definición de entropía topológica dada para el full-shift está bien definida para los sub-shift.

Como ya fue mencionado, todas estas definiciones tienen sentido también para el caso no-invertible $\sigma : \Sigma_n^+ \rightarrow \Sigma_n^+$. Podemos ahora actualizar nuestra lista de modelos de dinámicas discretas.

1. Dinámica Norte-Sur de las esferas.
2. Traslaciones o rotaciones racionales.
3. Traslaciones o rotaciones totalmente irracionales.
4. Mapa $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ transitivo pero no minimal.
5. Twist map τ .
6. Modificado del twist map τ' .
7. Doubling-map (o mapas de grado d lineales).
8. Full-shift, Sub-shift y otras restricciones.

1.4. Suspensiones

El lector podrá encontrar escasa hasta ahora la presencia de ejemplos continuos. Habiendo presenciado un curso de ecuaciones diferenciales, y teniendo un poco de astucia para las construcciones, debe ser capaz de formar ejemplos a partir de la construcción de campos, los cuales forman una basta lista.

Sin embargo presentaremos aquí una construcción que viene motivada en un proceso inverso llamado retorno. El retorno de un flujo es una dinámica discreta que surge de tomar una variedad Σ transversal al flujo y tal que todo punto

de esta variedad retorna a la variedad al evolucionar según el flujo. Esta variedad Σ se suele llamar *sección de Poincaré* ya que tiene un papel fundamental en su famoso estudio al problema de los *tres cuerpos*, papel que volveremos a mencionar a lo largo de estas notas.

Ahora nos interesa abstraer el proceso inverso con el cual podremos construir dinámicas continuas a partir de dinámicas discretas. Luego, dada la basta lista de ejemplos discretos que tenemos, automáticamente tendremos una basta lista de ejemplos continuos.

Fijado un sistema invertible $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ definimos en $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ el flujo $\tilde{\phi}$ mediante

$$\tilde{\phi}(t, (x, s)) = (x, t + s), \text{ donde } t \in \mathbb{R}, (x, s) \in \tilde{\mathcal{S}}, (x, t + s) \in \tilde{\mathcal{S}}.$$

Este sistema dinámico continuo carece de complejidad y no guarda relación ninguna con la dinámica discreta T . Para lograr lo que buscamos tomamos el espacio cociente $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} /_{(x, s+n) \sim (T^n(x), s)}, n \in \mathbb{Z}$ y definimos el flujo dado por la proyección de $\tilde{\phi}$, esto es,

$$\phi(t, [(x, s)]) = q(\tilde{\phi}_t(x, s)), \text{ donde } q \text{ es el mapa cociente.}$$

Queda a cargo del lector verificar que ϕ es un flujo y que cuando \mathcal{X} es una variedad se tiene que \mathcal{S} lo es. Continuamos con el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.4.1.

1. Mostrar que cada punto periódico de un mapa discreto induce una órbita periódica en la suspensión, y que cada órbita periódica de la suspensión está dada por un punto periódico del mapa. Mostrar que un mapa transitivo induce una suspensión transitiva y que lo mismo sucede con la propiedad mixing.
2. Describir las suspensiones de las rotaciones de \mathbb{S}^1 .
3. Consideramos un sub-shift transitivo. Mostrar que la suspensión queda definida en un espacio conexo pero no localmente conexo. Para el full-shift determinar las propiedades dinámicas de la suspensión, definir los conjuntos estables e inestables locales y globales para cualquier punto, y estudiar las intersecciones homoclínicas.

El rol de las secciones de Poincaré es fundamental en dos de los problemas mas relevantes en la teoría de sistemas dinámicos: el *problema de los tres cuerpos* y el *atractor de Lorenz*. En ambos casos para entender la dinámica se recurre a una sección de Poincaré, y el problema se traduce al estudio de la dinámica discreta dada en los diferentes contextos. Mencionamos por último que las suspensiones no solo son una herramienta interesante para definir dinámicas, sino que también considerando diferentes clases de mapas en superficies se obtienen interesantes ejemplos de 3-variedades los cuales admiten *foliaciones* naturales inducidas por el mapa original.

Capítulo 2

Dinámicas en variedades

El estudio de sistemas dinámicos en variedades es parte de los problemas fundamentales en que se basa la teoría. En particular, las ecuaciones diferenciales definen dinámicas en variedades, y las secciones de Poincaré inducen dinámicas discretas en variedades. Aunque inicialmente uno puede pensar que la teoría partió buscando entender ejemplos concretos como es el caso del problema de los tres cuerpos, rápidamente surgió la necesidad de comprender amplias familias de sistemas por la razón de que perturbaciones en espacios infinito dimensionales (como ser los difeomorfismos) de los ejemplos particulares que se tenían, comenzaron a ser relevantes. Por ejemplo, en el problema de los tres cuerpos, el twist map del anillo y sus posibles perturbaciones juegan un papel fundamental. El lector puede pensar que si suponemos que alguna masa es nula, aparece el twist map asociado a la ecuación diferencial, y en cambio, si consideramos masas no nulas pero pequeñas, lo que aparece son perturbados del twist map.

El problema matemático de clasificar todas las posibles dinámicas en variedades pierde sentido al ser imposible clasificar las variedades topológicamente. Inclusive en superficies donde no se tiene este problema, la riqueza posible de las diferentes dinámicas no permite pensar en una clasificación exhaustiva. De todos modos, existen intentos por generar clasificaciones en distintas direcciones. Mencionamos a continuación alguna de ellas.

- **Familias:** en muchos casos las dinámicas de interés forman familias finitodimensionales lo cual permite buscar clasificaciones.
- **Invariantes:** la idea es fijado el espacio asociar a cada sistema dinámico un objeto que sea invariante bajo conjugaciones: simple en algún sentido, como por ejemplo un número, y absorba suficiente información dinámica: si dos dinámicas difieren *mucho* entonces el invariante debe ser diferente. El ejemplo paradigmático de invariante es el número de rotación de Poincaré en el círculo, y sus extensiones a superficies.
- **Genericidad:** la idea es describir un conjunto residual del espacio de las dinámicas. Por ejemplo dentro de los difeomorfismos de regularidad $r > 0$,

o de los difeomorfismos analíticos, o de ciertas familias. Se puede tener la esperanza de que este enfoque pueda concretarse en contextos generales, sin la necesidad de saber exactamente en que variedad se trabaja.

En este capítulo comentaremos sobre las dinámicas Morse-Smale en variedades dadas por flujos con fuerte relación con la topología del espacio. Luego presentaremos ejemplos paradigmáticos que presentan caos, estos son el *doubling-map*, la *herradura de Smale* y los difeomorfismos *Anosov*. Deben quedar claro para estos ejemplos reflejos de tres aspectos fundamentales:

- **Relación con las dinámicas simbólicas.**
- **Estabilidad al perturbar la dinámica.**
- **Existencia de intersecciones homoclínicas transversales.**

2.1. Sistemas Morse-Smale

Fijemos una variedad M compacta y conexa e intentemos construir diferentes clases de dinámicas. Para empezar tenemos la identidad, que no tiene gracias. Partiendo de la identidad podemos hacer lo siguiente: fijamos una bola cerrada B de M , y en esa bola ponemos cualquier dinámica que sea la identidad en su borde, para luego extenderla fuera de B como la identidad. Esto nos lleva a poder *encajar* todas las dinámicas de la bola que son la identidad en el borde dentro de la variedad, y dado que en la bola se pueden hacer muchas cosas interesantes, logramos una buena familia de dinámicas. Ahora bien, todos estos ejemplos son locales, no utilizan la estructura de la variedad en particular.

La construcción de ejemplos sencillos tal que las órbitas no triviales no quedan confinadas a una bola de M , vienen dados por lo que se conoce como funciones de Morse. Estas funciones fueron introducidas por M. Morse con el fin de estudiar variedades. De hecho, utilizando estas herramientas se puede obtener por ejemplo, el teorema de clasificación de superficies.

Para construir una función de Morse tomamos la variedad M y la encajamos en algún \mathbb{R}^n que se puede hacer por los famosos teoremas de Whitney o de Nash si se quiere hacer isométricamente (un encaje es una inmersión inyectiva y propia). Llamando i a la inmersión (encaje), tenemos $i(M) \subset \mathbb{R}^n$. Fijamos el eje coordenado de \mathbb{R}^n que llamamos Z dado por los vectores $(0, \dots, 0, z)$. La idea ahora es pensar que tenemos gravedad en la dirección Z y luego hacer fluir los puntos en $i(M)$ según la gravedad: fijamos el campo $X = (0, \dots, 0, 1)$ y en cada punto $p \in M$ tomamos el vector $Y_p = \text{pr}_{T_p i(M)}(X(p))$. Esto define un campo Y tangente a $i(M)$ y por lo tanto tenemos un flujo asociado $\phi_i : \mathbb{R} \times i(M) \rightarrow i(M)$. El tiempo 1 de ϕ_i es el mapa que nos interesa.

Queremos que el flujo tenga solo finitas singularidades, o sea finitos puntos $p \in i(M)$ donde $T_p i(M)$ es perpendicular al eje Z . Es decir no queremos, por ejemplo, una inmersión i tal que $i(M)$ interseccione un plano perpendicular a Z en toda una bola cerrada dentro de $i(M)$. Esto es uno de los detalles de la

teoría de Morse y responde a los teoremas de transversalidad: genericamente las immersiones van a ser buenas, e inducir flujos con finitas singularidades. Los mapas de Morse son los tiempos 1 de los flujos ϕ_i para estas immersiones genéricas.

En la figura 2.1 mostramos un sistema Morse-Smale en la esfera, cuya construcción se puede pensar de la siguiente manera: comenzamos con la esfera usual de \mathbb{R}^3 , la abollamos en el punto de altura mas alta manteniendo la simetría respecto al eje z , y luego la rotamos con respecto al eje y un ángulo chico.

El lector puede observar como existe una relación entre la dinámica y la característica de Euler del espacio, dada por la triangulación por líneas punteadas, lo cual debe recordar a lo mencionado en el primer capítulo al introducir la dinámica Norte-Sur de la esfera. Este fenómeno queda establecido por los teoremas de índice de Poincaré-Hopf y de Lefschetz.

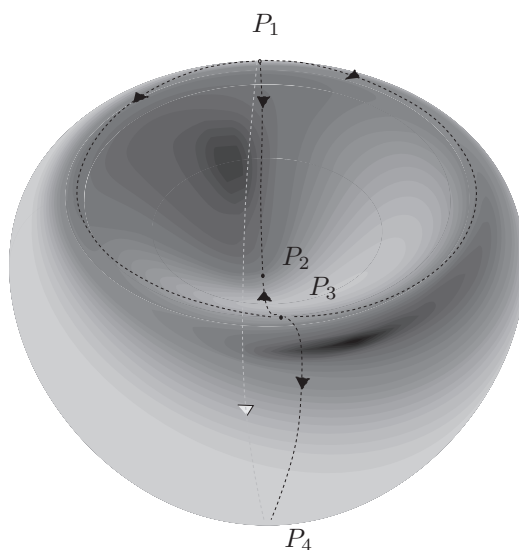


Figura 2.1: Ilustración de un sistema Morse-Smale en la esfera, donde P_1 es una fuente, P_3, P_4 son pozos, P_2 es una silla.

Ejercicio 2.1.1.

1. Construir dinámicas norte-sur de las esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 1$ utilizando funciones de Morse.
2. Bosqueje como construir funciones de Morse en la esfera \mathbb{S}^2 que induzcan dinámicas con tantos puntos fijos como se quiera.
3. Tomar un toro en \mathbb{R}^2 , y estudiar la dinámica de alguna función de Morse.

Las órbitas de esta clase de mapas no quedará confinada a una bola ya que para ello deben existir infinitos puntos fijos, que las funciones de Morse no presentan. A este tipo de dinámicas se les llama dinámicas Morse-Smale, ya que S. Smale fue quien consideró estos mapas con interés dinámico. Se puede mostrar que para los sistemas Morse-Smale se tiene la siguiente propiedad (exigiendo a i otra condición genérica para el punto 2):

1. $\Omega(f) = \{p_1, \dots, p_m\} = \text{Fix}(f)$,
2. Todos los puntos fijos p_i son hiperbólicos.

Smale extendió la definición como sigue: un sistema es Morse-Smale si

1. $\Omega(f) = \{p_1, \dots, p_m\} = \text{Per}(f)$,
2. Todos los puntos periódicos p_i son hiperbólicos.

Dejamos al lector la tarea de pensar un sistema en esta segunda clase pero que no esté en la primera. Smale conjeturó que fijada una variedad, en el espacio de difeomorfismos con la topología C^1 , aquellos elementos que inducen dinámicas Morse-Smale formaban un conjunto denso. Como veremos el mismo elaboró un contraejemplo y la conjetura fue modificada por J. Palis.

2.2. Mapas expansores de \mathbb{S}^1

Volvamos a nuestro ejemplo 7 de la lista: el doubling map $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Mostraremos como este mapa que está definido en la variedad \mathbb{S}^1 está relacionado con el shift $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Recordamos que f es la proyección del mapa $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $F(x) = 2x$. Definimos la partición $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{I}_0, \tilde{I}_1\}$ del intervalo $[0, 1)$ dada por $\tilde{I}_0 = [0, \frac{1}{2})$ y $\tilde{I}_1 = [\frac{1}{2}, 1)$, que define la partición de \mathbb{S}^1 dada por $\mathcal{P} = \{I_0 = \pi(\tilde{I}_0), I_1 = \pi(\tilde{I}_1)\}$ (recordar que $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es el mapa cociente). Observamos que esta partición guarda una relación con la dinámica: $f(I_i) = \mathbb{S}^1$ para $i = 1, 2$.

La relación que encontraremos con el shift pasa por mirar el itinerario de cada $x \in \mathbb{S}^1$ para f según la partición \mathcal{P} . Claramente podemos asociar a cada $x \in \mathbb{S}^1$ una secuencia ξ_x que sea su itinerario, es decir

$$\xi_x(i) = 0 \text{ si y solo si } f^i(x) \in I_0 \text{ y } \xi_x(i) = 1 \text{ si y solo si } f^i(x) \in I_1.$$

Esto nos define un mapa $h_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que relaciona las dinámicas entre f y σ de la siguiente manera:

$$h_1 \circ f = \sigma \circ h_1$$

como bien puede verificar el lector. En otras palabras, h_1 se parece a una semiconjugación entre f y σ , pero esto debe sonar mal, ya que el espacio de salida de h_1 es conexo y el de llegada es totalmente desconexo! Además no

hemos utilizado nada sobre la dinámica f como para encontrar algo interesante. Lo que haremos es construir una semiconjugación $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{S}^1$ a partir de extender la inversa para h_1 .

Estudiemos h_1 . Claramente no es continua, ya que $h_1([\frac{1}{2}])$ es una sucesión que empieza con 1, mientras que $h_1([\frac{1}{2} - \frac{1}{n}])$ es una sucesión que empieza con 0 para todo $n \geq 2$. Esto es lo que hace posible que h_1 mande un espacio conexo en otro totalmente desconexo. Por otro lado podemos ver que h_1 es inyectiva: tomemos x e y tales que $\xi_x(0) = \xi_y(0)$, y digamos para fijar ideas que ambos valores son 0 (el otro caso se hace igual). Entonces podemos considerar un representante \tilde{x} de la clase x en \tilde{I}_0 y un representante \tilde{y} de la clase y en \tilde{I}_0 , lo cual implica en particular que $|\tilde{x} - \tilde{y}| < \frac{1}{2}$. Al iterar \tilde{x} e \tilde{y} por F su distancia crece por un factor de 2^n para el paso n , por lo que para algún $j \in \mathbb{N}$ se debe tener que

- a) vale para $j - 1$ que o bien $F^{j-1}(\tilde{x}), F^{j-1}(\tilde{y}) \in [k, k + \frac{1}{2})$ para algún $k \in \mathbb{N}$ o bien $F^{j-1}(\tilde{x}), F^{j-1}(\tilde{y}) \in [k + \frac{1}{2}, k + 1)$ para algún $k \in \mathbb{N}$,
- b) para j no vale esta afirmación.

Pero entonces, $F^j(\tilde{x}), F^j(\tilde{y})$ debe estar ambos en un intervalo $I = [k', k' + 1)$ para $k' \in \mathbb{N}$, sin que se cumpla la afirmación a). Esto implica necesariamente que o bien $F^j(\tilde{x}) \in [k', k' + \frac{1}{2})$ y $F^j(\tilde{y}) \in [k' + \frac{1}{2}, k' + 1)$ o la afirmación simétrica, por lo que proyectando tenemos

$$h_1(x)(j) \neq h_1(y)(j), \text{ es decir } h_1(x) \neq h_1(y).$$

Por otro lado, podemos ver que h_1 no es sobreyectiva. Si consideramos $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dada por $\xi(i) = 1$ para todo i , se tiene que esta sucesión no puede ser el itinerario de ningún punto de \mathbb{S}^1 : si tuviéramos $\xi_x = \xi$ entonces $\xi_{f(x)}$ es la sucesión constante 1 también, por lo que debe ser $f(x) = x$ dada la inyectividad de h_1 . Ahora, para nuestro mapa f no hay ningún punto fijo en el intervalo I_1 , por lo que es imposible la existencia de tal punto fijo. El siguiente paso es mostrar que sin embargo h_1 admite una inversa que se extiende a todo $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ como la semiconjugación $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{S}^1$ buscada.

Para esto fijamos una sucesión cualquiera $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y tomamos ahora la siguiente secuencia de intervalos compactos asociado a la sucesión ξ :

- $J_0 = \text{cl}[I_{\xi(0)}]$,
- $J_1 = \text{cl}[f^{-1}(I_{\xi(1)}) \cap J_0]$,
- $J_n = \text{cl}[f^{-n}(I_{\xi(n)}) \cap J_{n-1}]$ para $n > 1$.

Esta sucesión que llamamos $\mathcal{J}(\xi) = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de intervalos compactos, y cuyo diámetro tiende a cero, como se puede verificar inductivamente, y por lo tanto para cada $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ podemos considerar el punto $x_\xi = \bigcap_n J_n$, y tenemos definida entonces la función

$$h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad h(\xi) = x_\xi.$$

Claramente h es continua, ya que si partimos de dos sucesiones cercanas ξ, ξ' , los resultados $h(\xi), h(\xi')$ se encontrarán por una cantidad grande de enteros en los mismos intervalos J_n , por lo que deberán estar cerca. Por otro lado es fácil verificar que

$$h(h_1(x)) = x$$

ya que si $h_1(x)$ es el itinerario, podemos recuperar x como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n^*$, J_n son los elementos de la sucesión asociada a $h_1(x)$ y J_n^* es o mismo sin el extremo derecho (según la orientación de \mathbb{R}), y por lo tanto se tiene $x_{h_1(x)} = x$. Esto implica que h es sobreyectiva y es la extensión de la inversa de h , de donde se debe verificar en el conjunto imagen de h_1 que llamamos \mathcal{Y} , la ecuación

$$h \circ \sigma = f \circ h.$$

Para llegar a que h es una semiconjugación basta ver que esta ecuación se sostiene en todo el espacio, lo cual equivale a ver que se sostiene en un conjunto denso. Veamos que \mathcal{Y} es en efecto denso, para lo cual fijamos una secuencia arbitraria $\xi_0 \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y queremos ver que la podemos aproximar por elementos de \mathcal{Y} con precisión arbitraria.

Fijado un entorno arbitrario U de ξ_0 podemos considerar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que toda sucesión que coincide con ξ_0 en los primeros $n_0 + 1$ lugares, está en U . Tomando ahora los intervalos semi-abiertos

- $J_0 = I_{\xi(0)}$,
- $J_1 = f^{-1}(I_{\xi(1)}) \cap J_0$,
- $J_{n_0} = f^{-n_0}(I_{\xi(n_0)}) \cap J_{n_0-1}$,

podemos ver que existe $z \in \bigcap_{i=0}^{n_0} J_i$, y tomando ahora $h_1(z)$ tenemos que necesariamente $h_1(z) \in U$.

