PRÁCTICA DE LABORATORIO I-04

GRÁFICOS

Una imagen dice mas que mil palabras

OBJETIVOS

- Comprender los criterios que se utilizan para las representaciones gráficas de una data experimental y los métodos cualitativos para su análisis.
- Determinar los parámetros de la recta en una gráfica lineal (pendiente y ordenada en el origen.
- Determinar el error de los parámetros de una recta.
- Determinar cuando conviene utilizar escalas logarítmicas para linealizar una gráfica.
- Aprender a ajustar rectas mediante regresión lineal (mínimos cuadrados).

I. CONSIDERACIONES GENERALES

En las prácticas que hemos realizado hasta ahora se ha abordado el problema de medir una sola cantidad física. La incapacidad de reproducir la medida exactamente y la apreciación finita de los instrumentos llevó a la necesidad de repetir la medida hasta disponer de un conjunto sobre el cual se aplican métodos estadísticos.

En las prácticas siguientes vamos estudiar cómo se comporta una cantidad física al variar otros parámetros; el objetivo es establecer la dependencia funcional, esto es, la relación matemática que mejor describe al fenómeno. De manera recíproca, el interés podría ser también el de verificar experimentalmente un modelo predicho teóricamente o incluso, proponer otra teoría que explica mejor el fenómeno.

En estos casos, la información experimental se pone de manifiesto al representarla de manera *visual* mediante el uso de gráficos. De los mismos se puede deducir la relación matemática que vincule las variables involucradas. También es posible de un gráfico predecir por *interpolación* o por *extrapolación* comportamientos en valores o regímenes no explorados por la experimento mismo.

Hemos determinado en la práctica anterior, la densidad de un cuerpo con su correspondiente error asociado. En el contexto de la presente práctica estaríamos interesados en analizar situaciones que son las mas frecuentes en física, como lo es medir dos o mas cantidades que guardan alguna relación entre sí. Por ejemplo, estudiar cómo sería la variación de la densidad de un cuerpo en función de la temperatura; ésta tendría el rol de variable independiente de la experiencia.

II. CRITERIOS PARA LA ELABORACIÓN DE UN GRÁFICO

La inspección de los datos de una tabla es el punto de partida para la elaboración del correspondiente gráfico. Esto determinará la selección apropiada de las escalas e intervalos para los ejes de las ordenadas y de las abscisas, y el rango que abarcan las cantidades estudiadas. Por lo general se representa la *variable independiente* a lo largo del eje horizontal o *abscisa*; es usual que la variable independiente sea el parámetro de control de la experiencia. En el eje vertical u *ordenada,* se representa la *variable dependiente*.

En la elaboración de un gráfico debemos cuidar algunos detalles:

- En cada eje debe indicarse la cantidad física correspondiente y su unidad de medida. El gráfico tiene que estar acompañado con su respectivo título.
- La curva debe tener un trazado suave y sin quebraduras (Fig. 1), ya que es la representación gráfica de un fenómeno físico. La curva no necesariamente debe pasar por todos los puntos experimentales.

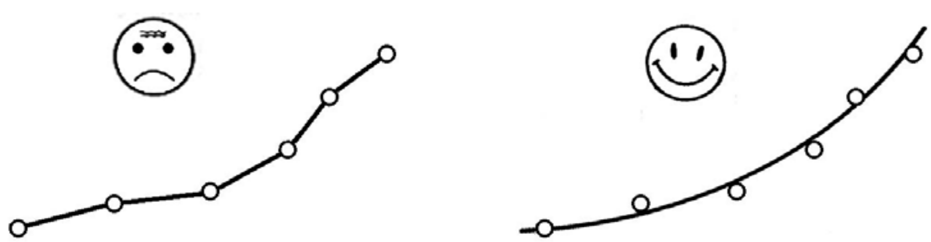
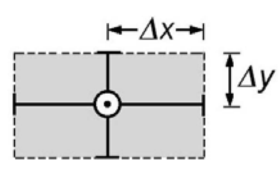


Fig. 1: Trazado de una curva por un conjunto de puntos

- Se debe indicar el error asociado a los puntos experimentales mediante el uso de *barras de error* que acotan la extensión del error alrededor del punto. En algunos casos, los errores pueden ser tan pequeños que son irrepresentables.

