

<b>Nombre:</b>	<b>CI:</b>
----------------	------------

**EXAMEN FINAL- JULIO 2023**

**Ejercicio 1** Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . Sea  $Y = [X]$  la parte entera de  $X$ . Hallar la distribución de  $Y$ . Si  $p = e^{-\lambda}$  ¿ qué distribución resulta?

**Ejercicio 2** Sea  $\{X_n : n \geq 1\}$  una sucesión de variables aleatorias iid, con  $\mathbb{E}(X_1) = 1$ ,  $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$  y  $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$ .

1. Sean

$$Z_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_i^2}}, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

probar que la sucesión  $Z_n$  converge casi seguramente a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

2. Si  $\mathbb{E}(X_1) = 0$  en lugar de 1, o sea

$$\mathbb{E}(X_1) = 0, \quad \mathbb{E}(X_1^2) = 2, \quad \mathbb{E}(X_1^4) < \infty,$$

y  $W_n = \sqrt{n}Z_n$ ,  $n \geq 1$ , hallar el límite en distribución de la sucesión  $W_n$ .

**Ejercicio 3**

Sean  $X_1, \dots, X_{100}$  variables aleatorias iid con densidad

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \mathcal{I}_{(1,+\infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente la probabilidad de

$$\mathbb{P}(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}).$$

Sugerencia: hallar la distribución de  $\log(X)$ .