En conclusión, $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es una semiconjugación entre el full-shift σ y el doubling-map f que además es uno a uno en un conjunto denso de símbolos. Nos encontramos así con un hecho sorprendente y muy relevante, donde las dinámicas simbólicas modelan dinámicas en variedades.

La construcción de semiconjugaciones utilizando particiones y sus itinerarios asociados son una herramienta muy importante, que funciona en gran generalidad. A este tipo de particiones se les suele llamar por *particiones de Markov*. Estas proyecciones resultan en casos como el estudiado ser casi conjugaciones, ya que son uno a uno salvo para un conjunto numerable de puntos. Por último el lector puede encontrar una fuerte relación para el mapa f entre los itinerarios asociados y las expansiones diádicas de los números del intervalo. Esto es un reflejo de la interesante relación que existe entre la dinámica y la teoría de números.

Habiendo entendido el caso para el doubling-map f , nos interesamos por observar la estabilidad de las construcciones hechas. Este es el siguiente hecho: existe un entorno \mathcal{U} de f en el espacio de endomorfismos diferenciales, tal que

todo elemento en \mathcal{U} admite una semiconjugación con el full-shift $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

El entorno \mathcal{U} que consideraremos será dado por aquellos endomorfismos C^1 de \mathbb{S}^1 tales que:

- (i) $f'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$,
- (ii) f tiene grado dos, o dicho de otra forma para nuestro caso particular, existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se proyecta sobre f en el cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} y $F([0, 1]) = [z, z + 2]$.

La razón de porque (i) e (ii) determinan un entorno en el espacio de endomorfismos C^1 radica en resultados básicos de teoría de cubrimientos.

En esta situación, fijado un elemento f de \mathcal{U} , podemos construir una partición de \mathbb{S}^1 por intervalos semi-abiertos

$$\mathcal{P} = \{I_0, I_1\}$$

que al aplicar el mapa se comportan igual que los construidos para el caso lineal, es decir, $f(I_0)$ toma exactamente inyectivamente $I_0 \cup I_1$ donde el borde izquierdo de I_0 se mantiene fijo y $f(I_1)$ toma inyectivamente $I_0 \cup I_1$, donde el borde izquierdo de I_1 se manda sobre el borde izquierdo de I_0 .

Entonces, exactamente la misma construcción y prueba hecha para el caso lineal, permite la construcción de la semiconjugación h para nuestra $f \in \mathcal{U}$, hecho que queda como ejercicio para el lector.

Ejercicio 2.2.1. Mostrar que efectivamente para $f \in \mathcal{U}$ se puede construir la partición \mathcal{P} , y que a partir de ella se obtiene la semiconjugación h .

2.3. La herradura de Smale

En esta sección mostraremos una construcción fundamental de la dinámica diferenciable, que guarda fuerte relación con lo hecho para el doubling-map. Construiremos un difeomorfismo del plano que tiene un subconjunto compacto, invariante y localmente maximal conjugado al full-shift de dos símbolos. La diferencia sustancial con lo anterior, es que en este caso el mapa es invertible. Este ejemplo tiene motivaciones históricas que luego se comentarán, además de ser la base de la definición de los *Sistemas Dinámicos Hiperbólicos* los cuales son elementos de importantes teorías dentro del área.

Comenzamos tomando el rectángulo del plano $R = [0, 1] \times [0, 1]$ y dentro de R tomamos los rectángulos horizontales $H_0 = [0, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$, $H_1 = [0, 1] \times [\frac{2}{3}, 1]$ y los rectángulos verticales $V_0 = [0, \frac{1}{3}] \times [0, 1]$ y $V_1 = [\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]$.

Consideramos un mapa lineal $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que tiene la forma $L(x, y) = (\frac{1}{3}x, 3y)$. En particular tenemos que $L(H_0) = V_0$, $L(H_1) = V_1 + (-\frac{2}{3}, 2)$ y $L(R \setminus H_0 \cup H_1)$ es el rectángulo $[0, \frac{1}{3}] \times [1, 2]$. Notar que $L(H_1)$ es isométrico a V_1 .

El siguiente paso es llevar el rectángulo $L(H_1)$ isométricamente para que quede exactamente sobre V_1 , de manera de que la imagen de todo R tenga forma de herradura de caballo teniendo además ciertas precauciones (ver figura 2.2). Para esto hacemos uso de un difeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

1. El soporte de g , esto es el conjunto donde es diferente de la identidad, sea un disco topológico que no interseca a un entorno de V_0 .
2. $g(L(H_1)) = V_1$ y además el mapa $g|_{L(H_1)}$ es una isometría: en particular manda los segmentos horizontales de $L(H_1)$ en los horizontales de V_1 y los segmentos verticales de $L(H_1)$ en los verticales de V_1 . Note el lector que para lograr la forma de herradura, se debe invertir el orden de los segmentos horizontales y verticales: los que están arriba pasan a estar abajo y los que están a la derecha pasan a estar a la izquierda.

La construcción de g en detalle la dejamos a cargo del lector, reconociendo que es un trabajo tedioso. La idea es hacerlo utilizando un campo de vectores conveniente y tomando el tiempo uno del flujo. Una vez tenemos el mapa g , definimos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $f = g \circ L$ que es el difeomorfismo con el que trabajaremos (ver figura 2.2). Por construcción se tienen las siguientes propiedades importantes para el mapa f :

- En $H_0 \cup H_1$ el mapa f lleva segmentos verticales en segmentos verticales y segmentos horizontales en segmentos horizontales.
- $\|D_x f(1, 0)\| = \frac{1}{3}$ para todo $x \in H_0 \cup H_1$,
- $\|D_x f(0, 1)\| = 3$ para todo $x \in H_0 \cup H_1$.

El conjunto f -invariante que nos interesa es

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(R)$$

que se conoce como la *herradura de Smale*. En la figura 2.3 se representa dicha intersección para $n = 1, 2$ y 3 . Es importante que el lector analice este dibujo y logre intuir que la topología de Λ será la de un conjunto de Cantor. En lo que sigue veremos dos hechos generales y fundamentales: *la dinámica en Λ es caótica y el conjunto está determinado por las intersecciones homoclinicas del punto fijo 0*. Como se anunciara al principio del texto, establecer esta relación entre órbitas homoclinicas y la dinámica es un gran logro de la teoría.

Mostraremos como se puede construir una conjugación entre los sistemas $f|_{\Lambda}$ y $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Como se verá, esta construcción es muy similar a la construcción de la semiconjugación para el doubling-map. Note el lector que Λ contiene al menos un punto fijo dado por $(0, 0)$.

Comenzamos tomando una partición $\mathcal{P} = \{V_0, V_1\}$ para Λ (formalmente uno debe intersectar los conjuntos de la partición con Λ), y nuevamente a cada punto

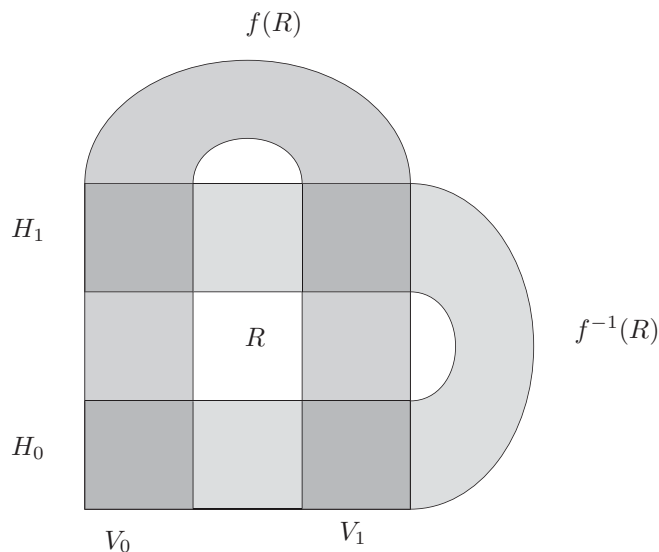


Figura 2.2: El mapa f .

x de Λ le asociaremos su itinerario para futuro y pasado dado por $\xi_x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ donde

$$\xi_x(i) = 0 \text{ si y solo si } f^i(x) \in V_0 \text{ y } \xi_x(i) = 1 \text{ si y solo si } f^i(x) \in V_1.$$

Esto nos define un mapa $h_1 : \Lambda \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ que veremos en lo que sigue resulta ser un homeomorfismo, a diferencia del caso en el doubling map, en que tuvimos que recurrir a la extensión de su inversa.

Veamos que como en el caso del doubling-map, h_1 es inyectiva. Para esto consideramos $x \neq y \in \Lambda$ y asumimos que están en un mismo rectángulo V_i , $i = 0$ o $i = 1$ ya que de lo contrario tenemos trivialmente $\xi_x \neq \xi_y$. Para fijar notación digamos que ambos puntos están en V_0 , el otro caso se resuelve de la misma manera. Tenemos que o bien x e y están en distintos segmentos verticales maximales de V_0 o bien están en distintos segmentos horizontales de V_0 , ya que de lo contrario son el mismo punto. Nuevamente para fijar ideas, digamos que están en distintos segmentos horizontales de V_0 , el otro caso se resuelve de la misma manera (tomando la inversa). Podemos considerar en esta nueva situación el par $x, y' \in V_0$ donde:

- (i) x, y' están en el mismo segmento vertical de V_0 ,
- (ii) y, y' están en el mismo segmento horizontal de V_0 .

El punto (ii) implica por construcción que a futuro y, y' están siempre en el mismo elemento de la partición, ya que f contrae en la dirección horizontal, es

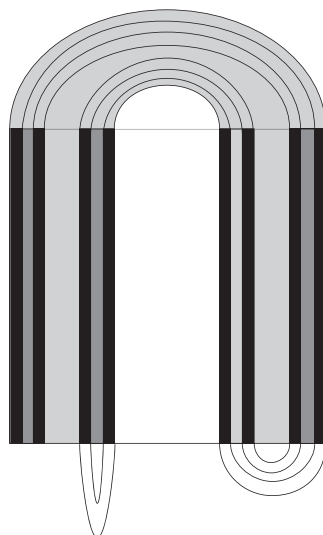


Figura 2.3: Representación de $R \cap f(R) \cap f^2(R) \cap f^3(R)$.

decir

$$\xi_y(n) = \xi_{y'}(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte en la dirección vertical, podemos ver lo siguiente: si x, y' están en diferentes elementos de $\{H_0, H_1\}$, se tiene que $\xi_x(1) \neq \xi_{y'}(1) = \xi_y(1)$ y por lo tanto obtenemos $h_1(x) \neq h_1(y)$. En caso de que x, y' estén en el mismo elemento de $\{H_0 \cap V_0, H_1 \cap V_0\}$ tenemos que $d(x, y') \leq \frac{1}{3}$, siendo además que ambos elementos están en el mismo segmento vertical maximal de V_0 . Luego, como se argumentó para el doubling-map, vamos a tener un primer $n_0 > 0$ tal que $\frac{1}{3} < d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y')) \leq 1$ y ambos elementos viven en la misma línea vertical maximal de R . De donde tenemos necesariamente que $f^{n_0}(x)$ y $f^{n_0}(y')$ están en diferentes elementos de $\{H_0, H_1\}$, lo cual implica que

$$\xi_x(n_0 + 1) \neq \xi_{y'}(n_0 + 1) = \xi_y(n_0 + 1)$$

obteniendo la inyectividad de h_1 .

Tanto para la continuidad como para la sobreyectividad del mapa h_1 , debemos estudiar la construcción de puntos que recorran un itinerario dado. Para esto es útil la siguiente proposición, que permite la construcción análoga a la hehca para el doubling-map. Llamamos *rectángulo vertical maximal* a cualquier rectángulo formado por intervalos verticales y maximales dentro de V_0 y V_1 . A si mismo llamamos *rectángulo horizontal maximal* a cualquier rectángulo formado por intervalos horizontales y maximales dentro de V_0 y V_1 . Dado un homeomorfismo entre dos rectángulos $I \times J$ y $I' \times J'$ decimos que *preserva segmentos*

verticales si la imagen y preimagen de todo segmento vertical es un segmento vertical. La misma definición se considera para segmentos horizontales.

Proposición 2.3.1. *Sea $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, y para $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $R_k^+ = V_{\xi(0)} \cap f^{-1}(V_{\xi(1)}) \cap \dots \cap f^{-k}(V_{\xi(k)})$. Entonces se tiene:*

1. R_k^+ es un rectángulo horizontal maximal dentro de $V_{\xi(0)}$.
2. $R_{k+1}^+ \subset R_k^+$,
3. $f^k(R_k^+) = R'$ es un rectángulo vertical maximal de $V_0 \cup V_1$ tal que $f^k|_{R_k^+} : R_k^+ \rightarrow R'$ es un homeomorfismo que preserva segmentos verticales y horizontales.
4. el alto de R_k^+ es $\frac{1}{3^k}$.

El mismo enunciado vale para $R_k^- = V_{\xi(0)} \cap f(V_{\xi(1)}) \cap \dots \cap f^k(V_{\xi(k)})$ cambiando horizontal por vertical.

Demostración. Fijada $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, hacemos inducción en k . El caso base $k = 0$ es trivial. Supongamos que vale para k , queremos ver que vale para $k + 1$. La propiedad 2) es trivial. Podemos ver que

$$R_{k+1}^+ = f^{-k}(f^k(R_k^+) \cap f^k(f^{-(k+1)}(V_{\xi(k+1)}))) = f^{-k}(f^k(R_k^+) \cap H_{\xi(k+1)}).$$

Por 3) para k sabemos que $f^k(R_k^+)$ es un rectángulo vertical maximal R' de V_0 o V_1 . Luego $R' \cap H_{\xi(k+1)}$ es un rectángulo horizontal y maximal en R' , y utilizando que $f^k|_{R_k^+} : R_k^+ \rightarrow R'$ es un homeomorfismo que preserva segmentos verticales y horizontales tenemos que $f^{-k}(R' \cap H_{\xi(k+1)}) = R_{k+1}^+$ es un rectángulo horizontal y maximal de R_k^+ , y por lo tanto de $V_{\xi(0)}$. Además el alto de $f^{-k}(R' \cap H_{\xi(k+1)})$ es de $\frac{1}{3^{k+1}}$ por lo cual obtenemos también el punto 4).

De lo anterior tenemos que $f^{k+1}(R_{k+1}^+) = f(R' \cap H_{\xi(k+1)})$, donde R' es un rectángulo vertical maximal de $V_0 \cup V_1$, por lo que $f(R' \cap H_{\xi(k+1)})$ tiene esta misma propiedad. Más aún, siendo que $f^{k+1}|_{R_{k+1}^+} = f|_{H_{\xi(k+1)}} \circ f^k|_{R_{k+1}^+}$, tenemos que $f^{k+1}|_{R_{k+1}^+}$ es un homeomorfismo que preserva segmentos verticales y segmentos horizontales. □

Ahora, para ver que es continua: si fijamos cualquier punto $x \in \Lambda$ y un entorno cualquiera de U dado por las sucesiones que coinciden con $h_1(x)$ en los enteros $-k, \dots, k$, podemos considerar un entorno V de x en Λ dado por

$$V = f^k(V_{\xi_x(-k)}) \cap \dots \cap f(V_{\xi_x(-1)}) \cap V_{\xi_x(0)} \cap f^{-1}(V_{\xi_x(1)}) \cap \dots \cap f^{-k}(V_{\xi_x(k)}),$$

que claramente es un entorno de x en Λ , para el cual se tiene $h_1(V) \subset U$.

En este caso, a diferencia del doubling-map, tenemos sobreyectividad. Para ver esto, directamente construimos la inversa h de h_1 siguiendo la misma idea

que en la sección anterior, que como debe estar claro, busca construir puntos siguiendo el itinerario ξ . Fijada $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ definimos la secuencia de rectángulos topológicos $\mathcal{J}^+(\xi) = (R_k^+)$ indexada en $n \in \mathbb{N}$ dada por la proposición 2.3.1.

Esto nos define una sucesión encajada de rectángulos R , cuyo ancho coincide con el de $V_{\xi(0)}$, es decir $\frac{1}{3}$, y cuyo alto decrece a cero como $\frac{1}{3^k}$. Se tiene entonces el intervalo horizontal maximal en $V_{\xi(0)}$ dado por

$$H_{\xi} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k^+.$$

De la misma manera, podemos definir la sucesión $\mathcal{J}^-(\xi) = (R_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$ de donde resulta un intervalo vertical maximal en $V_{\xi(0)}$ dado por

$$V_{\xi} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n^-.$$

Finalmente podemos definir

$$h : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Lambda, \quad h(\xi) = x_{\xi} \text{ con } \{x_{\xi}\} = H_{\xi} \cap V_{\xi},$$

que simplemente por construcción será la inversa del mapa itinerario h_1 . El lector puede verificar fácilmente que h es continua y que se verifica la condición

$$h \circ \sigma = f|_{\Lambda} \circ h,$$

de donde obtenemos que h es una conjugación entre σ y $f|_{\Lambda}$.

Esto implica que la dinámica de f en Λ es la misma que la del full-shift de dos símbolos, por lo que tiene todas las propiedades estudiadas para el full-shift en el capítulo anterior: transitividad, mixing, expansividad, puntos periódicos densos con crecimiento exponencial $\ln(2)$ e intersecciones homoclínicas densas. En particular, como se anunció en el capítulo anterior, este es un ejemplo de un *homeomorfismo que no es tiempo uno de un flujo*, dada la proposición 1.2.4. Desafiamos al lector a buscar pruebas más directas de este hecho.

Nos interesa ahora entender en nuestro ejemplo del plano como aparecen las órbitas homoclínicas. Para esto, podemos observar que para una pequeña bola $B = B_{\varepsilon}(0, 0)$ se tiene que $W_{\varepsilon}^s((0, 0), f) = B \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ y $W_{\varepsilon}^u((0, 0), f) = B \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ y la dinámica en esta bola es la misma que para el mapa lineal L . A partir de esto uno puede definir lo que llamaremos *variedad estable de* $(0, 0)$ y *variedad inestable de* $(0, 0)$ como

- $\mathcal{S}((0, 0), f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_{\varepsilon}^s((0, 0), f))$ y
- $\mathcal{U}((0, 0), f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(W_{\varepsilon}^u((0, 0), f))$.

Estos conjuntos tienen las siguientes propiedades que el lector debe verificar, y que serán comentadas a posteriori.

1. Ambos conjuntos son un encaje \mathbb{R} en el plano, y son invariantes para futuro y para pasado.

2. $\mathcal{S}((0, 0), f) = W^s((0, 0), f)$ y $\mathcal{U}((0, 0), f) = W^u((0, 0), f)$.
3. $\mathcal{U}((0, 0), f)$ contiene una familia de segmentos verticales maximales en R que forman un conjunto denso en $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(R)$.
4. $\mathcal{S}((0, 0), f)$ contiene una familia de segmentos horizontales maximales en R que forman un conjunto denso en $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(R)$.
5. El conjunto de intersecciones homoclínicas para $(0, 0)$ que está en $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}$ es denso en Λ .

Los puntos 1 y 2 son generales, no dependen fuertemente del ejemplo, y la dificultad está en que al iterar las curvas como indica la definición no puedan haber auto intersecciones. Los puntos 3 y 4 surgen de observar que $\{0\} \times [0, 1] \subset W^u((0, 0), f)$ y que $[0, 1] \times \{0\} \subset W^s((0, 0), f)$, y luego iterando esto intervalos encontrar las familias de intervalos mencionadas. El último punto es consecuencia trivial del anterior.