Fig. 2: Región de incerteza alrededor de un punto



- La curva debe pasar por la mayoría de las zonas de error, tratando de minimizar sus desviaciones y en lo posible, que los puntos experimentales queden uniformemente distribuidos a ambos lados de la curva.

III. DIFERENTES TIPOS DE GRÁFICOS

Cuando construimos una gráfica, lo primero que salta a la vista es la tendencia que sigue el conjunto de los puntos experimentales. Podría suceder que haya algún punto que no sigue la tendencia global de los demás, en estos casos se debería revisar si el punto ha sido dibujado en el lugar correcto o si es el producto de una medida realizada en forma incorrecta. En las situaciones mas sencillas, los puntos podrían quedar alineados en una recta o seguir un patrón curvilíneo. En el primer caso el análisis es relativamente simple ya que se limita a determinar la pendiente de la recta y su intersección con el eje *y*. En el caso de que la tendencia sea curvilínea, se intenta primero aplicar alguna técnica de linealización de los datos para transformarla en una línea recta.

a) Gráficos lineales (papel milimetrado)

En la figura 3 presentamos el gráfico de una cantidad *y* en función de la cantidad *x,* que utiliza escalas *lineales* en sus dos ejes. En este caso, para hacer la representación a mano se utiliza un *papel milimetrado*.

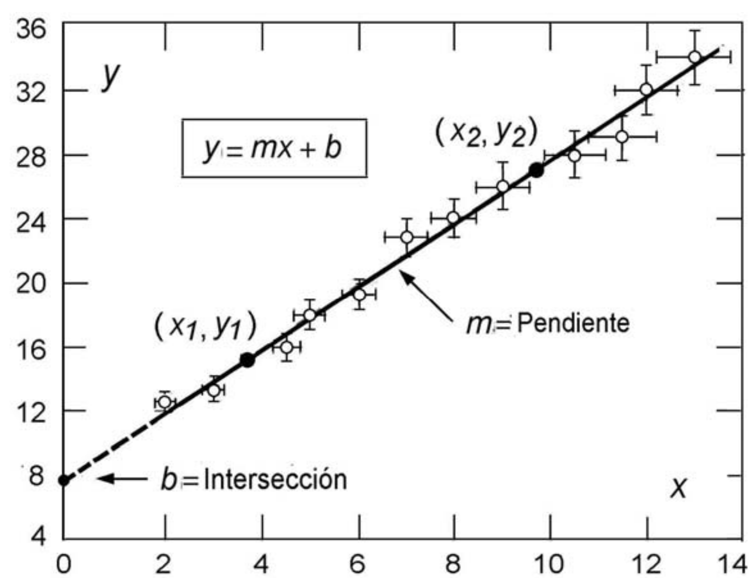


Fig. 3: Gráfico con escalas *lineales* en sus dos ejes.

Una vez representados los puntos experimentales con sus correspondientes barras de error en ambos ejes, determinamos alrededor de cada punto una zona de error (o región de observación) definida por un rectángulo. Note que los tamaños de las barras de error no tienen por qué ser iguales pues las magnitudes de los errores pueden ser diferentes para cada medida experimental.

De la figura 3 podemos ver que la curva descrita por los puntos experimentales es una recta. Es decir, la relación *y = f(x)* entre las variables es una función lineal:

$$y(x) = mx + b$$

Donde *x* es la variable independiente, *y* es la variable dependiente, *m* es la pendiente de la recta y *b* es la intersección o valor de la ordenada cuando la abscisa *x* vale cero. La determinación de la relación funcional entre las variables se reduce a la determinación de las constantes *m* y *b*.

Dado que *b* es la ordenada en el origen, puede ser determinada extrapolando la recta hasta cortar el eje de las ordenadas cuando este último corresponde al cero del eje de las abscisas (línea punteada).

La pendiente *m* se determina tomando dos puntos cualesquiera *de la recta* (no dos puntos experimentales) y evaluando la relación:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Las constantes *m* y *b* que hemos determinado cuentan con sus respectivos errores asociados, dado que está abierta la posibilidad de trazar más de una recta para el conjunto de puntos experimentales.

Estos errores Δm y Δb se pueden determinar trazando las dos rectas extremas de máxima y mínima pendientes que estén dentro de las zonas de error de los puntos experimentales (Fig. 4). Los valores de las constantes *m* y *b*, correspondientes a cada una de estas rectas se obtienen siguiendo el procedimiento antes expuesto.

De esta manera quedan determinados los errores asociados a las constantes:

$$\Delta m = \frac{m_{max} - m_{min}}{2} \qquad \Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2} \qquad (2)$$

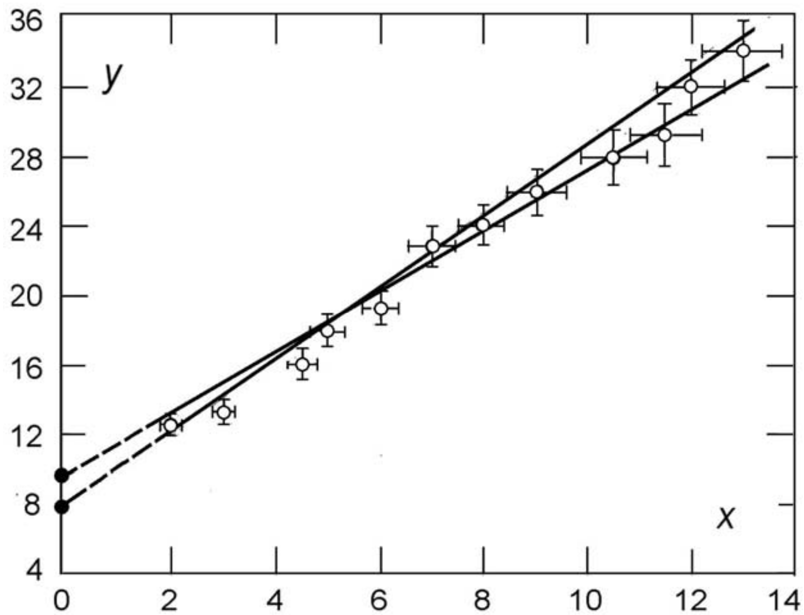


Fig. 4: Rectas de máxima y mínima pendientes para determinar los errores.

b) Gráficos no lineales y su linealización

Cuando la representación gráfica de un conjunto de datos no corresponde a una línea recta, el análisis de la curva para hallar le ecuación empírica que mejor se ajusta a éstos, podría resultar complicado. Existen varias maneras de lograrlo, según sea el caso. Si no disponemos de un modelo hipotético, podríamos probar con algunas funciones de ocurrencia muy común en fenómenos físicos, como lo son la función exponencial y la función potencial. En todo caso, la linealización se efectúa haciendo transformaciones matemáticas de la o las variables medidas.

b) Gráfico de una función potencial: Papel semi-log

Sea una función del tipo exponencial ($y = A\ 10^{Bx}$). Al tomar logaritmos en ambos lados se tiene la ecuación de una recta:

$$log y = log A + Bx$$

Esto sugiere usar una gráfica de $log y$ en función de x (gráfico semi-log).

Consideremos los datos mostrados en la tabla de la figura 5 y su representación en una escala lineal o papel milimetrado.

x	y
0	1.000
1	1.995
2	3.981
3	7.943
4	15.84
5	31.62
6	63.10
7	125.9
8	251.2
9	501.1
10	1000
11	1995
12	3981