Mas allá de estas observaciones relativamente sencillas, se puede optar por hacer un dibujo aproximado de ambas curvas \mathcal{S} y \mathcal{U} , y enseguida se reconocerá la complejidad de este dibujo. Esta complejidad ha sido una obsesión de los dinamistas de finales del siglo 19 y del siglo 20, empezando por Poincaré que se enfrentó a este problema al considerar ciertas perturbaciones en el problema de los tres cuerpos. En este ejemplo Smale encuentra el modelo mas sencillo (existen otros modelos donde aparecen las intersecciones homoclínicas pero no son tan simples) que induce estos dibujos que fueron por mucho tiempo presentaciones pictóricas oscuras para los dinamistas, y hoy en día son un paradigma de la teoría.

Vale mencionar aquí que existe una suerte de recíproco en dinámica diferenciable que dice que las intersecciones homoclínicas transversales asociadas a puntos silla tienen asociadas siempre para alguna potencia del mapa, una conjugación al full-shift de dos símbolos. Por lo tanto, los puntos homoclínicos implican caos! Además en superficies, para mapas $C^{1+\alpha}$, caos implica intersecciones homoclínicas, según un famoso resultado de Katok.

Hacemos un apunte más sobre el ejemplo. El contexto en el que Smale obtiene este ejemplo es el estudio de su propia conjetura que decía que genéricamente en la topología C^1 para difeomorfismos el conjunto no-errante se describe como una unión de finitas órbitas periódicas hiperbólicas, es decir sistemas Morse-Smale. Este ejemplo claramente no es Morse-Smale, ya que tiene infinitas órbitas periódicas, aunque si son todas hiperbólicas. Lo interesante aquí, es que tenemos nuevamente estabilidad como pasara con el doubling-map: existe un entorno C^1 de f tal que todo mapa presenta un conjunto invariante conjugado al full-shift donde toda órbita periódica es hiperbólica! Por lo tanto la conjetura de Smale no era cierta, ya que en este abierto **no** hay sistemas Morse-Smale.

Todos estos conceptos forman parte de la base las teorías de *dinámica hiperbólica* y *dinámica genérica*. Invitamos al estudiante entusiasmado a posteriormente tomar cursos en estas direcciones.

2.4. Anosov

Cerramos el capítulo con el estudio de otro sistema paradigmático que es el ejemplo más sencillo de lo que se conoce como sistema de Anosov. Lo interesante de este ejemplo caótico es que su definición está fuertemente relacionada a la topología del espacio de fase, esto es, \mathbb{T}^2 . De hecho en otras superficies es imposible definir un sistema con las mismas propiedades dinámicas, y en dimensiones mayores se conocen restricciones, aunque el problema general está abierto. El ejemplo específico que veremos se conoce como *Arnold's cat map*.

Comencemos con la matriz hiperbólica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiando valores propios y vectores propios obtenemos los valores

$$0 < \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

y los espacios

$$E^s = \left\langle \left(1, \frac{-(1 - \sqrt{5})}{2}\right) \right\rangle \text{ y } E^u = \left\langle \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \right\rangle$$

que como pueden verificar al lector son rectas de pendiente irracional por el origen, perpendiculares entre si (esto último está en acuerdo con el teorema espectral para matrices simétricas).

El sistema que nos va a interesar es la proyección al toro de A , esto es $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definido por $f_A([(x, y)]) = \pi(A(x, y))$, donde $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es el mapa cociente. Debe verificar el lector que este mapa está bien definido y que es invertible, con inversa dada por f_A^{-1} . Además, este mapa preserva el volumen inducido por el cociente en \mathbb{T}^2 .

Tenemos que $p = \pi(0, 0)$ es un punto fijo silla para f_A , ya que su dinámica en $B = B(p, \frac{1}{10})$ es conjugada a la del mapa lineal A . De hecho, se puede ver que

- $W_{\frac{1}{10}}^s(p, f_A) = \pi(E^s \cap B((0, 0), \frac{1}{10}))$ y
- $W_{\frac{1}{10}}^u(p, f_A) = \pi(E^u \cap B((0, 0), \frac{1}{10}))$,

y nuevamente como hicimos para la herradura de Smale, podemos ver que

- $W^s(p, f_A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_A^{-n}(W_{\frac{1}{10}}^s(p, f_A))$ y
- $W^u(p, f_A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_A^n(W_{\frac{1}{10}}^u(p, f_A))$,

pero dado que f_A es la proyección de A se concluye de lo anterior que

$$W^s(p, f_A) = \pi(E^s) \text{ y } W^u(p, f_A) = \pi(E^u),$$

es decir, son proyección de rectas irracionales por el origen. A partir de esto encontramos las siguientes propiedades, similares a lo obtenido para la herradura, cuyas pruebas quedan a cargo del lector.

1. $W^s(p, f_A)$ y $W^u(p, f_A)$ son densas en \mathbb{T}^2 ,
2. El conjunto de intersecciones homoclínicas transversales para p es denso en \mathbb{T}^2 .

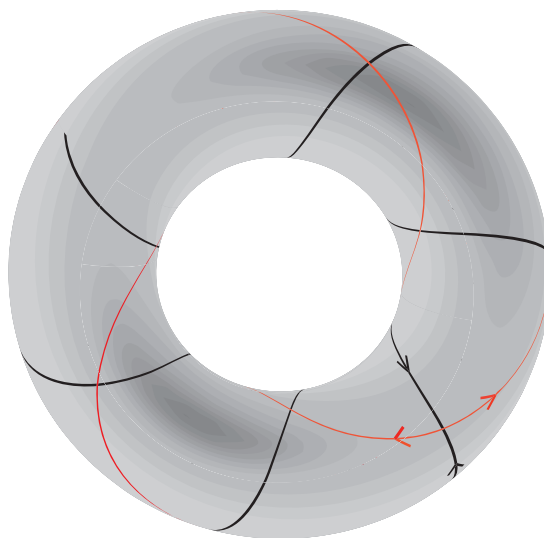


Figura 2.4: Ilustración de la distribución de las variedades estable e inestables asociadas a $\pi(0)$ y sus intersecciones homoclínicas para el Anosov lineal.

Esto permite rápidamente mostrar que f_A es topológicamente mixing, y por lo tanto transitivo.

Ejercicio 2.4.1. Mostrar las propiedades mencionadas para f_A .

Si consideramos la familia \mathcal{F}^u de rectas en \mathbb{R}^2 paralelas a E^u y \mathcal{F}^s el conjunto de rectas paralelas a E^s , tenemos que $A(r) \in \mathcal{F}^i$, para toda $r \in \mathcal{F}^i$, $i \in \{u, s\}$, o sea, las familias son preservadas por la matriz hiperbólica. Además para cualquier segmento $J \subset r \in \mathcal{F}^u$ se tiene

$$|A^n(J)| = \lambda_u^n |J| \rightarrow_n \infty,$$

y de la misma forma para cualquier segmento $I \subset r \in \mathcal{F}^s$ se tiene

$$|A^n(I)| = \lambda_s^n |I| \rightarrow_n 0$$

Por lo tanto si tomamos un rectángulo R cuyos lados son J_0, I_0, J_1, I_1 donde los J_i están contenidos en rectas de \mathcal{F}^u y I_i están contenidos en rectas de \mathcal{F}^s para $i = 0, 1$, tenemos que $(A^n(R))_{n \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de rectángulos con la misma propiedad, cuyo lado estable tiende a cero, cuyo lado inestable tiende a infinito y que se acercan uniformemente a la recta E^u .

Si ahora R es un rectángulo como antes, pero de diámetro menor que 1, entonces $\pi(R) = R_0$ es un rectángulo en \mathbb{T}^2 ya que $\pi|_R$ es un homeomorfismo. Más aún, dado que $\pi(E^u)$ es una recta densa en \mathbb{T}^2 y la propiedad anterior para la sucesión $(A^n(R))_{n \in \mathbb{N}}$, podemos encontrar un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_A^N(R) \cap R$ contiene (por lo menos) dos rectángulos maximales V_0 y V_1 en la altura inestable, de forma que el mapa f_A^N expande uniformemente en la dirección inestable, contrae uniformemente en la dirección estable, y mande segmentos verticales en segmentos verticales y segmentos horizontales en segmentos horizontales. Esto, como el atento lector debe encontrar, es la misma configuración que permitió construir para la herradura una conjugación con el full-shift! Encontramos así el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2. *Dado cualquier rectángulo en \mathbb{T}^2 con lados en $\pi(\mathcal{F}^u)$ y $\pi(\mathcal{F}^s)$ existe $N \in \mathbb{N}$ y $\Lambda \subset R$ tal que $f_A^N|_\Lambda$ es conjugado al full-shift. Como consecuencia tenemos que el conjunto $\text{Per}(f_A)$ es denso en \mathbb{T}^2 , y entropía topológica positiva para f_A .*

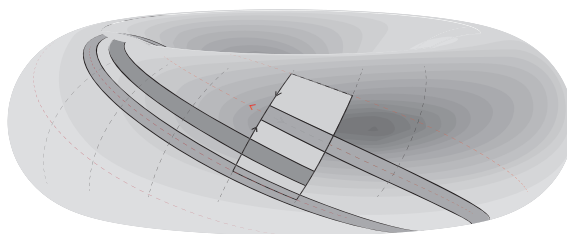


Figura 2.5: Ilustración la existencia de herraduras asociadas a intersecciones homoclínicas.

Las familias $\pi(\mathcal{F}^i)$, $i = u, s$ son simplemente el resultado de mandar los elementos de las familias correspondientes usando π . El resultado es en ambos casos lo que se conoce como foliación, donde cada hoja es una recta irracional, y por lo tanto densa. En el caso inestable, el mapa expande en las hojas, y en el caso estable contrae en las hojas. **Nuevamente, como pasara con la herradura, el juego entre contracción y expansión invariante para el mapa es la causa de la riqueza dinámica. Esto es propio en dinámica diferenciable a lo que se conoce como difeomorfismos hiperbólicos.**

Queremos por último mostrar que f_A es además expansivo. Antes de hacerlo queremos que el lector reflexione lo siguiente: mientras desde el aspecto diferenciable el *caos* parece estar asociado a la hiperbolicidad y la existencia de

intersecciones homoclínicas, se puede decir que la noción general (o topológica) de caos, está dada, al menos en nuestros ejemplos, por la expansividad.

Veamos al expansividad de f_A . Tomamos $\alpha = \frac{1}{4}$ y un par x, y con $d(x, y) < \alpha$. Consideramos dos levantados $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$ de x, y tales que $d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \alpha$, que asumimos no están en el mismo elemento de \mathcal{F}^s . Para el caso complementario se trabaja igual, pero con el pasado de f_A . Como para la herradura, la expansividad precisa del futuro y del pasado!

Sea N el primer natural tal que $d_{\mathbb{R}^2}(A^N(\tilde{x}), A^N(\tilde{y})) > \alpha$. Se tiene necesariamente que $\alpha < d_{\mathbb{R}^2}(A^N(\tilde{x}), A^N(\tilde{y})) < \frac{3}{4}$, y por lo tanto se puede concluir que en el cociente

$$d(f_A^N(x), f_A^N(y)) > \alpha,$$

lo cual implica la expansividad con constante α .

Vale mencionar en este momento de las notas, un trabajo impresionante dentro de los sistemas dinámicos debido al matemático uruguayo Jorge Lewowicz, [8], donde se clasifica los sistemas dinámicos que son expansivos en superficies:

- en la esfera no pueden haber,
- en el toro deben ser conjugados a algún sistema Anosov lineal: f_A , $A \in \text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ hiperbólica,
- en género mayor debe ser conjugado a los modelos que se conocen como pseudo-Anosov,

lo cual muestra la riqueza de la propiedad de expansividad, que aparece como algo conceptualmente general y deriva en modelos rígidos.

Por último queremos mencionar que la construcción de difeomorfismos de Anosov lineales se puede hacer en el toro de cualquier dimensión \mathbb{T}^n partiendo de una matriz hiperbólica de $\text{Sl}(n, \mathbb{Z})$, y que todos estos ejemplos resultan ser, como en los casos anteriores, estables en la topología C^1 .

Capítulo 3

Teorema de Poincaré-Bendixon

Como se mencionara en las consideraciones al principio de las notas, en la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos el espacio de fase, y en particular su dimensión tienen especial relevancia. Por ejemplo, una órbita periódica para un flujo en el plano o la esfera de dimensión dos, tiene propiedades de desconexión que en dimensiones mayores no se tienen. Es por este tipo de fuerte relacionamiento dinámica-espacio que el desarrollo de la dinámica en superficies forma una teoría aparte dentro de los sistemas dinámicos.

Uno de los resultados clásicos en este dominio, es el de Poincaré-Bendixon, que surge de la búsqueda de órbitas periódicas para cierto tipo de sistemas particulares en dimensión dos ([2]). La versión que hoy se tiene es producto de un desarrollo a lo largo de más de un siglo, y se encuentran además en este tiempo fuertes aplicaciones del teorema, en distintas ramas de la ciencia.

El resultado establece en particular que para una órbita acotada de un flujo del plano o bien su omega límite contiene singularidades, o coincide con una órbita periódica. Esto se transforma en una herramienta fundamental para probar la existencia de órbitas periódicas.

3.1. Demostración del teorema

En esta sección desarrollamos la prueba del teorema de Poincaré Bendixon. El enunciado del teorema que veremos, dado por el teorema 3.1.1, no es la versión más general, aunque contiene las ideas más importantes. Tomamos esta opción en pos de la claridad en la exposición. Al final del capítulo se introduce un ejercicio que completa el resultado.

Teorema 3.1.1. *Sea $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el flujo asociado a un campo X de clase C^1 y un punto $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{O}(x, \phi)$ es acotada. Entonces se tiene una de las siguientes propiedades:*

1. $\omega(x) \cap \text{Sing}(\phi) \neq \emptyset$.
2. $\omega(x, \phi)$ es una órbita periódica no singular \mathcal{O} .

Además, en el último caso o bien $x \in \mathcal{O}$, o siendo U_0 la componente conexa de $M \setminus \mathcal{O}$ que contiene a x se tiene que \mathcal{O} es un atractor en $\text{cl}[U_0] = U_0 \cup \mathcal{O}$.

El mismo resultado vale para flujos de la esfera \mathbb{S}^2 .

El resultado vale para flujos sin la necesidad de pedir la regularidad del campo. Sin embargo la prueba para el caso C^0 es mucho más difícil, y fue lograda tiempo después de conocer el resultado para el caso diferenciable, como se puede ver en [2]. Para obtener el caso C^0 , hubo que responder a la pregunta de si siempre un flujo C^0 es conjugado a uno C^1 (esto es, asociado a un campo C^1) en un sentido geométrico: la conjugación es un mapa que manda órbitas en órbitas, pero no guarda relación entre los tiempos de los respectivos flujos. Este problema fue resuelto en 1986 por C. Gutierrez en superficies. Ver [2].

Para probar el caso diferenciable se acude a una herramienta fundamental: *caja de flujos para puntos regulares*. Dado un punto regular $z \in M$ para un flujo ϕ actuando en una variedad M de dimensión n , una caja de flujo es un entorno V de z tal que existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ tal que fijados x_1, \dots, x_{n-1} se verifica:

$$h(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \subset \mathcal{O}(x_0, \phi) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y algún } x_0 \in M.$$

Dicho de otra forma, cada curva $h(\cdot, x_1, \dots, x_{n-1})$ es un segmento de órbita para el flujo. Bien puede suceder que distintos segmentos como el mencionado estén contenidos en la misma órbita $\mathcal{O}(x_0, \phi)$.

Ejercicio 3.1.2. Construir un ejemplo donde la última afirmación se sostiene.

La construcción en general de este tipo de entornos para puntos regulares se reduce a la existencia de secciones transversales al campo por p , que luego se empujan por el flujo para crear una caja de flujo. En el caso diferenciable, la construcción de la sección transversal y luego de la caja de flujos es relativamente sencilla. Veamos esto.

Definimos *sección transversal* por el punto regular z como cualquier función $s : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M$ con $s(0) = z$ que sea un difeomorfismo sobre su imagen, y tal que

$$\text{Im}(d_p s) \oplus X(s(p)) = T_p M \text{ para todo } p \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

En palabras, la sub-variedad $s(\mathbb{R}^{n-1})$ debe ser transversal a toda solución del campo en los puntos de intersección. Se suele abusar notación llamando sección transversal no al mapa s sino a su imagen $S = \text{Im}(s)$, y nosotros así lo haremos.

Veamos que la existencia de sección transversal, implica la existencia de caja de flujo.

Proposición 3.1.3. Sea $s : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M$ una sección transversal para un punto regular $z \in M$ del flujo $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Entonces existe una caja de flujo V para z .

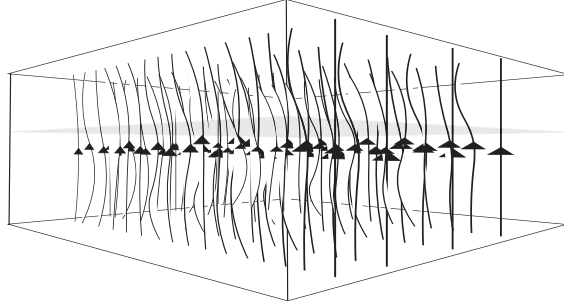


Figura 3.1: Ilustración de una caja de flujo, y de la imagen de una sección transversal.

Demostración. Queremos encontrar el difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ que nos defina la caja de flujo $h(V)$. Para esto tomamos

$$h^*(t, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\phi_t(s(x_1, \dots, x_{n-1})), s(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

En otras palabras las coordenadas x_1, \dots, x_{n-1} definen el punto a considerar en la sección transversal, y con la coordenada t lo hacemos fluir según el flujo. El diferencial en 0 para el mapa h queda dado por

$$d_0 h^*(v_1, \dots, v_n) = (X(0), d_0 s(v_1, \dots, v_{n-1})),$$

lo cual implica que es un isomorfismo. Entonces, el teorema de la función inversa para mapas diferenciables nos dice que h^* es un difeomorfismo local, es decir $h^*|_B : B \rightarrow h^*(B)$ con $B = I^n$ para un intervalo abierto $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ suficientemente chico, es un difeomorfismo. Considerando ahora $q : \mathbb{R}^n \rightarrow B$ dado por $q(x_1, \dots, x_n) = \frac{2\varepsilon}{\pi}(\arctan(x_1), \dots, \arctan(x_n))$ obtenemos que

$$h = h^* \circ q$$

define la caja de flujo $V = h(B)$. □

La caja de flujo es utilizada en el estudio de flujos en diferentes contextos. En particular, su aplicación más fuerte en dimensión dos lleva como veremos al teorema de Poincaré-Bendixon, y en dimensiones más altas también existen importantes aplicaciones. Continuamos ahora con la prueba del teorema.

Para un punto regular $z \in M$ de un flujo ϕ asociado a un campo C^1 siempre podemos construir una sección regular, y por lo tanto una caja de flujo, según la última proposición. Este es el paso que guarda la dificultad si perdemos la diferenciabilidad. Veamos esto en el caso diferenciable.

Considerando el subespacio vectorial $E = X(z)^\perp$, y cualquier sub-variedad S de clase C^1 en M por z con $T_z S = E$, tenemos dada la regularidad del campo

que en un entorno U de z para todo punto $y \in S$ se tiene $T_y S \oplus X(y) = T_y M$, concluyendo que S es una sección transversal.

En dimensión dos tenemos que la sección transversal es un arco, como se ilustra en la figura 3.2.

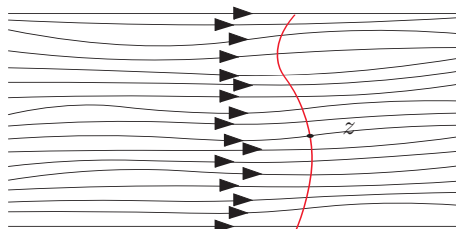


Figura 3.2: Ilustración de una caja de flujo en dimensión dos, con una sección transversal dada por el arco rojo.