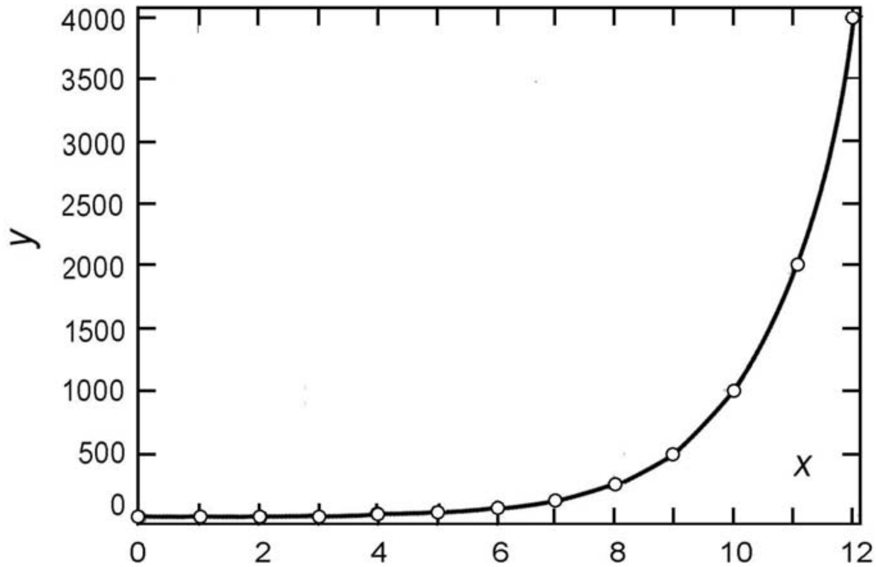


Fig. 5: Tabla de datos y gráfico con escalas *lineales* en sus dos ejes.

La inspección de esta data revela que los valores extremos de la variable dependiente, son y_{min} = 1 y, y_{max} = 3981 y cubren 4 décadas (desde 10^0 hasta 10^4). La figura 6 presenta el resultado de graficar los mismos datos haciendo uso de una escala logarítmica para el eje de las ordenadas y una escala lineal para el eje *x*.

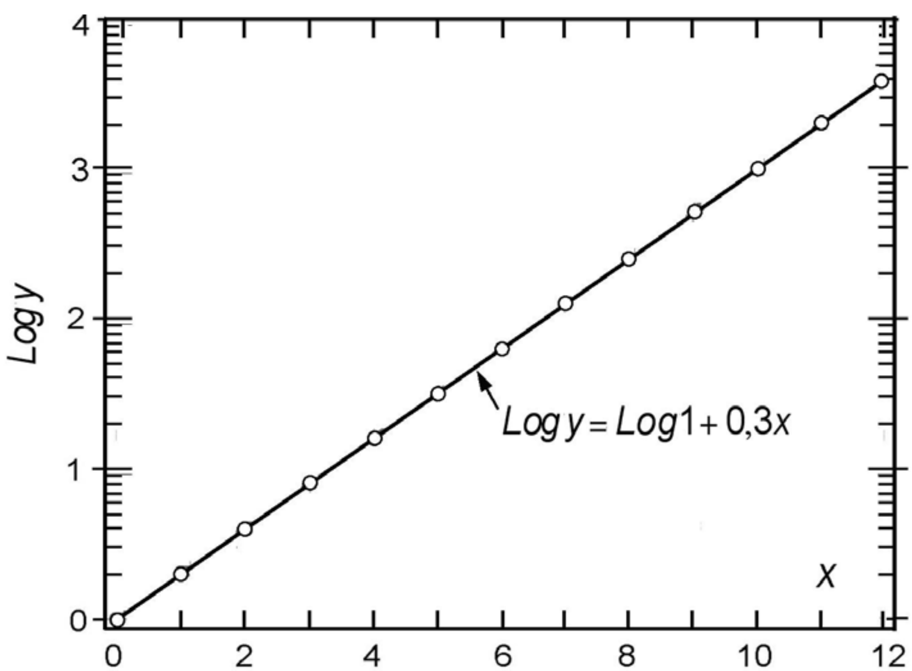


Fig. 6: Gráfico semilogarítmico o semi-log.

El gráfico revela ahora una dependencia lineal entre las variables. Siguiendo los procedimientos descritos y teniendo en cuenta que las ordenadas son ahora el logaritmo de la variable *y*, podemos determinar la ecuación de la recta:

$$Log y = Log 1 + 0{,}3x \qquad (3)$$

Tomando antilogaritmos a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene la función *y = f(x)*:

$$y = 10^{0{,}3x} \qquad (4)$$

c) Gráfico de una función potencial: Papel log-log

Consideremos la forma general de una función potencial: $y = Ax^B$. Al tomar logaritmos a ambos lados se tiene la ecuación de una recta:

$$log y = log A + B log x$$

Lo que sugiere una gráfica de $log y$ en función de $log x$ (gráfico log-log).

Consideremos los datos mostrados en la tabla de la figura 7 y su representación en una escala lineal o papel milimetrado.

x	y
1	10
2	160
3	810
4	2560
5	6250
6	12960
7	24010
8	40960
9	65610
10	100000
11	146410
12	207360

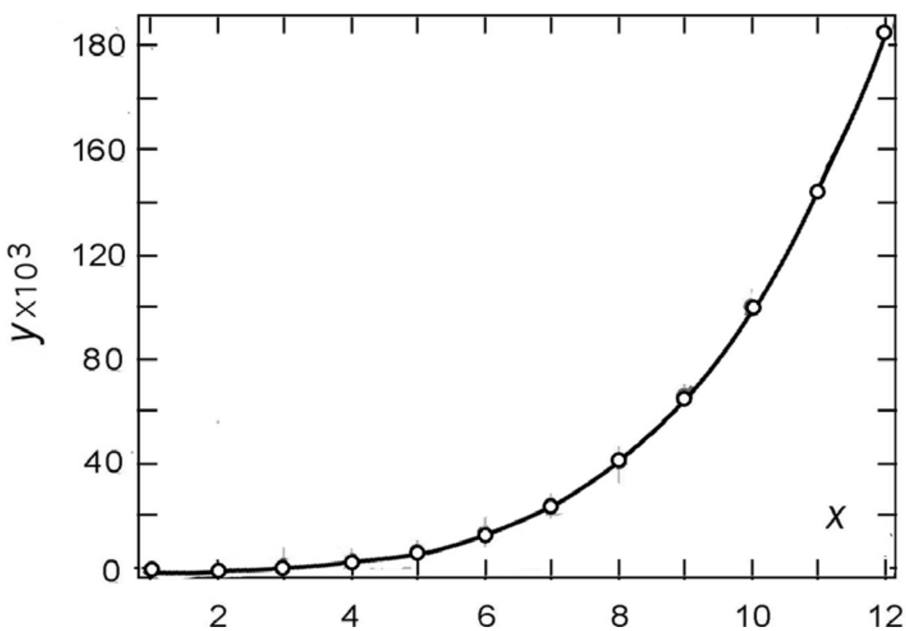


Fig. 7: Tabla de datos y gráfico con escalas *lineales* en sus dos ejes.

A simple vista esta curva parece tener la misma tendencia que la del gráfico de la figura 5. Sin embargo, luego de adoptar escalas logarítmicas en ambos ejes se revelará una dependencia lineal entre las variables *x* e *y* (Fig. 8).

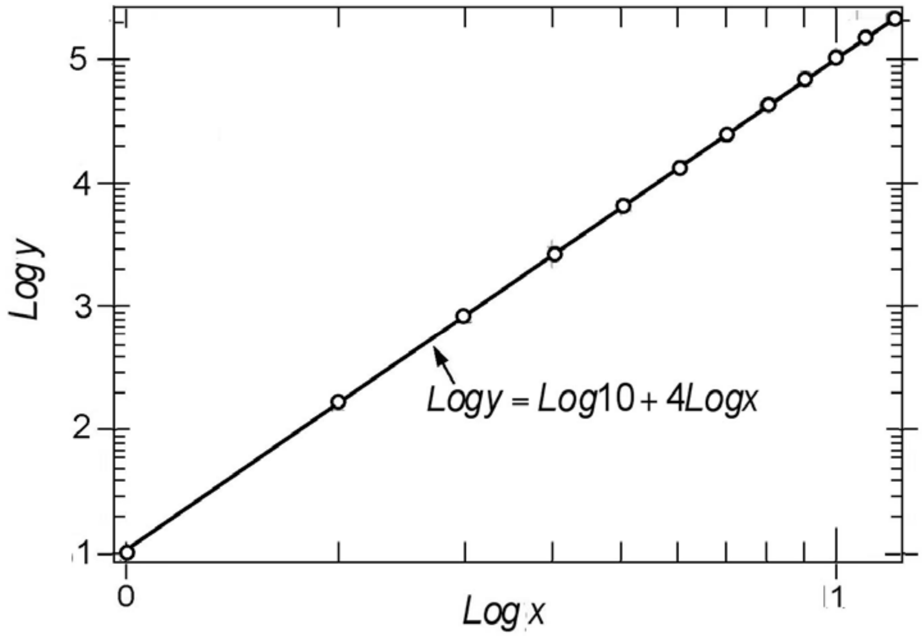


Fig. 8: Gráfico logarítmico log-log.