El arco S lo orientamos en general de forma que con la dirección del campo formen una base positiva del plano (en el dibujo hacia arriba), y en general solo consideramos parametrizaciones $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S$ que preservan orientación, y tales que $\alpha(0) = z$. Decimos que la sección transversal S está adaptada a la caja de flujo V si $V \setminus S$ es exactamente dos componentes conexas. Como consecuencia de lo hecho anteriormente, en el caso diferenciable siempre se puede considerar cajas de flujos con secciones transversales adaptadas para cualquier punto regular z .

Para una sección transversal S y un punto $x \in M$ con $\mathcal{O}_+(x, \phi) \cap S \neq \emptyset$ definimos los tiempos de retorno como la sucesión de reales t_i definida en \mathbb{N} o un subconjunto finito de la forma $\{0, 1, \dots, n\}$ dada por las condiciones:

1. $\phi_{t_i}(x) \in S$,
2. si $i < j$ entonces $t_i < t_j$.
3. $\phi_t(x) \in S^c$ para todo $t \in \text{Im}(t_n)^c$.

Para la sucesión de tiempos de retorno $(t_i)_{i \in D}$, se define la *sucesión de retornos* por $p_i = \phi_{t_i}(x)$ para todo $i \in D$. El lector debe verificar que esto siempre se puede definir.

Introducimos notación para el siguiente lema. Dada una sección transversal S adaptada a una caja de flujo según una parametrización α , podemos definir los intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos entre puntos s, s' de S , con $s < s'$ según α , de forma natural, y los notamos por (s, s') , $[s, s']$, $[s, s')$, $(s, s']$. De la misma forma la identificación α permite definir las semirrectas de S . Dado $I \subset S$ un intervalo (de cualquier tipo), todo S o una semirrecta de S , y una constante $\varepsilon > 0$ definimos los conjuntos

$$V_\varepsilon(I) = \bigcup_{x \in I, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \phi_t(x) \quad , \quad V_\varepsilon^+(I) = \bigcup_{x \in I, t \in (0, \varepsilon)} \phi_t(x) \text{ y}$$

$$V_\varepsilon^-(I) = \bigcup_{x \in I, t \in (-\varepsilon, 0)} \phi_t(x).$$

El lector debe verificar cada uno de estos conjuntos es homeomorfo al espacio $I \times \mathbb{R}$, y que siempre que partamos de un intervalo abierto cada conjunto es un abierto del plano. Veamos el siguiente lema.

Lema 3.1.4. *Sean M el plano o la esfera, z un punto regular de un flujo ϕ , V una caja de flujo para z y S una sección transversal adaptada a V según la parametrización $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S$. Entonces si $(t_n)_{n \in \mathbb{D}}$ es la sucesión de tiempos de retorno para un punto x , se tiene que la sucesión $p_i = \phi_{t_i}(x)$ es monótona (creciente o decreciente) según la parametrización α .*

Demostración. Si la sucesión es constante no hay nada que verificar. Si no lo es, tenemos al menos $t_0 < t_1$ y asumimos $p_0 < p_1$ (el caso complementario se resuelve igual). Si la sucesión está definida solo para 0 y 1 tampoco hay nada que verificar. Supongamos que está definida también para 2, generando el elemento t_2 . Afirmamos que $p_1 < p_2$, y para demostrarlo suponemos por absurdo que no fuera el caso.

Observe el lector que p_2 no puede coincidir con p_1 ya que de lo contrario entre el tiempo t_1 y t_2 la órbita debe pasar por p_0 , definiendo un nuevo retorno en un tiempo del intervalo (t_1, t_2) .

Definimos la curva simple y cerrada Γ dada por la concatenación de $(\phi_t(x))_{t \in [t_0, t_1]}$ y el segmento $[p_0, p_1]$ en S , orientada según el flujo. Podemos ver que esta es efectivamente una curva simple y cerrada, y por lo tanto según el teorema de Jordan separa al espacio M en exactamente dos componentes U_0 y U_1 identificadas a partir de la orientación de Γ . Note el lector que Γ solo intersecta a la caja de flujos en dos segmentos de órbitas: uno que empiezan en p_0 y otro que termina en p_1 (según la orientación de la curva).

Podemos entonces considerar $\varepsilon > 0$ tal que los conjuntos $V_\varepsilon^+((p_0, p_1))$ y $V_\varepsilon^-((p_0, p_1))$ estén en distintas componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, digamos $V_\varepsilon^+((p_0, p_1)) \subset U_1$.

Siendo S' la componente conexa de $S \setminus \{p_0\}$ que contiene a p_1 (y por lo tanto a (p_0, p_1)) tenemos que $V_\varepsilon^+(S') \subset U_1$, ya que dicho conjunto es un abierto conexo que no intersecta a Γ y que contiene a $V_\varepsilon^+((p_0, p_1))$, lo cual implica que $[p_1, +\infty)$ está contenido en U_1 . En particular tenemos que $\bigcup_{t \in (0, \varepsilon)} \phi_t(p_1) \subset U_1$. Siendo S'' la restante componente conexa de $S \setminus \{p_0\}$ se puede observar por el mismo argumento usando esta vez $V_\varepsilon^-(S'' \cup [p_0, p_1])$ que S'' está contenida en U_0 .

Dado nuestro supuesto, se tiene $p_2 \in S'' \cup [p_0, p_1]$, y por lo tanto debe existir $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 < t^* \leq t_2$ y que la curva $(\phi_s(x))_{s \in (t_1, t^*)} \subset U_1$ mientras que $\phi_{t^*}(x) \in \Gamma$. Veamos que es imposible.

- En caso de que $p^* := \phi_{t^*}(x) \in \Gamma \setminus [p_0, p_1]$ tenemos necesariamente para $s \in [t^*, t_2]$ que $\phi_s(x) = p_1$, lo cual implica $p_1 = p_2$, siendo imposible como mencionamos al principio de la prueba.

- En caso de que $p^* \in [p_0, p_1)$, se tiene que $\phi_{t^*-\delta}(x) = z \in U_1$ para algún número positivo $\delta < \varepsilon$, mientras que por otro lado tenemos $z' \in V_\varepsilon^-([p_0, p_1)) \subset U_0$ tal que $\phi_\delta(z') = p^*$, negando la inyectividad de ϕ_δ .

Para los siguientes tiempos de retorno, se puede mostrar la monotonía por una inducción basada en el mismo argumento que ya hicimos. □

Un segundo lema queda dado como sigue.

Lema 3.1.5. *Sea z punto regular según un flujo ϕ asociado a un campo C^1 en el plano o la esfera, que además es recurrente. Entonces z es periódico, sucesión de tiempos de retorno a cualquier sección transversal S por z adaptada a una caja de flujos V es periódica y la sucesión de retornos es constante.*

Demostración. Fijemos una caja de flujo V para z con una sección transversal S . Por ser z recurrente su sucesión de tiempos de retorno a S debe estar definida para todos los naturales, obteniendo $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Esto dado que su órbita futura va a ingresar infinitas veces a la caja de flujo. Si mostramos que la sucesión $p_i = \phi_{t_i}(z)$ es constante se tiene el resultado completo.

Supongamos que tenemos un primer tiempo t_0 y un segundo tiempo $t_1 > t_0$ tal que $p_1 \neq p_0$. Para la caja de flujo V tomamos los segmentos de órbita I_0 e I_1 por p_0 y p_1 maximales de forma que cada uno de ellos separan V en dos componentes conexas. Sea U la clausura (en V) de la componente conexa de $V \setminus I_1$ que no contiene a p_0 . El lema anterior implica que para todo $i > 1$ se tiene p_i en U , y por lo tanto dada la geometría del flujo en V se tiene

$$\left[\bigcup_{t \geq t_1} \phi_t(z) \right] \cap V \subset U.$$

Esto implica que $\phi_{t_0}(z)$ no es un punto recurrente, llegando a un absurdo. □

Lema 3.1.6. *Sea $z \in M$ un punto periódico no singular para un flujo ϕ de la esfera o el plano, con $z \in \omega(x, \phi)$, $x \in \mathcal{O}(z, \phi)^c$ y U_0 la componente conexa de $M \setminus \mathcal{O}(z, \phi)$ que contiene a x . Entonces $\mathcal{O}(z, \phi)$ es un atractor en $cl[U_0] = U_0 \cup \mathcal{O}(z, \phi)$. En particular $\omega(x, \phi) = \mathcal{O}(z, \phi)$.*

Demostración. Sea V' una caja de flujos por z que no contiene a x , con S una sección transversal adaptada parametrizada por α , de modo que por el último lema $S \cap \mathcal{O}(z, \phi) = z$. Tenemos que que $S^+ = (0, +\infty) \subset S$ está contenido en U_0 y $S^- = (-\infty, 0) \subset S$ en U_1 , donde U_0 y U_1 son las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}(\phi, z)$, o la situación complementaria. Asumimos lo escrito, para el otro caso se trabaja igual. Dada la continuidad del flujo, podemos elegir una caja de flujo $V \subset V'$ por z tal que para todo $y \in V'$ se tenga que $\phi_T(y) \in V$, y por lo tanto, todo $y \in V \cap U_0$ tiene al menos un retorno en tiempo positivo a S^+ . Más aún, si $p \in S^+$ es un punto periódico su órbita es una curva simple

cerrada \mathcal{O} que intersecta S^+ en un solo punto lo cual implica que una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ contiene a S^- y por lo tanto contiene a $\text{cl}[U_1]$. A partir de esto podemos suponer, eligiendo V lo suficientemente chica, que si p es periódico en $S^+ \cap V$ entonces su órbita \mathcal{O} separa a x de $\mathcal{O}(z, \phi)$.

Siendo $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ los retornos a S de x , tenemos que $p_i \in S^+$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y más aún, por el lemma 3.1.4 la sucesión debe ser monótona decreciente. Podemos ver que $\inf_{i \in \mathbb{N}} \{p_i\} = z$ ya que esta sucesión está forzada a acumular en z dadas las hipótesis. Si p^* el primer elemento la sucesión $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $S^+ \cap V = I$ (dado por un intervalo que orientamos como S^+), podemos ver que para todo $y \in [0, p^*]$ se tiene que el primer retorno $p_1(y)$ de y está en $(0, y)$: de lo contrario podemos considerar en I el conjunto A de los que vuelven abajo de sí mismo, y el conjunto B de los que vuelven arriba de sí mismo. Estos son abiertos en I por continuidad del flujo, y A es no vacío por contener elementos de la sucesión $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Por su parte $A \cup B = I$ ya que un punto que vuelve sobre sí mismo debe generar una órbita periódica que separa x de z , lo cual no puede pasar en nuestras hipótesis. Luego $B = \emptyset$. Más aún, se tiene que la sucesión de retornos $p_i(y)$ para $y \in I$ es decreciente, y tiene por ínfimo a z , ya que de lo contrario siendo $p_\infty = \inf_{i \in \mathbb{N}} \{p_i(y)\}$, tal punto debe volver sobre sí mismo siendo que si vuelve abajo no puede ser tal ínfimo y su vuelta arriba viola la monotonía de la sucesión, generando nuevamente una órbita que separa x de z .

Ahora bien, por las consideraciones hechas, el conjunto

$$U = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t([0, p^*])$$

es un entorno de $\mathcal{O}(z, \phi)$ en $\text{cl}[U_0]$, tal que $\phi_s(U) \subset U$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Más aún como cualquier punto en U está en la órbita futura de algún punto de $[0, p^*]$, se tiene que

$$\bigcap_{t > 0} \phi_t(U) = \mathcal{O}(z, \phi),$$

o sea, $\mathcal{O}(z, \phi)$ es un atractor en $\text{cl}[U_0]$. \square

Estamos listos ahora para probar el teorema.

Prueba del teorema 3.1.1. Supongamos que $\omega(x, \phi)$ no tiene singularidades. Como $\mathcal{O}(x, \phi)$ es acotada, se tiene que $\omega(x, \phi)$ es compacto y por lo tanto contiene puntos recurrentes (ver ejercicio 1.2.1). Siendo $z \in \omega(x, \phi)$ punto recurrente, tenemos por 3.1.5 que $\mathcal{O} := \mathcal{O}(z, \phi)$ es una órbita periódica sin singularidades. Ahora bien: si $x \in \mathcal{O}$ se concluye el resultado. Si $x \in \mathcal{O}^c$ entonces el lema anterior 3.1.6, nos dice en particular que $\omega(x, \phi) \subset \mathcal{O}$ lo cual, complementado con el resto del lema, concluye el resultado. \square

Veamos importantes corolarios que haremos con generalidad C^0 , aunque la prueba que obtuvimos del teorema de Poincaré-Bendixon es para campos C^1 .

Corolario 3.1.7. *Supongamos que ϕ es un flujo en un disco cerrado D^1 . Entonces, ϕ tiene al menos una singularidad.*

Demostración. Supongamos para una contradicción que no es así. Lo primero a observar es que el borde de D debe ser una órbita periódica, ya que es invariante y no contiene singularidades. Si x es un punto del interior de D entonces o bien $\omega(x) \cap \partial D = \emptyset$, o $\alpha(x) \cap \partial D = \emptyset$ dado el lema 3.1.6 adaptado a esta situación. Esto implica por Poincaré-Bendixon que encontramos al menos otra órbita periódica \mathcal{O}_1 en el disco abierto maximal que contiene D . Esto mismo se puede argumentar con cualquier otro disco invariante dentro de D .

Tomamos ahora la familia \mathcal{F} de discos cerrados invariantes dentro de D y los ordenamos de forma que $D < D'$ sii $D' \subset D$. Dada cualquier cadena $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$ consideramos el conjunto

$$L_\infty = \bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha.$$

Este conjunto va a ser un cerrado invariante dentro de D . Tomando $z \in L_\infty$ tenemos que necesariamente $\omega(z) \subset L_\infty$ es una órbita cerrada \mathcal{O} , ya que no hay singularidades. Pero entonces existe un disco cerrado con borde \mathcal{O} dentro de L_∞ que será cota superior de la cadena. Por lo tanto el Lema de Zorn nos garantiza la existencia de un elemento maximal en \mathcal{F} que llamamos D_∞ . Ahora bien, el primer razonamiento de la prueba se aplica para D_∞ , encontrando un disco cerrado invariante propiamente contenido, cuya existencia da un absurdo. \square

Corolario 3.1.8. *Sea ϕ un flujo del plano, con al menos una órbita acotada. Entonces ϕ tiene al menos una singularidad.*

Demostración. La prueba es análoga a la del corolario anterior. \square

Corolario 3.1.9 (Poincaré-Hopf). *Sea ϕ un flujo en la esfera \mathbb{S}^2 , entonces tiene al menos una singularidad.*

Demostración. Asumamos para una contradicción que no hay singularidades para ϕ . El lema 3.1.5 nos dice que cualquier punto recurrente debe ser periódico, por lo tanto tenemos al menos un punto periódico z . Su órbita es un loop cerrado, y por lo tanto el teorema de Jordan nos dice que separa a \mathbb{S}^2 en dos componentes U_0 y U_1 cuyas clausuras D_0 y D_1 son discos cerrados invariantes. Aplicando el corolario anterior en estos discos llegamos a la necesidad de tener una singularidad, lo cual es absurdo. \square

Este resultado es un caso particular del fundamental teorema que se conoce como Poincaré-Hopf. Estos teoremas tienden a vincular las singularidades de un flujo con la topología del espacio de fase, a través de la característica de Euler de los mismos. Como corolario de este importante resultado, se puede deducir

¹Esto es, homeomorfo a \mathbb{D} .

el fundamental teorema de punto fijo de Brouwer en dimensión dos como sigue. Notamos por \mathbb{D} el disco unidad del plano \mathbb{R}^2 . Los detalles quedan a cargo del lector.

Corolario 3.1.10 (Brouwer en el disco). *Sea un mapa continuo $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Entonces el mapa contiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Dado que los mapas C^1 son densos en el espacio de mapas continuos del disco respecto a la topología uniforme, basta probar el resultado para el caso C^1 . Supongamos por una contradicción que existe un mapa $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de clase C^1 sin puntos fijos, esto es $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{D}$.

Podemos definir a partir de este mapa, el campo $Y : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de clase C^1 dado por $Y(x) = x - f(x)$ que no contendrá singularidades ya que f no tiene puntos fijos. Más aún si tomamos $x \in \partial\mathbb{D}$ tenemos que $Y(x)$ apunta hacia afuera del disco, es decir, su componente en la normal $n(x)$ saliente al disco en el punto x es positiva. Esta situación permite modificar el campo Y en un entorno del borde $\partial\mathbb{D}$ de forma que ahora obtenemos un nuevo campo X que no tiene singularidades, y tal que $X(x) = n(x)$ para todo $x \in \partial\mathbb{D}$.

Utilizando la proyección estereográfica desde el $(0, 0, 1)$ de la esfera \mathbb{S}^2 al plano, podemos proyectar el campo X al hemisferio sur E_S (esto es, $\mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z)\}_{z \leq 0}$). Este campo \mathcal{X}_S es de clase C^1 y no tiene singularidades. Además en el ecuador, $\mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z)\}_{z=0}$ el campo es constante, y de la forma $(0, 0, a)$ con $a > 0$. Ahora bien, utilizando la proyección estereográfica desde el $(0, 0, -1)$ del campo $-X$ podemos obtener ahora un campo \mathcal{X}_N en el hemisferio norte, $\text{cl}[\mathbb{S}^2 \setminus E_S]$, con exactamente las mismas propiedades que \mathcal{X}_S .

Esto nos define un campo de clase C^1 en \mathbb{S}^2 que no tiene singularidades, lo cual contradice el resultado de Poincaré-Hopf. \square

Cerramos la sección con dos ejercicios importantes. El primero mejora el enunciado aquí presentado del teorema de Poincaré-Bendixon como se advirtió en la introducción, mientras que el segundo ahonda en los resultados del tipo de Poincaré-Hopf.

Ejercicio 3.1.11. *

Sea $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo en el plano o la esfera, con un conjunto discreto de singularidades. Sea $x \in M$ cuya órbita es acotada y tal que $\omega(x, \phi) \cap \text{Sing}(\phi) \neq \emptyset$. Mostrar que se tiene la siguiente estructura para $\omega(x, \phi)$.

1. Para todo $z \in \omega(x, \phi)$ que es recurrente, se tiene que $z \in \text{Sing}(\phi)$.
2. Para todo $z \in \omega(x, \phi) \cap \text{Sing}(\phi)^c$ se tiene que $\omega(z, \phi)$ es un único punto en $\omega(x, \phi)$ y lo mismo vale para $\alpha(x, \phi)$.
3. Mostrar que si $\omega(x, \phi)$ contiene más de un punto, toda singularidad $z_0 \in \omega(x, \phi)$ es el omega límite de algún punto $z_1 \in \omega(x, \phi)$ y el alfa límite de algún punto $z_2 \in \omega(x, \phi)$ a la vez.

Ejercicio* 3.1.12. *

1. Mostrar que un flujo del plano que tiene un punto no errante, tiene una singularidad. Este resultado es cierto en general para homeomorfismos del plano (cambiando singularidad por punto fijo), como se desprende de la teoría de Brouwer en el plano.
2. Construir en \mathbb{S}^2 un flujo con una única singularidad.
3. Mostrar que el último corolario no es cierto para la esfera \mathbb{S}^3 , es decir, construir en esta esfera un flujo sin singularidades.

3.2. La ecuación de Van der Pol

Veamos una aplicación del teorema de Poincaré-Bendixon a través de la ecuación diferencial de Van der Pol. Esta es una variante del oscilador amortiguado, dada por

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$$

donde μ es un parámetro positivo. La misma fue descubierta por Van der Pol trabajando en problemas de ingeniería y tiene importantes aplicaciones ([6, 10]).

Integrando la ecuación respecto del tiempo, surge el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $F(x) = \mu(x - \frac{x^3}{3})$ es primitiva de $\mu(1 - x^2)$. Para $\mu = 0$ esta es la ecuación de un péndulo lineal, donde todas las órbitas son periódicas, y forman círculos centrados en el origen. Al variar el parámetro, Van der Pol observó experimentalmente que sobrevive una órbita periódica con características geométricas peculiares ([6]). La demostración de que efectivamente esta órbita existe es una aplicación no trivial de Poincaré-Bendixon que desarrollamos a continuación.

Si linealizamos en el origen obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$, $\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$. Aplicando el teorema de Hartman-Grobman encontramos que para $\mu > 0$ el origen es un repulsor para 3.1. Buscamos ahora un anillo topológico del plano menos el origen que sea positivamente invariante, esto es $A \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo a un anillo, tal que $\phi_t(A) \subset A$ para todo tiempo $t > 0$, donde ϕ es el flujo asociado a 3.1. Esto en particular nos dará la existencia de órbitas acotadas lejos del origen, y siendo que no hay otra singularidad para la ecuación que $(0, 0)$, el teorema de Poincaré-Bendixon nos da la existencia de una órbita periódica que deberá estar contenida en este anillo.

Para encontrar tal anillo basta encontrar dos curvas simples cerradas disjuntas Γ_1, Γ_2 tales que si notamos por D_i , $i = 1, 2$ la componente conexa acotada de Γ^c (dadas por el teorema de Jordan) se tiene

- i $(0, 0) \in D_1 \cap D_2$,
- ii $D_1 \subset D_2$
- iii $\phi_t(\Gamma_1) \subset D_1^c$ para todo $t > 0$,
- iv $\phi_t(\Gamma_2) \subset \text{cl}[D_2]$ para todo $t > 0$.

La existencia de Γ_1 surge del hecho de que $(0, 0)$ sea un repulsor, lo que implica que un círculo de radio r_1 suficientemente chico y centrado en 0 debe cumplir i,ii,iii para cualquier curva Γ_2 suficientemente alejada del origen, con $(0, 0) \in D_2$. Resta encontrar Γ_2 verificando iv, que es la parte difícil.

Estudiando este campo con detalle, se pueden encontrar las siguientes propiedades (recomendamos al lector generar figuras que clarifiquen las afirmaciones).

- a) Toda curva solución que arranca en un punto $(0, y_0)$, $y_0 > 0$ y *suficientemente grande* volverá a cortar el eje $\{0\} \times \mathbb{R}$ por primera vez en un punto $(0, y_1)$ con $y_1 < 0$.
- b) Además, el arco definido entre los puntos $(0, y_0)$ y $(0, y_1)$ estará contenido salvo por sus extremos en el semiplano $\{(x, y) : x > 0\}$, y formará junto al segmento $\{0\} \times [y_1, y_0]$ el borde de un conjunto convexo.
- d) Dada la simetría impar del campo, que si $(x(t), y(t))$ es una curva solución, entonces $(-x(t), -y(t))$ también lo es.

La clave para entender estas observaciones, es estudiar la pendiente del campo, y comprobar que comenzando de un punto $(0, y_0)$ de mucha altura, la trayectoria tendrá un único punto con tangente vertical hacia abajo en $(x_1, -F(x_1))$ (elemento del gráfico de $-F$), donde a su vez x_1 se puede considerar tan grande como se quiera, conforme se tome y_0 grande. Dada esta situación, para y_0 suficientemente grande se puede ver que la trayectoria descenderá desde $(x_1, -F(x_1))$ hasta un punto $(x_2, 0)$ que se puede nuevamente considerar con x_2 arbitrariamente grande. Razonando ahora desde este punto $(x_2, 0)$, la trayectoria para x_2 suficientemente grande debe llegar a un punto de la forma $(0, y_1)$. Analizando en detalle lo anterior, se puede mostrar además que para y_0 suficientemente grande, la trayectoria describirá un convexo como se afirma.

Dadas estas observaciones, si probamos que para algún $y_0 > 0$ suficientemente grande la correspondiente ordenada de retorno $y_1 < 0$ cumple que $|y_1| < y_0$, obtenemos la curva simple y cerrada

$$\Gamma_2 = \gamma \cdot v_1 \cdot \beta \cdot v_2, \text{ donde}$$

- γ es el arco solución de la ecuación desde $(0, y_0)$ a $(0, y_1)$,

- v_1 es un arco simple contenido en $\{0\} \times \mathbb{R}$ desde $(0, y_1)$ hasta $(0, -y_0)$,
- β es el arco solución desde $(0, -y_0)$ hasta $(0, -y_1)$ (simétrico respecto al origen de γ),
- v_2 es un arco simple contenido en $\{0\} \times \mathbb{R}$ desde $(0, -y_1)$ hasta $(0, y_0)$.

Este arco Γ_2 claramente verifica el punto iv, es decir $\phi_t(\Gamma_2) \subset \text{cl}[D_2]$ para todo $t > 0$. Además, conforme el punto inicial $(0, y_0)$ se toma lejos del origen, la curva Γ_2 tendrá su imagen cada vez más distante del origen. Por lo tanto, para obtener la aplicación del teorema de Poincaré-Bendixon resta probar que si partimos de y_0 suficientemente grande obtendremos $-y_1 < y_0$.

Para $y_0 > 0$ consideramos el arco de solución $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(0) = (0, y_0)$ y $\gamma(t_1) = (0, y_1)$. Si consideramos la función norma $R(x, y) = x^2 + y^2$, tenemos que

$$|y_1| - y_0 = R(\gamma(t_1)) - R(\gamma(0)) = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} R \circ \gamma(t) dt,$$

de donde operando y utilizando el campo de 3.1 obtenemos

$$|y_1| - y_0 = \int_0^{t_1} 2\gamma_1(t)F(\gamma_1(t)) dt.$$

El término $\gamma_1(t)$ será siempre positivo para $t \in (0, t_1)$ dado el punto b) de las observaciones. En cambio $F(\gamma_1(t))$ será negativo siempre que $\gamma_1(t) > \sqrt{3}$ y será positivo siempre que $\gamma_1(t) \in (0, \sqrt{3})$. Dada la observación c) tenemos que existen dos tiempos a, b con $0 < a < b < t_1$ tales que $\gamma_1(t) \in (0, \sqrt{3})$ sii $t \in (0, a) \cup (b, t_1)$. Ahora bien, estudiando nuevamente el campo podemos ver que cuando $y_0 \rightarrow +\infty$:

- $a \rightarrow 0, b \rightarrow 1$ y por lo tanto $\int_{(0,a) \cup (b,t_1)} \gamma_1(t)F(\gamma_1(t)) dt \rightarrow 0$.
- $\int_a^b \gamma_1(t)F(\gamma_1(t)) dt \rightarrow -\infty$.

Lo cual permite concluir que para y_0 suficientemente grande, tenemos

$$|y_1| - y_0 < 0,$$

obteniendo así la curva Γ_2 , el anillo deseado y finalmente la aplicación del teorema de Poincaré-Bendixon para la existencia de órbitas periódicas de 3.1.

Cabe mencionar que afinando los argumentos presentados se puede probar que debe existir una única órbita periódica para el sistema, problema que dejamos como interesante ejercicio para el lector.

Ejercicio 3.2.1. Probar que la órbita periódica para 3.1 es única.

Por último mencionamos que el análisis hecho se puede extender a la familia de ecuaciones diferenciales

$$\ddot{x} + x = f(x)\dot{x}$$

pidiendo condiciones para la primitiva F de f .

Capítulo 4

Teoría de Rotación en \mathbb{S}^1

Como se mencionara en las consideraciones iniciales de las notas, los sistemas hamiltonianos integrables suelen inducir, según la teoría, dinámicas en toros n -dimensionales dadas por traslaciones racionales o irracionales (ver por ejemplo el teorema de Arnold-Liuville en [5]). Dichos sistemas surgen de situaciones ideales, y uno está naturalmente interesado en saber que pasa al perturbar el Hamiltoniano que define el sistema, y en particular, que le sucede a estos toros invariantes y a sus dinámicas. En tal sentido existe una importante teoría llamada *teoría KAM*, por Kolmogorov-Arnold-Moser, que asegura la existencia de una continuación de algunos de estos toros invariantes y sus dinámicas para perturbaciones analíticas, chicas y conservativas.

Aunque esta teoría se desarrolló en el siglo XX, Poincaré ya intuía este tipo de resultados. Esto motivó que estudiara como pueden ser las posibles dinámicas que surgen de perturbar las traslaciones rígidas del toro, en particular del toro \mathbb{T}^2 .

Cuando uno considera este problema, encuentra fácilmente una reducción a estudiar la dinámica en el círculo \mathbb{S}^1 : para una traslación rígida dada podemos considerar un círculo transversal Σ que será una sección de Poincaré. Al considerar perturbaciones de la traslación rígida que sean suficientemente chicas, este círculo seguirá siendo una sección de Poincaré para la nueva dinámica. Por lo tanto la dinámica del flujo perturbado, queda determinada por la de un homeomorfismo del círculo. Además, dada la construcción del mismo, fijada una orientación en Σ , este homeomorfismo preservará dicha orientación.

Es así que Poincaré comenzó un estudio sistemático de la dinámica de homeomorfismos del círculo que preservan orientación, a través de un invariante topológico dado por un número conocido como el *número de rotación*. El mismo tiene que ver con la velocidad promedio con que se mueven los puntos, y a partir de él se puede lograr una fina descripción de la dinámica, como veremos en este capítulo.

4.1. Número de Rotación

Para introducir el número de rotación precisamos de algunos hechos topológicos previos. Nuestro modelo canónico para el círculo es el cociente $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Como bien sabemos, para inducir un mapa $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ basta definir una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que respete las clases de equivalencia, esto es

$$F(x) \sim F(x') \text{ siempre que } x \sim x', \quad (4.1)$$

y luego $f(x) := \pi(F(\tilde{x}))$ para cualquier \tilde{x} en la clase x .

Cabe entonces la interesante pregunta de si todo mapa $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ se obtiene de este modo. La respuesta es positiva y se puede obtener de resultados básicos de topología algebraica que son generales de la teoría de cubrimientos. Podemos de todos modos intentar aquí una prueba para homeomorfismos del círculo.

Teorema 4.1.1. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo. Entonces existe un homeomorfismo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que preserva las clases de equivalencia y $f(x) = \pi(F(\tilde{x}))$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$ y todo \tilde{x} representante de x . Más aún, o bien $F(x + m) = F(x) + m$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$ o $F(x + m) = F(x) - m$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Consideramos el intervalo $I = (0, 1)$ que se proyecta a $\mathbb{S}^1 \setminus \{0\}$ y otro intervalo J que se proyecta a $\mathbb{S}^1 \setminus \{f(0)\}$. La restricción del mapa cociente π a cada uno de estos intervalos es un homeomorfismo, y la de $f|_I : \pi(I) \rightarrow \pi(J)$ también lo es. Definimos $F : I \rightarrow J$ dada por

$$F(x) = \pi_J^{-1} \circ f \circ \pi(x),$$

donde π_J^{-1} es la inversa del homeomorfismo $\pi|_J$.

Dado que f es continua, necesariamente tenemos una extensión continua del mapa F a un mapa $F : [0, 1] \rightarrow \bar{J}$. Más aún, por el mismo argumento de continuidad se obtiene que $F(1) = F(0) + k_o$ con $k_o \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto k_o es 1 o -1, ya que J proyecta inyectivamente sobre \mathbb{S}^1 .

Extendemos ahora F a $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$F(x + j) = F(x) + jk_o, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ y } x \in [0, 1]$$

que define únicamente a la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua como debe verificar el lector (basicamente estamos copiando el gráfico de $F : I \rightarrow J$ sobre los intervalos enteros, de forma de obtener una función continua). Se tiene además por definición que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(x') + n$ con $x' \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x' \sim x$, y por lo tanto respeta las clases de equivalencia. A su vez por este mismo hecho se tiene que

$$\pi(F(x)) = \pi(F(x')) = f(\pi(x)),$$

donde la última igualdad está dada por construcción. □

Aunque la prueba que vimos la hicimos para homeomorfismos, que es lo que usaremos a continuación, se puede mejorar los argumentos para hacer una prueba general. A tal mapa F se le llama *levantado* de f . Recordamos que un homeomorfismo del círculo preserva orientación si dentro de cada intervalo del círculo preserva la orientación natural del mismo, y llamamos por $\text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ al espacio de estos homeomorfismos (con la distancia uniforme). Si tomamos F levantado de $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ tenemos $F(x+m) = F(x) + m$ para cualquier real x y cualquier entero m . Las siguientes propiedades no son difíciles de probar y quedan a cargo del lector.

Proposición 4.1.2. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continuo. Entonces*

1. *Dado un levantado F de f se tiene que $F + k$, $k \in \mathbb{Z}$ es también un levantado. Más aún el conjunto de mapas $\{F + k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ coincide con el conjunto de todos los levantados posibles.*
2. *Si $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ entonces cualquier levantado F es un homeomorfismo monótonamente creciente de \mathbb{R} .*

Fijado un mapa $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ y un levantado F , definimos para un punto $x \in \mathbb{R}$

$$\rho_n(x, F) = \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Este valor se puede pensar como la velocidad promedio de x para el mapa F , reinterpreandolo como

$$\rho_n(x, F) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(F^i(x)) - F(F^{i-1}(x)) \right).$$

El teorema que define el número de rotación es el siguiente.

Teorema 4.1.3 (Número de Rotación). *Sea F un levantado de $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$. Entonces existe un número real $\rho(F)$ tal que*

$$\rho(F) = \lim_n \rho_n(x, F)$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Más aún, $\rho(F) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $(p, q) = 1$, si y solo si existe $x \in \text{Per}_q(f)$ tal que para cualquier representante $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ se tiene $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$.

A este número se le suele llamar *número de rotación de f para el levantado F* . Si tomamos otro levantado G , que por la proposición 4.1.2 debe ser $G = F + k$, $k \in \mathbb{Z}$, y a partir de esto se puede ver fácilmente que $\rho(G) = \rho(F) + k$. Por lo tanto podemos definir el invariante para f o bien por toda la tira de números $\{\rho(F) + k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ o por su representante $\rho(F) \pmod{1}$. Por lo general se trabaja con un levantado fijo, y analizando su número de rotación se obtiene toda la información necesaria.

En lo que sigue se desarrolla la prueba del teorema 4.1.3. Primero, nos concentramos en la relación entre el número de rotación y las órbitas periódicas.

Proposición 4.1.4. *Sea F un levantado de $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$. Entonces existe $\rho(F)$ y $\rho(F) = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ sii existe $x \in \text{Per}_q(f)$ tal que para un levantado \tilde{x} de x se tiene $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$.*

Demostración. **Primero lo demostramos para el caso $\rho(F) = 0$.** Veamos el directo.

Supongamos para una contradicción, que $\text{Fix}(f) = \emptyset$. Entonces tenemos que $G(x) = F(x) - x$ no tiene ceros, es decir, o bien es positiva o bien es negativa. Asumamos el primer caso, para el segundo la misma prueba funciona.

Esta situación implica que existe $\varepsilon > 0$ $G(x) > \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$ dada la 1-periodicidad de G . Luego $F(x) > x + \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde $F^n(x) - x > n\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto $\liminf_n \frac{F^n(x) - x}{n} > \varepsilon$, lo cual es absurdo.

Para el recíproco, si tenemos $x \in \text{Fix}(f)$ podemos tomar un levantado \tilde{x} y para cualquier levantado F de f se tiene que existe un entero p tal que $F(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$, además este p no depende del levantado \tilde{x} elegido. Tomando cualquier punto $z \in \mathbb{R}$, podemos considerar $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z \in [\tilde{x} + k, \tilde{x} + (k + 1)]$, y luego por las propiedades de los levantamientos tenemos

$$F^n(\tilde{x}) + k \leq F^n(z) \leq F^n(\tilde{x}) + (k + 1), \text{ lo que equivale a}$$

$$\tilde{x} + np + k \leq F^n(z) \leq \tilde{x} + np + k + 1.$$

Dividiendo por n y tomando límite llegamos a que $\rho(z, F) = p$ como queríamos, y por lo tanto $\rho(F) = p$ donde para todo $y \in \text{Fix}(f)$, $F(\tilde{y}) = \tilde{y} + p$ para cualquier \tilde{y} levantado de y .

Para el caso general basta ver que para un levantamiento F se tiene $\rho(F) = \frac{p}{q}$ como en el enunciado, si y solo si para el levantamiento de f^q dado por $G = F^q - p$ se tiene $\rho(G) = 0$. Esto surge utilizando las propiedades de los levantados. Luego, la prueba se completa utilizando el caso anterior. \square

Tenemos solucionado entonces el teorema cuando existen puntos periódicos. Buscamos ahora el resultado general. Dado que la función $F(x) - x$ es 1-periódica podemos considerar siempre un levantado F , donde $F(x) - x > 0$, o equivalentemente $F(x) > x$. De aquí en más trabajaremos con este tipo de levantados, ya que basta probar el resultado para algún levantado, como se observó luego del enunciado.

Lema 4.1.5. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ y F levantado con $F(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe una constante $\beta > 0$ tal que fijados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, vale para todo $y \in \mathbb{R}$*

$$k(F^n(x) - x) - \beta(3k + r + 1) \leq F^m(y) - y \leq k(F(x) - x) + \beta(3k + r + 1),$$

$$\text{donde } m = kn + r, \quad r < n.$$

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, la constante β la encontraremos al final. Como $F(x) - x > \varepsilon > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (dado la 1-periodicidad y nuestro

supuesto), tenemos que existe un entero positivo l tal que fijado cualquier $z \in \mathbb{R}$ se tiene $F^{i_+}(z) \in [x + j, F(x) + j]$ y $F^{-i_-}(z) \in [x + j', F(x) + j']$ para algún $i_+, i_- \in \{0, \dots, l\}$ y algún $j, j' \in \mathbb{N}$. Dicho de otra forma, en \mathbb{S}^1 todo punto deberá ingresar al intervalo $[x, f(x)]$ en menos de l iterados a futuro y pasado.

Veamos la inducción que nos da el resultado. La hacemos en k , donde $m = kn + r$ y $r < n$.

Para $k = 0$ vale el resultado eligiendo $\beta = \beta_0 = \max_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) - x\}$. Asumos ahora que el resultado vale para $k - 1 \geq 0$, y queremos ver que vale para k . Tenemos

$$(k-1)(F^n(x)-x) - \beta(3(k-1)+r+1) \leq F^{(k-1)n+r}(y) - y \leq (k-1)(F^n(x)-x) + \beta(3(k-1)+r+1),$$

Para $y' = F^{(k-1)n+r}(y)$ tenemos que existe $i \in \{-l, \dots, 0\}$ tal que $F^i(y') \in [x + j, F(x) + j]$ para $j \in \mathbb{N}$, y podemos escribir

$$F^{kn+r}(y) - y = [y' - y] + [F^i(y') - y'] + [F^n(F^i(y')) - F^i(y')] + [F^{-i}(F^n(F^i(y')))) - F^n(F^i(y'))],$$

Tenemos

1. por hipótesis de inducción $(k-1)(F^n(x) - x) - \beta(3(k-1) + r + 1) \leq [y' - y] \leq (k-1)(F^n(x) - x) + \beta(3(k-1) + r + 1)$,
2. $-\beta_0 \leq [F^i(y') - y'] \leq \beta_0$,
3. por construcción $F^n(x) - x - \beta_0 \leq [F^n(F^i(y')) - F^i(y')] \leq F^n(x) - x + \beta_0$,
4. $-\beta_0 \leq [F^{-i}(F^n(F^i(y')))) - F^n(F^i(y'))] \leq \beta_0$.

por lo tanto tomando $\beta = l\beta_0 > \beta_0$ (recordar que l es entero positivo) tenemos

$$k(F^n(x) - x) - \beta(3k + r + 1) \leq F^{kn+r}(y) - y \leq k(F^n(x) - x) + \beta(3k + r + 1).$$

□

A partir de este lema podemos completar fácilmente la prueba del teorema.

Prueba del teorema 4.1.3. Como se observó basta probar la existencia de $\rho(F)$ para alguno de los levantados. Tomamos F levantado de f tal que $F(x) > x$ y consideramos β dado por el lema anterior. Fijado $\varepsilon > 0$ consideramos $n \in \mathbb{N}$ y $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$ se tenga

$$\left| \frac{k(F^n(x)-x)}{kn+r} - \frac{F^n(x)-x}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| \frac{\beta(3k+r+1)}{kn+r} \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

donde $m = kn + r$, $r < n$. Pero esto por el lema anterior implica que para tal n y para cualquier $m \geq m_0$ se tiene

$$\frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{F^m(y) - y}{m} \leq \frac{F^n(x) - x}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.2)$$

Eligiendo $y = x$ llegamos a que para todo $m, m' \geq m_0$

$$\left| \frac{F^m(x) - x}{m} - \frac{F^{m'}(x) - x}{m'} \right| \leq \varepsilon,$$

por lo que la sucesión $(\rho_m(x, F))_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y debe converger a un real $\rho(x, F)$. Más aún, si elegimos otro punto y y estudiamos la sucesión $(\rho_m(y, F))_{m \in \mathbb{N}}$ vemos que también converge a $\rho(x, F)$ dado que en la ecuación 4.2 el ε se puede considerar arbitrariamente chico. Esto prueba que existe y no depende de x el valor $\rho(F)$. Se completa el resultado con lo hecho en la proposición 4.1.4. \square

De lo hecho en esta prueba se puede extraer información que es interesante. Le pedimos al lector en el siguiente ejercicio que la extraiga.

Ejercicio 4.1.6.

1. Mostrar que dado $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ se tiene que fijado un levantado F existe $K > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|F^n(x) - x| < n\rho(F) + k.$$

Esta propiedad se conoce como **desviación acotada**.

2. Mostrar que el número de rotación depende continuamente del mapa F en el espacio de levantamientos de elementos de $\text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ con la topología uniforme. Esto es, la **continuidad del número de rotación**.

Cerramos con un interesante ejercicio, que es muestra de como los gráficos del tipo *escalera del diablo* suelen aparecer en el estudio de familias de sistemas dinámicos.

Ejercicio 4.1.7. Consideramos la familia de mapas $\{F_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{a \in [0,1]}$ dada por $F_a(x) = x + a + \sin(2\pi x)$.

1. Mostrar que para todo a el mapa F_a es el levantado de algún $f_a \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$.
2. Siendo $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(a) = \rho(F_a)$, muestre que ϕ es continua y monótona con $\text{Im}(\phi) = [0, 1]$.
3. Mostrar que para todo racional $q \in [0, 1]$ se tiene que $\phi^{-1}(q)$ es un intervalo cerrado con interior no vacío. Esto es un caso especial de las funciones que se conocen como **escalera del diablo**.

4.2. Consecuencias dinámicas

Como vimos, fijado el mapa $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ y un levantado F , por cada levantado $F + k$, $k \in \mathbb{Z}$ se asocia un número de rotación $\rho(F + k) = \rho(F) + k$. Por lo tanto el invariante dinámico asociado a f se puede considerar dado o bien por el conjunto de números $\{\rho(F) + k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ o por su representante mod 1. El lector debe verificar en el siguiente ejercicio que estos representan realmente un invariante dinámico para f .

Ejercicio 4.2.1. Sean $f, g \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ tales que son conjugados por un homeomorfismo h .

1. Mostrar que existen levantados F, G, H de f, g, h respectivamente tal que $H \circ F = G \circ H$.
2. Mostrar que en ese caso $\rho(F) = \rho(G)$.
3. Concluir que el número de rotación mod 1 es efectivamente un invariante topológico.
4. Construir dos dinámicas que tienen el mismo número de rotación mod 1 pero no son conjugadas.

Este invariante resulta ser extremadamente poderoso. Como veremos en lo que sigue, permite detalladas descripciones de la dinámica subyacente.

4.2.1. El caso racional

Asumimos en este parágrafo que $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ y F es un levantado tal que $\rho(F) = \frac{p}{q}$ fracción irreducible de naturales p, q . El teorema 4.1.3 nos dice que $\text{Per}_q(f) \neq \emptyset$ y que para cualquier $x \in \text{Per}_q(f)$ se tiene $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$ para cualquier levantado \tilde{x} de x . Complementamos la información dinámica con la siguiente proposición.

Proposición 4.2.2. Para $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ y F como arriba, se tiene que $\Omega(f) = \text{Per}_q(f)$. Más aún si $\Omega(f) = \mathbb{S}^1$ entonces f es la rotación ángulo $\frac{p}{q}$.

Demostración. Mostramos primero que $\Omega(f) = \text{Per}_q(f)$. Sea $x \in \text{Per}_q(f)^c$, y sea I el intervalo abierto de \mathbb{S}^1 dado por la componente conexas de $\mathbb{S}^1 \setminus \text{Per}_q(f)$ que contiene a x . Siendo a, b los puntos borde de I (posiblemente $a = b$). Tenemos las siguientes propiedades:

- (i) a y b son periódicos de período q y que $f^q|_I : I \rightarrow I$ es un homeomorfismo sin puntos fijos. Por lo tanto existe un entorno U de x tal que $f^{nq}(U) \cap U = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Para cualquier $i \in \mathbb{N} \setminus \{kq\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se tiene que $f^i(I) \cap I = \emptyset$, de lo contrario $f^{i'} = I$ para algún $i' \in [1, \dots, q-1]$, encontrando por Brouwer un punto periódico y de período menor que q , lo cual contradice que $\rho(F) = \frac{p}{q}$ dado el teorema 4.1.3.

Estas dos propiedades implican que x debe ser errante para f . Luego, si $\mathbb{S}^1 = \Omega(f)$, tenemos que $\mathbb{S}^1 = \text{Per}_q(f)$, y dejamos a cargo del lector que esto implica que $f = R_{\frac{p}{q}}$

□

4.2.2. El caso irracional

Basados en el teorema de punto fijo de Brouwer para el intervalo, podemos obtener el siguiente resultado para el caso irracional.

Proposición 4.2.3. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ con $\rho(f) \in \mathbb{Q}^c$. Entonces o bien $\Omega(f) = \mathbb{S}^1$ y f es minimal, o se tiene que $\Omega(f)$ es un cantor minimal para f , y para todo intervalo $I \subset \mathbb{S}^1 \setminus \Omega(f)$ se tiene $f^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo entero positivo n .*

Demostración. Probamos primero la siguiente afirmación: dado cualquier $x \in \mathbb{S}^1$ se tiene $\omega(x, f) = \Omega(f)$. Para ver esto supongamos por absurdo que no se cumple para cierto $x \in \mathbb{S}^1$. Entonces existe $y \in \Omega(f) \setminus \omega(x, f)$, y por lo tanto podemos considerar un intervalo abierto $I \subset \omega(x, f)^c$ tal que contiene a y y es maximal respecto de estas propiedades. Dado que $y \in \Omega(f)$ se tiene para algún natural positivo n que $f^n(I) \cap I \neq \emptyset$, pero entonces debe ser que $f^n(I) \subset I$, de lo contrario $I \cup f(I)$ es un intervalo que contiene a y y que no intersecta a $\Omega(f)$ contradiciendo la maximalidad de I . Luego el teorema de Brouwer nos da un punto fijo de f^n , y por lo tanto un punto periódico de f que no puede existir dado que el mapa tiene número de rotación irracional.

Dada esta afirmación, en caso de que $\mathbb{S}^1 = \Omega(f)$ obtenemos que f es minimal en \mathbb{S}^1 . En caso contrario tenemos que $\Omega(f)$ es un conjunto minimal de f que no contiene puntos periódicos, y por lo tanto debe ser un conjunto de Cantor. Finalmente dado un *gap* I de $\Omega(f)$ (componente conexas del complemento del Cantor), se debe tener que $f^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo entero positivo n , de lo contrario, como se argumentó antes, se debe tener $f^n(I) \subset I$ para algún entero positivo n lo cual implica la existencia de puntos periódicos para el mapa.

□

Dejamos para la próxima sección la construcción de un ejemplo en donde se de la segunda situación planteada por el proposición: número de rotación irracional y el conjunto no errante dado por un Cantor. El siguiente teorema muestra la fuerte relación que tiene la dinámica de un mapa con número de rotación irracional y la respectiva rotación. Antes de ir a su enunciado precisamos algunos conceptos.

Dados $a, b \in \mathbb{S}^1$ notamos por (a, b) la componente conexas de $\mathbb{S}^1 \setminus \{a, b\}$ tal que coincide con $\pi(\tilde{a}, \tilde{b})$ para \tilde{a} levantado de a y \tilde{b} levantado de b y además pedimos que entre \tilde{a} y \tilde{b} no haya ningún levantado de b , y definimos $[a, b] = \text{cl}[(a, b)]$. Un mapa $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ preserva orientación si la imagen de cualquier intervalo (a, b) es o bien un punto, o es el intervalo $(f(a), f(b))$. El lector puede verificar que las fibras de un mapa (familia de conjuntos dados por pre-imagenes del mapa)

de \mathbb{S}^1 que preserva orientación son o bien puntos o bien intervalos. Además el mapa debe ser sobreyectivo.

Teorema 4.2.4. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{Q}^c$. Entonces existe una semiconjugación h entre f y R_α que preserva orientación.*

Como la semiconjugación h que establece este teorema preserva orientación, las fibras del mismo son o bien puntos o bien intervalos. Si $I = h^{-1}(y)$ es un intervalo no trivial, entonces el lector puede verificar que $f^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (sino $R_\alpha^n(y) = y$, que implica α racional). Recíprocamente, si I es un intervalo abierto errante para f , entonces se puede verificar que $h(I)$ es un punto (sino $J = h(I)$ sería un intervalo errante para la rotación irracional).

El resultado se basa en que las órbitas de f y las de la rotación irracional R_α , deben seguir exactamente el mismo orden. Formalmente esto quiere decir que para cualquier par $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ se cumple:

$$f^n(x) \in (f^i(x), f^j(x)) \text{ sii } R_\alpha^n(x) \in (R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)),$$

para cualquier $x \in \mathbb{S}^1$.

Esta propiedad se puede describir a través de la siguiente proposición para el levantado.

Proposición 4.2.5. *Sea F un levantado de $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ tal que $\rho(F) = \alpha \in \mathbb{Q}^c$. Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y n_1, n_2, m_1, m_2 naturales se tiene*

$$F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2 \text{ sii } n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, n_1, m_1, n_2, m_2 tal que se tiene $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$. Entonces, dado que la función dada por $F^{n_1}(x) - F^{n_2}(x) + m_1 - m_2$ no puede cambiar de signo (de otro modo tendríamos puntos periódicos para f), podemos asumir que vale $F^{n_1}(x) - F^{n_2}(x) < m_2 - m_1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego para cualquier $y \in \mathbb{R}$ que $F^{n_1 - n_2}(y) - y = F^{n_1}(F^{-n_2}(y)) - F^{n_2}(F^{-n_2}(y)) > m_2 - m_1$. Por lo cual obtenemos en particular para 0 que

$$F^{k(n_1 - n_2)}(0) < k(m_1 - m_2).$$

Por su parte se puede ver que $\alpha = \lim_k \frac{F^{k(n_1 - n_2)}(0)}{k(n_1 - n_2)}$ (independientemente del signo de $n_1 - n_2$), de donde

$$\alpha \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Siendo que α es irracional tenemos que $\alpha < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}$, lo que implica $n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2$ como queríamos.

La misma prueba muestra que si $F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$ entonces $n_1\alpha + m_1 > n_2\alpha + m_2$, lo cual demuestra el recíproco. \square

Veamos ahora la prueba del teorema.

Prueba del teorema 4.2.4. Consideramos los conjuntos $A = \{F^n(0)+m : n, m \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{n\alpha + m : n, m \in \mathbb{N}\}$, y definimos $H : A \rightarrow B$ como $H(F^n(0)+m) = n\alpha + m$. Este mapa es monótono en A y biyectivo dada la última proposición. Más aún, dado que B define un subgrupo no discreto, se tiene que $\text{cl}[B] = \mathbb{R}$. Podemos extender H a un mapa $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuo, sobreyectivo, y monótono de la siguiente forma:

fijado $z \in \mathbb{R} \setminus A$ consideramos una familia decreciente de intervalos abiertos $(I_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$, $I_n(z) = (a_n, b_n)$, tales que

1. $z \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
2. $(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n) \cap A = \emptyset$,

cuya existencia queda a cargo del lector. La proposición 4.2.5 implica que $[H(a_n), H(b_n)] = J_n$ define una sucesión decreciente de intervalos, y por lo dicho anteriormente los diámetros tienden a cero. Esto nos permite definir $H(z)$ dado por $\{H(z)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Note el lector que $H(z)$ no depende de la sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerada, es decir, siempre que verifiquemos los puntos 1 y 2, llegaremos al mismo punto $H(z)$.

La continuidad de tal mapa es fácil de probar. Además por definición es monótona y para cualquier $z \in \mathbb{S}^1$ o bien $H^{-1}(z)$ es un punto, o es un intervalo. Por construcción, para que $H^{-1}(y)$ sea un intervalo no trivial I , se debe tener que $A \cap \text{int}[I] = \emptyset$. Finalmente, la construcción de H implica que $H(x+1) = H(x)+1$, por lo que define $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua y sobreyectiva, que preserva orientación.

Por construcción se tiene que $H|_A \circ F = T \circ H|_B$, siendo $T(x) = x + \alpha$. Para $z \in \mathbb{R} \setminus A$, podemos observar que $F(I_n(z))$ es una sucesión de intervalos como requerimos para construir $H(F(z))$, de donde

$$H(F(z)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T(J_n(z)) = T(H(z)), \text{ por lo que}$$

$$h(f(x)) = R_\alpha(h(x)) \text{ para todo } x \in \mathbb{S}^1.$$

□

El siguiente ejercicio permite obtener más información para la semiconjugación construida.

Ejercicio 4.2.6. En las hipótesis del teorema 4.2.4 mostrar lo siguiente.

1. Si $\Omega(f) = \mathbb{S}^1$ tenemos que h es una conjugación.
2. Si $\Omega(f) \neq \mathbb{S}^1$ entonces necesariamente h no es inyectiva, y se tiene que $h^{-1}(z)$ es o bien un punto o un intervalo I tal que $\text{int}[I]$ es un gap de $\Omega(f)$.

Cerramos con los siguientes ejercicios. El primero describe los flujos dados por suspensiones de elementos de $\text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, que es el problema que motivo el estudio de estas dinámicas. El segundo es un interesante resultado, que prueba la no existencia de homeomorfismos expansivos en el círculo.

Ejercicio 4.2.7. *

Sea $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un flujo obtenido a partir de la suspensión de un mapa $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$. Mostrar lo siguiente.

1. Si $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, entonces el conjunto no errante de ϕ es una unión de órbitas periódicas.
2. Si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ entonces el conjunto no errante de ϕ coincide con un conjunto minimal \mathcal{M} para el flujo. Además el conjunto \mathcal{M} es conexo pero no localmente conexo. Más aún, todo punto en \mathcal{M} admite un entorno V de \mathbb{T}^2 tal que existe un cambio de cartas de V al cuadrado $(0, 1)^2$ que identifica $\mathcal{M} \cap V$ con un conjunto $(0, 1) \times K$ donde K es un conjunto de Cantor en $(0, 1)$. **A conjuntos con esta propiedad se le suele llamar laminación.**

Ejercicio 4.2.8. Mostrar que no hay homeomorfismos expansivos en \mathbb{S}^1 .

4.3. El ejemplo de Denjoy

Queremos un ejemplo que tenga número de rotación irracional y no sea conjugado a una rotación. Por lo visto en la última sección tal ejemplo debe tener un intervalo errante, esto es, un intervalo I tal que $f^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo entero $n \geq 1$. Comenzamos introduciendo notación.

Dados tres intervalos disjuntos $I_1 = (a_1, b_1)$, $I_2 = (a_2, b_2)$, $I_3 = (a_3, b_3)$ de \mathbb{S}^1 , decimos que I_2 *está entre* I_1 y I_3 si $I_2 \subset (b_1, a_3)$. Notamos esta situación por $I_1 \prec I_2 \prec I_3$. Consideramos la definición análoga para el caso en que I_2 es un intervalo cerrado, o un punto.

Fijamos una rotación irracional $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una órbita de la misma. Podemos considerar una sucesión de intervalos abiertos $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en \mathbb{S}^1 tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

1. $\text{cl}[I_{-n}], \dots, \text{cl}[I_n]$ son dos a dos disjuntos,
2. $I_i \prec I_n \prec I_j$ si y solo si $x_n \in (x_i, x_j)$ para todo $i, j \in \{-n, \dots, n\}$,
3. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_n| = 1$ (donde $|I_n|$ es la longitud de I_n).

Queda a cargo del lector justificar la existencia de estos elementos. El punto dos implica que particular que

$$I_r \prec I_s \prec I_t \text{ sii } I_{r+1} \prec I_{s+1} \prec I_{t+1}. \quad (4.3)$$

Tomamos ahora un homeomorfismo $f : \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ tal que $f(I_n) = I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde $f|_{I_n}$ preserva la orientación natural. Veamos que lo podemos extender a un elemento de $\text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$.

Sea $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$. Consideramos una sucesión decreciente de intervalos cerrados $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que si $J_k = [a_k, b_k]$ se tiene

- (i) $z \in J_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$,
- (ii) para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que a_k es borde de algún elemento de $\{I_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y lo mismo ocurre para b_k ,
- (iii) $|J_k| \rightarrow_n 0$,

la cual se puede ver que existe dadas las propiedades de la sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (nuevamente dejamos al lector mostrar esta afirmación). Para $J_k = [a_k, b_k]$ con $a_k \in I_{n_k}$ y $b_k \in I_{n'_k}$ consideramos el intervalo $J_k^* = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ donde a_{k+1} es el segundo borde de $I_{n_{k+1}}$ y b_{k+1} es el primer borde de $I_{n'_{k+1}}$.

Se tiene que $(J_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de intervalos, dada la construcción de los I_n . Más aún, el diámetro de los J_k^* debe tender a cero: supongamos que no fuera así. Entonces, podemos encontrar un intervalo $I_l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n^*$, por lo cual siguiendo la notación del párrafo anterior $I_{n_{k+1}} \prec I_l \prec I_{n'_{k+1}}$ para todo k y luego usando 4.3 encontramos $I_{l-1} \subset J_k$ para todo k , siendo absurdo ya que $|J_k|$ tiende a cero.

Podemos definir entonces la extensión de f a \mathbb{S}^1 para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ dada por

$$\{f(z)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n^*.$$

Veamos que f es continua. Fijamos $z \in \mathbb{S}^1$. Si $z \in I_n$, para algún n , no hay nada que verificar. Si $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}[I_n]$ tenemos dos casos:

- z es borde de algún $I_n = (a_n, b_n)$: digamos para fijar ideas que coincide con el primer borde a_n . tenemos que $J_k = [a'_k, a_n]$ para todo k y por lo tanto $J_k^* = [a'_{k+1}, a_{n+1}]$ que implica $f(z) = a_{n+1}$. Esto implica que f es continua por derecha en z . Para ver que lo es por izquierda, tenemos por construcción que $f(J_k(z)) = J_k^*(z) \rightarrow_k f(z)$, lo cual alcanza ya que los intervalos $J_k(z)$ contienen semientornos a la izquierda de z .
- z no es borde de ningún I_n : en este caso tenemos que los intervalos $J_k^*(z)$ determinan una base de entornos para $f(z)$ y a si mismo los intervalos $J_k(z)$ determinan una base de entornos para z . Como por construcción se tiene $f(J_k(z)) = J_k^*(z)$, tenemos la continuidad.

Teniendo la continuidad demostrada se tiene la sobreyectividad, dado que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset \text{Im}(f)$ es un conjunto denso en \mathbb{S}^1 . Finalmente, para ver que f es inyectiva, fijado $x \neq x' \in \mathbb{S}^1$ tenemos lo siguiente:

- Si ambos puntos están en $\text{cl}[I_n]$ para algún I_n , se tiene trivialmente que $f(x) \neq f(x')$.
- En la situación complementaria, por la elección de la sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe existir $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$I_{n_0} \prec \{x\} \prec I_{n_1} \text{ y } I_{n_1} \prec \{x'\} \prec I_{n_2},$$

y esto por construcción implica que

$$I_{n_0+1} \prec \{f(x)\} \prec I_{n_1+1} \text{ y } I_{n_1+1} \prec \{f(x')\} \prec I_{n_2+1}.$$

Llegamos entonces a que $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$. Por construcción tenemos que I_0 es un intervalo errante para f . Finalmente, para ver que el número de rotación es irracional suponemos que no lo fuera. Entonces $\Omega(f) = \text{Per}_q(f)$ para algún natural q y por lo tanto I_0 está contenido en alguna componente conexa (x, x') de $\mathbb{S}^1 \setminus \text{Per}_q(f)$ (donde naturalmente $x, x' \in \text{Per}_q(f)$). Siendo que $f^q|_{(x, x')}$ es un homeomorfismo del intervalo sin puntos fijos, se tiene que $(f^{kq}(I_0) = I_{qn})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos monótona en (x, x') , es decir

$$I_{qn} \prec I_{q(n+1)} \prec I_{q(n+2)} \text{ para todo } n \text{ o } I_{q(n+2)} \prec I_{q(n+1)} \prec I_{qn} \text{ para todo } n.$$

Asumamos el primer caso, con el otro se trabaja igual. En esta situación el punto 2 de la construcción implica que $(x_0, x_q) \cap \{x_{kq}\}_{k \in \mathbb{N}} = \emptyset$, lo cual contradice que la rotación irracional R_α^k sea minimal.

Obtuvimos entonces la construcción de un ejemplo con número de rotación irracional, que tiene además intervalos errantes. Nuestro ejemplo tiene a priori regularidad C^0 . En este sentido existe un resultado muy interesante debido a Denjoy, que muestra que tales ejemplos existen a lo sumo con diferenciable C^1 ¹.

Teorema 4.3.1. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ con $\rho(f) \in \mathbb{Q}^c$. Entonces si f presenta intervalos errantes, no puede ser de clase C^2 . Más aún se puede considerar f de clase C^1 con intervalos errantes.*

La prueba de este resultado no la introducimos en las notas, se puede encontrar por ejemplo en [7]. Cerramos con un interesante ejercicio con el cual el lector podrá repasar la construcción del ejemplo.

Ejercicio 4.3.2. Para el ejemplo f construido arriba, construir explícitamente la semiconjugación h entre f y R_α , de forma que las fibras no triviales estén dadas exactamente por $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

¹Para ser precisos $C^{1+\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$.

Capítulo 5

Un poco de teoría de Rotación en \mathbb{A} y \mathbb{T}^2

Como vimos, el invariante dado por el número de rotación en el círculo resultó muy poderoso a la hora de clasificar las posibles dinámicas. Este hecho se basa fuertemente en la unidimensionalidad del espacio. Generalizaciones de este tipo de invariante se pueden considerar en otros contextos, aunque se pierda fuerza de las clasificaciones inducidas. En superficies resulta nuevamente muy interesante y existen teorías basadas en estos objetos, en particular en el toro y el anillo donde estas teorías están ampliamente desarrolladas.

En este capítulo intentamos mostrar algunas cuestiones y resultados básicos de las consideraciones de este tipo de invariantes para el anillo \mathbb{A} y el toro \mathbb{T}^2 .

Así como para el círculo fue importante levantar mapas al espacio de cubrimiento, ya que esto permitió una definición concisa del número de rotación, en estos nuevos contextos precisamos de las mismas herramientas. Las introducimos en la siguiente sección, obviando las pruebas, que pertenecen al campo de la topología.

5.1. Levantamientos de mapas en \mathbb{A} y \mathbb{T}^2

Para empezar vamos a considerar \mathbb{A} como el cociente del plano dado por $(x, y) \sim (x', y')$ sii $x - x' \in \mathbb{Z}$ y $y = y'$. El toro \mathbb{T}^2 está dado como siempre por $(x, y) \sim (x', y')$ sii $x' - x, y - y' \in \mathbb{Z}$. Sabemos que si un mapa $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continuo y respeta las clases de equivalencia, entonces define mapas en los respectivos espacios \mathbb{A} y \mathbb{T}^2 . Nuevamente, surge la pregunta: ¿es cierto el recíproco?, es decir, dado un mapa $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ entonces ¿existe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lo induce? y lo mismo para \mathbb{T}^2 . La respuesta es positiva, y como mencionamos es un resultado básico de topología (algebraica).

Notamos por $\text{Cont}(\mathcal{X})$ el espacio de las funciones continuas de \mathcal{X} en \mathcal{X} . Fijada $f \in \text{Cont}(\mathbb{A})$ al considerar el levantado F de f se debe tener para cada

$x \in \mathbb{R}^2$ que $F(x + (1, 0)) = F(x) + n_x$ con $n_x \in \mathbb{Z}$. Como F es continua se tiene n_x constante. Tal número entero se llama *grado* de f y se denota $\deg(f)$. Se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 5.1.1. *Sea F levantado de $f \in \text{Cont}(\mathbb{A})$. Entonces si f es un homeomorfismo $\deg(f) = \pm 1$.*

Decimos que f preserva orientación si $\deg(f) = 1$, y notamos el espacio de homeomorfismos que preservan orientación en \mathbb{A} por $\text{Homeo}_+(\mathbb{A})$. Como primer ejemplo no trivial, que además es clave en dinámica, el lector puede pensar en el twist map.

Para el toro la situación es parecida pero más complicada. Claramente si F es el levantado de $f \in \text{Cont}(\mathbb{T}^2)$ se debe tener que

$$F((x, y) + (n, m)) = F(x, y) + (k_n, k_m) \text{ con } k_n, k_m \in \mathbb{Z}^2.$$

Siendo A la matriz asociada en la base canónica a la transformación que lleva $(1, 0)$ a k_1 y $(0, 1)$ a k_2 se puede probar lo siguiente:

$$F((x, y) + (n, m)) = F(x, y) + A \cdot (n, m).$$

Además se puede probar que cualquier par de levantados debe tener asociada la misma matriz. Recíprocamente si elegimos una matriz A que preserva los enteros \mathbb{Z}^2 podemos con la misma ecuación definir un levantado F . Por lo tanto: el espacio de mapas $\text{Cont}(\mathbb{T}^2)$ admite una clasificación dada por el conjunto de matrices reales dos por dos con coeficientes enteros. La proposición análoga a la anterior queda dada por:

Proposición 5.1.2. *Sea F levantado de $f \in \text{Cont}(\mathbb{T})$. Entonces si f es un homeomorfismo la matriz asociada A debe ser invertible, es decir un elemento de $Sl(2, \mathbb{Z})$ y por lo tanto tiene determinante igual a uno. Recíprocamente, dada $A \in Sl(2, \mathbb{Z})$ existen homeomorfismos de \mathbb{T}^2 cuya matriz asociada es A .*

Esto permite descomponer el espacio de homeomorfismos del toro como la unión disjunta

$$\text{Homeo}(\mathbb{T}^2) = \bigcup_{A \in Sl(2, \mathbb{Z})} \text{Homeo}_A(\mathbb{T}^2).$$

Se puede probar que esta es exactamente la descomposición en componentes conexas (y por lo tanto arco-conexas) del espacio de homeomorfismos. Como vimos antes, en los casos en que A es además hiperbólica, tenemos los difeomorfismos de Anosov f_A . Es muy interesante el siguiente resultado de dinámica hiperbólica (ver [?]).

Teorema 5.1.3. *Sea $f \in \text{Homeo}_A(\mathbb{T}^2)$ con $A \in Sl(2, \mathbb{Z})$ hiperbólica. Entonces f es semiconjugado a f_A .*

Cuando algún valor propio de la matriz A asociada a un levantado F tiene módulo distinto de uno, se tiene que $F^n(v)$ crece en norma con orden mayor al lineal, para ciertos vectores, como puede verificar el lector.

Si estamos interesados en los desplazamientos promedios para homeomorfismos de \mathbb{A}^2 o de \mathbb{T}^2 dados por límites de expresiones de la forma

$$\frac{F^n(x) - x}{n}$$

consideramos solo aquellas situaciones en las que la norma de F crece linealmente. En el caso del anillo siempre es así, mientras como vimos en el caso del toro solo aquellas matrices en $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ con valores propios de módulo uno tienen estas clases de levantados. Es por esto que la teoría de rotación se desarrolla en

$$\text{Homeo}_+(\mathbb{A}) \text{ para el anillo y en } \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2) \text{ para el toro,}$$

siendo esta última la clase de la identidad.

Vemos a continuación algunos elementos básicos de la teoría de rotación en el anillo y en el toro.

5.2. Conjunto de rotación en \mathbb{A}

Fijado $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{A})$ queremos estudiar los puntos de acumulación de sucesiones dadas por los **números**

$$\frac{[F^n(x) - x]_1}{n}$$

habiendo fijado el levantado F , donde $[\cdot]_1$ es la primer coordenada (nos interesa la velocidad angular). Utilizando el twist map podemos ver el primer ejemplo donde estos límites no quedan determinados por un único vector. Nos vemos forzados entonces a considerar la acumulación de estas sucesiones. Definimos

$$\rho(F) = \left\{ \lim_i \frac{[F^{n_i}(x_i) - x_i]_1}{n_i} : x_i \in \mathbb{R}^2, n_i \nearrow +\infty \right\} \subset \mathbb{R}.$$

El concentrado lector notará la rareza de que permitimos variar el punto base x_i al considerar los desplazamientos, pero esto hace que en diferentes situaciones el conjunto obtenido sea un intervalo. Con esta generalidad, la definición tiene el problema de no ser un invariante topológico: dos mapas conjugados donde el círculo $\pi(\mathbb{R} \times \{0\})$ es un repulsor para ambos mapas, pero mientras para uno las órbitas se alejan de dicho repulsor sin girar y para el otro las mismas giran al alejarse del mismo tendrán distintos conjuntos de rotación. Es por esto que para la definición uno suele restringirse a subconjuntos compactos e invariantes: siendo K en \mathbb{A} compacto e invariante para f , definimos

$$\rho_K(F) = \left\{ \lim_i \frac{[F^{n_i}(x_i) - x_i]_1}{n_i} : \pi(x_i) \in K, n_i \nearrow +\infty \right\}.$$

Este tipo de conjuntos de rotación si funcionan correctamente como invariantes y han sido ampliamente estudiados. La siguiente proposición muestra una característica básica del invariante. Recordamos que un conjunto compacto y conexo del anillo es *esencial* si no está contenido en algún disco topológico de \mathbb{A} .

Proposición 5.2.1. *Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{A})$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}$ compacto conexo y F un levantado. Entonces $\rho_{\mathcal{C}}(F)$ es un intervalo compacto.*

En particular se suele estudiar el caso en que \mathcal{C} es un atractor del anillo que lo separa en dos componentes conexas, como veremos sucede en el ejemplo de la próxima sección. Es interesante observar que para que nos de un conjunto conexo es necesario permitir la disgregación mencionada sobre el punto base x_i . Lo vemos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 5.2.2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (x + r(y), y + h(y))$ donde $r(y)$ vale 0 para $y \in (-\infty, 0]$, vale 1 para $y \in [1, +\infty)$ y es estrictamente creciente en $[0, 1]$, y $h(y) + y$ siendo igual a y en $(0, 1)^c$ y un homeomorfismo estrictamente creciente en $[0, 1]$ sin puntos fijos. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{A})$ el homeomorfismo inducido por F .

1. Mostrar que $\omega(x, f) = \pi(\{1\} \times \mathbb{R})$ y $\alpha(x, f) = \pi(\{0\} \times \mathbb{R})$ para todo $x \in \mathbb{A}$. Concluir que $\Omega(F) = \pi(\{0, 1\} \times \mathbb{R})$.
2. Mostrar que si definimos

$$\rho_p(F) = \left\{ \lim_i \frac{[F^{n_i}(x) - x]_1}{n_i} : x \in \mathbb{R}^2, n_i \nearrow +\infty \right\},$$

se tiene $\rho_p(F) = \{0, 1\}$ y por lo tanto no es conexo.

3. Hallar $\rho_A(F)$ donde $A = \pi(\mathbb{R} \times [0, 1])$.

La importancia de estudiar el caso en que $\rho(F)$ es un intervalo no trivial es natural a partir de lo expresado en las *consideraciones previas* de estas notas, dado que es de esperar que modificaciones del twist map relacionadas al problema de los tres cuerpos, sigan teniendo un intervalo de rotación no trivial. Por ejemplo se tiene la siguiente serie de preguntas fundamentales, planteadas originalmente por Poincaré. Sea $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{A})$ con $\rho(F) \supset [0, 1]$ para algún levantado F :

- (i) ¿Será que por cada racional $\frac{p}{q} \in \rho(F)$ se tiene un punto periódico de período q con un levantado \tilde{x} tal que $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$? A este tipo de problemas se les conoce como problema de *realización de vectores de rotación*.
- (ii) ¿Será que existen círculos invariantes esenciales para tal f ?

Para (i) encontramos enseguida un contraejemplo dado por el ejemplo del ejercicio 5.2.2. En realidad la pregunta de Poincaré es para mapas que preservan el área ya que sus modelos venían de un sistema mecánico conservativo dado por el problema de los tres cuerpos, y dicho ejemplo no lo hace. Para esta clase de mapas el resultado es positivo, y se conoce como teorema de Poincaré-Birkhoff. Poincaré en su tiempo presentó una prueba que tenía errores. Más adelante Birkhoff probó resultados parciales. Se tienen pruebas de este resultado y variaciones en tiempos recientes, dados por los trabajos de Franks y LeCalvez (entre otros). Estos trabajos se basan en lo que se conoce como *teoría de Brouwer*.

El resultado (ii) es falso en general. Inclusive considerando perturbaciones C^1 cercanas del twist map, podemos asegurar la no existencia de círculos esenciales invariantes para la dinámica. Sin embargo, si consideramos perturbaciones analíticas, es posible probar la persistencia de algunos de estos círculos. Este tipo de resultados corresponde a lo que se conoce como Teoría KAM como se comentara anteriormente. Vale la pena volver a mencionar que la existencia de estos círculos invariantes está relacionada a la estabilidad de las soluciones para el problema de los 3 cuerpos.

Finalizamos el caso del anillo introduciendo un ejemplo interesante, que surge de considerar perturbaciones disipativas del twist map.

5.3. Herradura rotacional

En este ejemplo usaremos la herradura para construir un atractor en el anillo \mathcal{C} que tendrá la dinámica de la herradura, una topología muy complicada y un conjunto de rotación dado por el intervalo $[0, 1]$. Este tipo de atractores suelen aparecer al considerar perturbaciones disipativas del twist map del anillo y se conocen como atractores de Birkhoff.

Hacemos la construcción del levantado del ejemplo. Comenzamos con un mapa $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$F_1(x, y) = \left(\phi(x), \frac{1}{4}y \right)$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo con las siguientes propiedades:

1. $\phi - \text{Id}$ es 1-periódico, por lo cual el mapa F define un elemento de $\text{Homeo}_+(\mathbb{A})$.
2. $\phi|_{[0,1]}$ es lineal a trozos, de forma que es creciente (para obtener un homeomorfismo). Sobre el intervalo $[0, \frac{1}{12}]$ está dado por el mapa $x \rightarrow 4x$, sobre el intervalo $[1 - \frac{1}{12}, 1]$ por $x \mapsto 4(x - 1) + 1$ y los únicos puntos fijos son 0 y $\frac{1}{2}$.

Este mapa induce una dinámica $f_1 \in \text{Homeo}_+(\mathbb{A})$ que es un Morse-Smale, donde $\Omega(f) = \{\pi(0), \pi(\frac{1}{2})\}$ siendo ambos elementos puntos fijos, el primero una silla y el segundo un atractor. Además el conjunto $\pi(\mathbb{R} \times \{0\})$ define un atractor para este mapa.

Consideramos ahora el cuadrado $R = [-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}]^2$. Tenemos que $R' = F_1(R)$ es el rectángulo $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \times [-\frac{1}{48}, \frac{1}{48}]$. La herradura la construiremos a partir del rectángulo R , donde la primer componente (siguiendo la construcción hecha en 2.3) estará dada por $R' \cap R$ y la segunda componente se formará con una vuelta al anillo \mathbb{A} . Veamos como hacerlo.

Sea un disco $U \subset (\frac{1}{12}, 1 + \frac{1}{3}) \times (-\frac{1}{20}, \frac{1}{10})$ con las siguientes propiedades:

1. $U \cap R'$ está dado por una única componente conexa que contiene un rectángulo vertical V maximal en R' dado por

$$\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right] \times \left[\frac{-1}{36}, \frac{1}{36} \right].$$

2. $U \cap R + (1, 0)$ está dado por una única componente conexa disjunta de $R' + (1, 0)$ que contiene un rectángulo horizontal H maximal en R dado por

$$\left[1 - \frac{1}{12}, 1 + \frac{1}{12}\right] \times \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{36}, \frac{1}{12}\right].$$

3. $\pi(U)$ es un disco en \mathbb{A} . Esto es equivalente a pedir que π sea inyectiva en U .

Sobre este disco podemos construir la función g análoga a la utilizada en 2.3, cuya construcción en detalle es nuevamente sumamente tediosa y no será introducida. El lector debe convencerse de que se puede construir. Esta vez el homeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ debe cumplir:

1. g está soportada en $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} U + (0, m)$ y g preserva la relación de equivalencia que define \mathbb{A} .
2. $g(V) = H$ y $g|_V$ es una isometría.

El mapa que nos interesa es $F = g \circ F_1$ que induce $f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{A})$. Siendo $A = \pi(\mathbb{R} \times [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}])$ se tiene que $f(A) \subset \text{int}[A]$, por lo que el conjunto definido por

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$$

es un atractor. En particular tenemos $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(R) \subset \mathcal{C}$ y además el pozo $\pi(\frac{3}{4})$ está en \mathcal{C} .

Si consideramos los conjuntos

$$V_0 = \pi(F^{-1}(R \cap R')) \text{ y } V_1 = \pi(F^{-1}(H))$$

podemos construir una partición para Λ como la utilizada en la sección 2.3 que nos permite construir a partir de los itinerarios la conjugación

$$h : \Lambda \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \text{ dada por } h(x)(i) = 0 \text{ si } f^i(x) \in V_0.$$

El lector puede verificar que la construcción de dicho mapa no tiene diferencias con el caso de la herradura de Smale presentado en las notas.

Lo interesante de este nuevo ejemplo es el aspecto rotacional. Veremos que $\rho_\Lambda(F) = [0, 1]$. Para esto consideramos dos levantamientos de V_0 y V_1 dados por $\tilde{V}_0 = F^{-1}(R \cap R')$ y $\tilde{V}_1 = F^{-1}(H)$. La observación clave es la siguiente:

- Si $x \in \tilde{V}_0 + (k, 0)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, entonces $F(x) \in R + (k, 0)$, mientras
- Si $x \in \tilde{V}_1 + (k, 0)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, entonces $F(x) \in R + (k + 1, 0)$.

Esto quiere decir que si partimos de $x \in \Lambda$ siendo $h(x)$ la sucesión itinerario, tenemos para cualquier levantado \tilde{x} de x en el rectángulo R que

$$F^n(x) \in R + \sum_{i=1}^n (h(x)(i-1), 0) \text{ para todo entero } n > 1. \quad (5.1)$$

Esto implica en particular que $\frac{[F^n(\tilde{x})]_1}{n} \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\rho_\Lambda(F) \subset [0, 1]$. Por su parte si $h(x)$ es la sucesión constante cero, sabemos que x representa un punto fijo de f en $\pi(R)$, y tenemos para \tilde{x} su levantado en R que $F(x) = x$, es decir, también es fijo para el levantado. Si hacemos la misma consideración para x con $h(x)$ la sucesión constante 1, tenemos que x es un punto fijo de f en $\pi(R)$ tal que para su levantado $\tilde{x} \in R$ se tiene $F(\tilde{x}) = \tilde{x} + (1, 0)$, y por lo tanto $F^n(\tilde{x}) = \tilde{x} + (n, 0)$. Esto implica que $\{0, 1\} \subset \rho_\Lambda(F)$.

Si fijamos cualquier racional $\frac{p}{q} \in [0, 1]$ (fracción irreducible) podemos considerar $x \in \Lambda$ periódico con $h(x)$ periódica dada por la concatenación de una palabra de largo q que tenga p unos y el resto sean ceros. Entonces por la ecuación 5.1 tenemos para un levantado \tilde{x} de x en R que

$$F^{kq}(\tilde{x}) \in (kp, 0) + R,$$

lo que implica que $\frac{p}{q} \in \rho_\Lambda(F)$. Por último si tomamos cualquier elemento α de $[0, 1]$ podemos encontrar una sucesión ξ de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que si la promediamos, tiende a α . Entonces utilizando el x asociado a ξ , llegamos a que $\alpha \in \rho_\Lambda(F)$, y por lo tanto

$$\rho_\Lambda(F) = [0, 1].$$

Se puede probar que $[0, 1]$ es el conjunto de rotación para todo el atractor \mathcal{C} , pero omitiremos este detalle. Nos interesa mostrar la complejidad de la topología de \mathcal{C} . Tenemos por topología básica que \mathcal{C} es compacto y conexo, ya que es intersección decreciente de compactos conexos. Más aún \mathcal{C} separa el espacio en dos componentes infinitas, U^+ y U^- donde

$$U^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n \left(\pi \left(\left[\frac{1}{10}, +\infty \right) \times \mathbb{R} \right) \right) \text{ y } U^- = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n \left(\pi \left(\left(-\infty, -\frac{1}{10} \right] \times \mathbb{R} \right) \right).$$

Por su parte tenemos las variedades inestables de los puntos en Λ , que por construcción están contenidas en \mathcal{C} , ya que fuera de \mathcal{C} todo punto tiene tiende a pasado a $+\infty$ o $-\infty$. Si miramos en particular la variedad inestable $W^u(\pi(0), f)$ tenemos que es la proyección de la variedad inestable de 0 para F . El conjunto $W = W^u_{\frac{1}{12}}(0, F)$ intersecciona a \tilde{V}_1 por lo que su imágen llega a $R + 1$, y recursivamente por la misma observación podemos ver que $F^n(W)$ llega a $R + n$ para todo natural n . Cada curva $W_n = F^n(W)$ se proyectará a una curva simple del anillo (ya que un loop dentro de una variedad inestable no puede existir). La misma observación se puede probar para cualquier punto en Λ . Tenemos entonces que

$$\mathcal{C} \supset \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x, f).$$

siendo cada componente de la unión un encaje de \mathbb{R} en \mathbb{A} . Como se mostró para la herradura del plano, este último conjunto al ser intersectado con el rectángulo R nos da topológicamente un Cantor por el intervalo.

Por último, se puede tener cuidado en la construcción para que fijado $x \in \mathbb{A}$ se tenga:

1. o bien x es el pozo $\pi(\frac{3}{4})$,
2. o bien x a pasado muere en $+\infty$ o $-\infty$ y por lo tanto $x \in \mathcal{C}^c$,
3. o bien existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene $f^{-k}(x) \in R$, y por lo tanto $x \in \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x, f)$.

Si tuvieramos estos cuidados, llegamos a que

$$\mathcal{C} = \text{cl} \left[\bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x, f) \right].$$

5.4. Conjunto de Rotación para \mathbb{T}^2

Como discutimos en la sección 5.1 el conjunto de rotación para el toro tiene sentido para la clase $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ de homeomorfismos homotópicos a la identidad. Para $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ cualquier levantado cumple

$$F((x, y) + (m, n)) = F(x, y) + (m, n) \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Además, fijado un levantado F la familia de todos los posibles levantados queda dada por $\{F + t\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$.

Fijado un levantado F de $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$, definimos su conjunto de rotación como

$$\rho(F) = \left\{ \lim_i \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} : x_i \in \mathbb{R}^2, n_i \nearrow +\infty \right\},$$

que es un subconjunto del plano. En este caso si tenemos dos mapas conjugados $f, g \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ y levantamos la conjugación a \mathbb{R}^2 se puede ver que esta conjuga dos levantados F y G . Esto permite obtener $\rho(F) = \rho(G)$ y lo mismo vale para semiconjugaciones. Por lo que el conjunto de rotación en este caso si es un buen invariante así definido.

Existe toda una teoría entorno a este invariante, que está basada en el siguiente resultado de gran relevancia debido a Misiurewicz y Ziemian.

Teorema 5.4.1 ([11]). *Sea F levantado de $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$, entonces $\rho(F)$ es compacto y convexo.*

A partir de este resultado la teoría se establece siguiendo dos tipos de preguntas:

- Cuales son los posibles conjuntos de rotación, o de otra forma, si todo convexo compacto del plano es un conjunto de rotación o no.
- Fijada una geometría para el conjunto de rotación, ¿cuales son las consecuencias dinámicas?

En las dos direcciones existen avances muy interesantes. Por ejemplo, se sabe a partir de los recientes trabajos de LeCalvez y Tal que cierto tipo de segmentos no pueden ser conjunto de rotación, y hay una conjetura debida a Franks y Misiurewicz que asegura la imposibilidad de dos clases de segmentos de ser conjuntos de rotación. Recientemente A. Avila dió un contraejemplo para uno de los casos de esta conjetura. En el otro caso han habido importantes avances. Para el caso con interior no vacío, se sabe que todo convexo con finitos extremales racionales es realizado como conjunto de rotación como prueba Kwapisz, y se conocen ejemplos con numerables extremales debido al mismo autor. Sin embargo no se conocen ejemplos con no numerables extremales: no se sabe si el **disco** se puede realizar como conjunto de rotación. Sobre la segunda pregunta, hay muchos resultados interesantes. Por mencionar alguno, para el caso que el conjunto de rotación tiene interior, se sabe a partir de un trabajo de J. Franks que hay realización de los elementos racionales del mismo por órbitas periódicas del mapa.

En esta sección intentaremos dar una idea de la prueba de este resultado y presentaremos los ejemplos básicos. Comenzamos por ahí. Para ejemplos con conjunto de rotación puntuales tenemos las traslaciones rígidas. Si queremos ejemplos con segmentos, como mencionamos la cosa se pone delicada para algunos casos, aunque es sencillo en otros. Para un segmento de la forma $\{0\} \times [r_1, r_2] = I$ podemos considerar primero

$$F : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad F(x, y) = (x, \phi(x) + y),$$

donde $\phi : [0, 1] \rightarrow [r_1, r_2]$ es continua y sobre con $\phi(0) = \phi(1)$. Luego extendiendo F a \mathbb{R}^2 para inducir un elemento $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tenemos que f tiene un levantado F con $\rho(F) = I$.

Este ejemplo se puede modificar facilmente para que desaparezcan todos los círculos invariantes, salvo $\pi(\{0\} \times \mathbb{R})$ y $\pi(\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R})$. Sin embargo, alguna *pared* de este tipo debe sobrevivir siempre. Esto es consecuencia de los interesantes resultados sobre *desviaciones* obtenidos en sus primeras instancias por P. Dávalos. Para segmentos de la forma $\{\frac{p}{q}\} \times [r_1, r_2]$ se pueden hacer construcciones similares Sin embargo para segmentos $\{\alpha\} \times [r_1, r_2]$, $\alpha \in \mathbb{Q}^c$ la conjetura de Franks-Misiurewicz establece que no habrá realización (en un trabajo reciente se probó que esto es cierto para dinámicas minimales). Los casos con pendiente irracional entre los que se encuentra el contraejemplo de A. Avila son muy interesantes, pero los dejamos de lado para no exceder el tamaño deseado de la exposición.

Para un ejemplo con interior, podemos explicitar rápidamente uno: Comenzamos con $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}$, $F(x, y) = (x, \phi(x) + y)$ con $\phi_1 : [0, 1] \times \mathbb{R}$ siendo cero salvo en $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ y $\phi_1(\frac{1}{2}) = 1$, y la extendemos a un levantado F_1 . Definimos $F_2 : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ análogamente con $F_2(x, y) = (\phi(y) + x, y)$. Tenemos entonces para $F = F_2 \circ F_1$

$$F(0, 0) = (0, 0), F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + (0, 1) \text{ y } F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) + (1, 0),$$

por lo que $(0, 0), (1, 0), (0, 1) \in \rho(F)$ y por lo tanto todo el símplice definido por estos tres puntos está contenido en $\rho(F)$. De todas maneras este ejemplo no resulta ilustrativo de lo que realmente pasa en el caso con interior no vacío: en estos casos siempre existe una especie de herradura como la que introduciomes en el último ejemplo del anillo. Esta herradura admite semiconjugaciones al shift y ve todos los vectores de rotación. Desafiamos al lector a intentar un dibujo para las mismas.

Buscamos ahora mostrar la idea de la prueba del teorema 5.4.1. Comenzamos recordando la métrica de Hausdorff entre conjuntos del plano. Dados dos conjuntos cerrados A y B del plano su distancia Hausdorff $d_H(A, B)$ se define como

$$\inf\{\varepsilon : A \subset B(B, \varepsilon), B \subset B(A, \varepsilon)\}.$$

El espacio de los conjuntos cerrados de \mathbb{R}^2 con esta distancia tiene interesantes propiedades. Mencionamos algunas que nos serán útiles.

1. Para una sucesión de conjuntos compactos y conexos A_n todos contenidos en $B(0, K)$ para alguna constante positiva K , si existe el límite, entonces es compacto y conexo. Además el límite de conjuntos convexos es convexo.
2. Para una sucesión de conjuntos compactos A_n todos contenidos en $B(0, K)$ existe una subsucesión de conjuntos A_{n_k} convergente a un conjunto L .

Si consideramos el cuadrado unidad $I = [0, 1]^2$ es claro que el conjunto de rotación se puede definir utilizando $x_i \in I$ en vez de $x_i \in \mathbb{R}^2$. Surge de esto y del punto 2 de las propiedades para la distancia Hausdorff que si tomamos la sucesión de conjuntos $\left(\frac{F^n(I)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces

$$\rho(F) = \bigcup_{\mathcal{L} = \lim_H \frac{F^{n_k}(I)}{n_k}} \mathcal{L},$$

es decir que el conjunto de rotación es la unión de todos los posibles puntos de acumulación de la sucesión $\left(\frac{F^n(I)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Note el lector que siendo $K = \max\{\|F(x)\| : x \in I\}$ se tiene que todos los elementos de la sucesión están en $B(0, 2K)$.

Los ingredientes para probar el teorema son entonces

(I) $\lim_H \frac{F^{n_k}(I)}{n_k} = \mathcal{L}$ implica \mathcal{L} convexo y (II) existe $\mathcal{L} = \lim_H \frac{F^n(I)}{n}$.

Observe el lector que mediante esto no solo obtenemos el resultado, sino que tenemos la información extra de que $\rho(F) = \lim_H \frac{F^n(I)}{n}$. Nos concentramos en la propiedad (I).

Dadas las propiedades del levantado F , si miramos la familia $\{\text{int}[I+t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$ dada por numerables discos disjuntos y la iteramos n veces, obtenemos una nueva familia de discos dos a dos disjuntos $\{F^n(\text{int}[I+t])\}_{t \in \mathbb{Z}^2} = \{F^n(\text{int}[I]) + t\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$. Es decir, no pueden haber dos elementos distintos de esta última familia que se intersecten. Esto será clave en la prueba de la convexidad.

La proposición que nos da la convexidad es la siguiente. Notamos por $\text{env}[X]$ la envolvente convexa de X en \mathbb{R}^2 .

Proposición 5.4.2. *Se tiene que $d_H(F^n(I), \text{env}(F^n(I))) < 2$.*

Antes de ir a la prueba observe el lector que esto implica que un límite de la forma considerada en (I) debe ser convexo. Por lo tanto resta probar la proposición.

Demostración. Supongamos que para algún n esto no fuera cierto. Entonces debe existir dos puntos $x, y \in F^n(I)$ tales que al considerar el segmento $[x, y]$ existe un punto $p \in [x, y]$ con $d(p, F^n(I)) > 2$. Siendo r la recta que soporta el intervalo $[x, y]$ y dado que $\text{int}[F^n(I)]$ es arcoconexo, podemos probar fácilmente la existencia de un arco simple abierto $\gamma \subset F^n(I)$ con las siguientes propiedades:

1. $\gamma \subset \text{int}[F^n(I)]$
2. el punto inicial γ_i de γ está en la misma componente de $r \setminus B(p, 2)$ que x , y el punto final γ_f en la misma componente de $r \setminus B(p, 2)$ que y
3. γ intersecta solo uno de los dos semiplanos definidos por r que llamamos H .

Sea D el semidisco dado por $B(p, 2) \cap H$. Definiendo la curva de Jordan Γ dada por la concatenación de γ con el segmento $[\gamma_i, \gamma_f]$ invertido, tenemos que D está contenido en la componente acotada que define Γ . Además, dado el tamaño del semidisco D , cualquier punto del espacio z tiene una copia entera \bar{z} dentro de D .

Sea T la traslación entera que lleva γ_i en $\bar{\gamma}_i \in D$. Esta traslación es una función que aumenta la proyección de los puntos sobre el vector normal a r apuntando hacia el semiplano H . Siendo M un punto de máxima altura (medida como se indica) en γ , tenemos que $T(M)$ será un punto de altura mayor que M en $T(\gamma)$ y por lo tanto $T(M)$ está en la componente no acotada de Γ .

Entonces, como $T(\gamma)$ contiene un punto inicial en la componente acotada y otro punto $T(M)$ en la componente no acotada, tenemos que $T(\gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset$, pero dado que la traslación aumenta la altura de todos los puntos, esto implica que $T(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$, lo cual a su vez implica

$$\text{int}[F^n(I)] \cap \text{int}[T(F^n(I))] \neq \emptyset$$

que es imposible. □

Este resultado simple y fundamental, no utiliza la dinámica. Si en vez de iterar por F el cuadrado unidad, elegimos cualquier familia de embaldosados preservados por los enteros, este resultado se mantendrá.

Veamos como probar ahora **(I)**, es decir, siendo $\mathcal{L} = \lim_H \frac{F^{n_k}(I)}{n_k}$ mostrar que $\rho(F) = \mathcal{L}$. La inclusión que hay que ver es $\rho(F) \subset \mathcal{L}$. Para esto, fijemos $y = \lim_j \frac{F^{n_j}(x_j) - x_j}{n_j} \in \mathcal{L}^c$ y fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Por la proposición 5.4.2 sabemos que

$$\mathcal{L} = \lim_H \frac{F^{n_k}(I)}{n_k} = \lim_H \frac{\text{env}[F^{n_k}(I)]}{n_k},$$

y por lo tanto podemos tomar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\text{env}[F^{n_0}(I) - I]}{n_0} \subset B(\mathcal{L}, \varepsilon)$, donde el conjunto resta algebraica es lo que consideramos. Por otra parte, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{F^{n_j}(x_j) - x_j}{n_j} &= \frac{1}{n_j} [(F^{n_0}(y_1) - x_j) + (F^{2n_0}(y_2) - F^{n_0}(y_1)) + \dots \\ &+ (F^{k_j n_0}(y_j) - F^{(y_j-1)n_0}(y_{j-1})) + (F^{r+k_j n_0}(y_{j+1}) - F^{k_j n_0}(y_j))] \end{aligned}$$

donde $n_j = k_j n_0 + r$ con $0 \leq r < n_0$. Multiplicando y diviendo por $k_j n_0$ obtenemos a partir de esto que $\frac{F^{n_j}(x_j) - x_j}{n_j}$ es igual a

$$\begin{aligned} \frac{n_0 k_j}{n_j} \left[\frac{1}{k_j} \frac{F^{n_0}(y_1) - x_j}{n_0} + \frac{1}{k_j} \frac{F^{2n_0}(y_2) - F^{n_0}(y_1)}{n_0} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{k_j} \frac{F^{k_j n_0}(y_j) - F^{(k_j-1)n_0}(y_{j-1})}{n_0} \right] + \frac{F^{r+k_j n_0}(y_{j+1}) - F^{k_j n_0}(y_j)}{n_j} \end{aligned}$$

de donde $\frac{F^{n_j}(x_j) - x_j}{n_j} = \frac{k_j n_0}{n_j} w_j + \varepsilon_j$ con

- $w_j \in \text{env} \left[\frac{F^{n_0}(I) - I}{n_0} \right],$
- ε_j es un vector de norma a lo sumo $r \frac{\max\{\|F(x) - x\| : x \in I\}}{n_j}.$

Luego, tomando límite en j tenemos que $y \in B(\mathcal{L}, \varepsilon)$. Como ε era arbitrario obtenemos $y \in \mathcal{L}$.

Bibliografía

- [1] A. Chenciner. Poincaré and the three-body problem. *Progres in Mathematical Physics*, 67:51–142, 2012.
- [2] K. Ciesielsky. The poincaré-bendixon: from poincaré to the xxi'st century. *Central European Journal of Mathematics*, 10:2110–2128, 2012.
- [3] C. Conley. *Isolated Invariant sets and Morse index*, volume 38. CBMS, 1976.
- [4] A. Delshams. Poincaré, creador de los métodos todavía modernos en las ecuaciones diferenciales y en la mecánica celesea. *Arbor*, 704:669–6680, 2004.
- [5] Maciej Dunajski. Integrable systems. Notes, University of Cambridge, 5 2012. En línea.
- [6] T. Kanamaru. Van der pol oscillator. *Scholarpedia*, 2(1):2202, 2007.
- [7] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge, 1995.
- [8] J. Lewowicz. Expansive homemorphisms of surfaces. *Bol. Soc. Bras. de Math.*, 20:113–133, 1989.
- [9] S. Smale. Finding horseshoes on the beaches of rio. *Mathematical Intelligencer*, 20:39–44, 1998.
- [10] F. Verhulst. *Non-linear differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [11] M Misiurewicz y K Ziemian. Rotation sets for maps of tori. *Journal of the Lond. Mat. Soc.*, (40):490–506, 1989.

Alejandro Passeggi
CMAT
Facultad de Ciencias, UdelaR,
Iguá 4225, Montevideo, Uruguay,
apasseggi@cmat.edu.uy

Luis Piñeyrúa
CMAT
Facultad de Ciencias, UdelaR,
Iguá 4225, Montevideo, Uruguay,