Usted puede verificar que la recta de la figura 8 obedece a la siguiente relación:

$$Logy = Log10 + 4Logx \tag{5}$$

Tomando antilogaritmos a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene la función, $y = y(x)$:

$$y = 10x^4 \tag{6}$$

Existe una gran variedad de casos donde es conveniente la representación gráfica en escala logarítmica. Su uso presenta varias ventajas, pues permite:

- Graficar información que abarca un amplio rango de valores.
- Revelar relaciones funcionales lineales entre las variables, en caso de que las mismas existan.
- Observar el detalle de comportamientos extremos que las escalas lineales ocultan y que podrían ser de interés especial.

Se suele usar la terminología *ciclos de la escala logarítmica* como sinónimo de décadas o número de órdenes de potencias de diez. Por ejemplo, si medimos distancias que van desde un milímetro hasta diez kilómetros, y la representamos en una escala logarítmica, abarcaríamos 7 décadas (Fig. 9). Podríamos decir que la escala logarítmica es la más *democrática,* ya que expande las regiones correspondientes a valores pequeños, en tanto que comprime las regiones de valores altos. Por ejemplo, el espacio reservado para valores entre 10^{-3} y 10^{-2} es igual que para el intervalo entre 10^3 y 10^4.

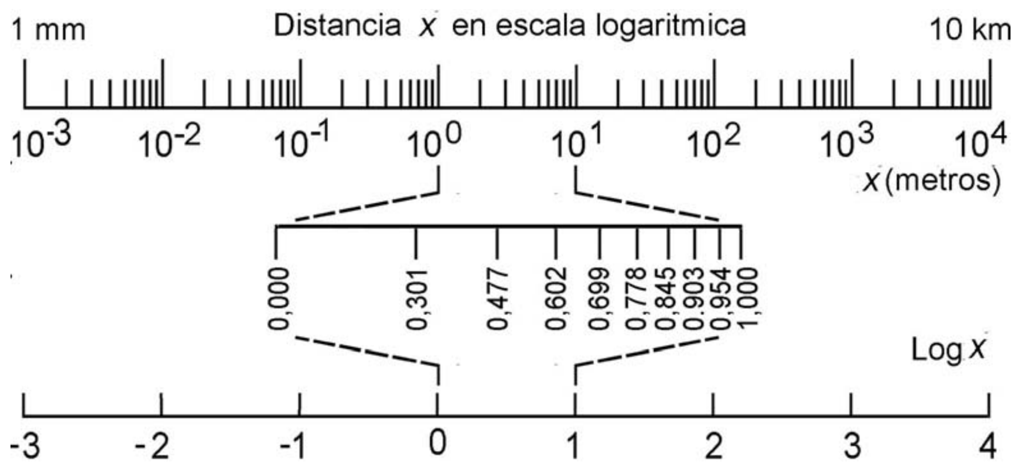


Fig. 9: Representación logarítmica de la distancia *X*

Para construir una gráfica con escalas logarítmicas tenemos tres opciones:

- Se puede emplear un *papel milimetrado*; en este caso usted deberá calcularle el logaritmo a los valores de la variable que se desee graficar.

- Se puede utilizar un *papel log-log* o *semi-log*. En este caso, "el papel se encargará por usted de sacar el logaritmo a los valores de la variable".

- Se puede hacer uso de una computadora y de un programa de análisis de datos que permita cambiar de una escala lineal a una logarítmica.

IV. Linealización de curvas por cambios de variable

Muchas ecuaciones no lineales que encontramos en física se pueden linealizar mediante un cambio apropiado de las variables que se grafican. Considere la siguiente tabla de datos (Fig. 10) que corresponde a mediciones de presión *p* (en atmósferas) en función del volumen *V* (en litros), de un gas a la temperatura ambiente. Podemos ver que la curva trazada se asemeja a una hipérbola:

$$pV = c, \qquad c \text{ es una constante.}$$

p(Atm)	V(mL)
0.843	12,1
1.08	9,0
1,35	8,0
1,81	5,5
2,33	4,4
2,62	4,0
3,48	3,0

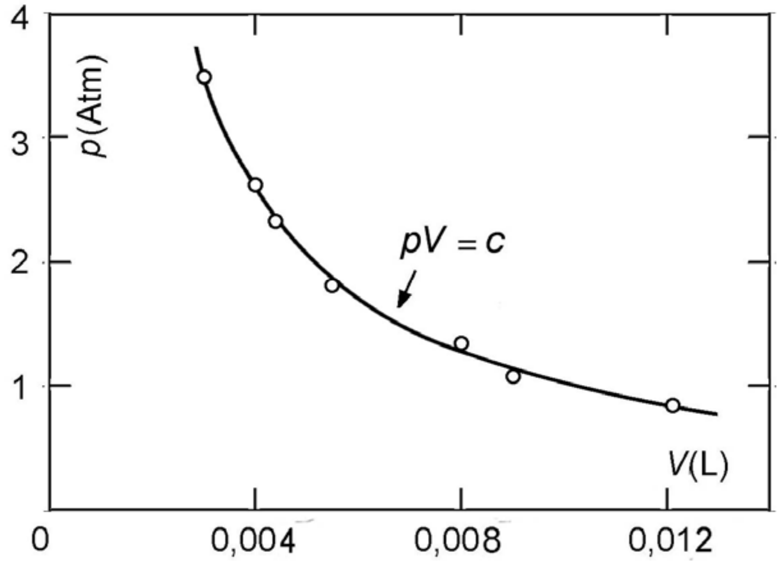


Fig. 10: Presión en función del volumen para un gas

Si ahora escribimos esta ecuación en la forma; $p = c(1/V)$, la misma corresponderá a una línea recta que pasa por el origen. Con la data transformada haremos ahora una segunda gráfica de *p* en función de (*1/V*), ver figura 11.

Se observa que los puntos experimentales se pueden ajustar mediante una línea recta para obtener el valor de la pendiente. Si vamos al modelo teórico, aplicamos la ecuación de estado de un gas ideal, *pV* = *nRT*, siendo *n* el número de moles y *R* la constante universal de los gases, por lo tanto, el valor de la constante *c* obtenido de la pendiente correspondería a: *nRT*.

p(Atm)	$1/V$(L)
0.843	82,6
1.08	111
1,35	125
1,81	182
2,33	227
2,62	250
3,48	333

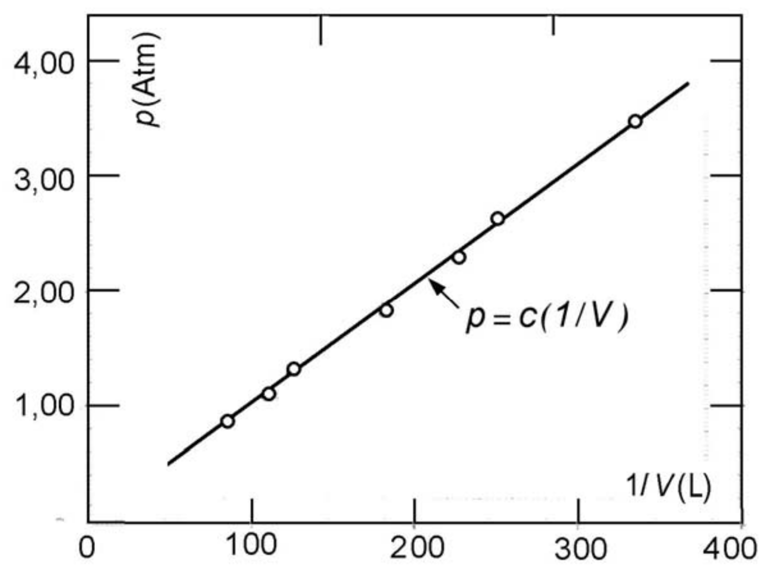


Fig. 11: Presión en función del inverso del volumen

V. AJUSTES DE CURVAS POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Hemos visto el método cualitativo de graficación y algunos criterios para el trazado de la curva que mejor refleje el comportamiento de una data experimental. También vimos la conveniencia de linealizar las curvas para que su análisis resulte sencillo. Los criterios para trazar una curva pueden ser muy subjetivos, ya que si le damos a dos personas el mismo conjunto de datos, lo mas probable es que hagan pasar dos curvas distintas. Surge la pregunta: ¿cuál sería *la curva* que mejor se ajusta a esos datos? Para responder esta pregunta debemos recurrir al ajuste de la misma por métodos numéricos, esto es, a procedimientos mejor fundamentados teóricamente y que requieren del apoyo de herramientas de computación.

Toda curva se puede ajustar por métodos numéricos a un polinomio de grado *n*. Presentaremos a continuación el caso más simple: el ajuste a una función lineal, esto es, el ajuste a una recta que corresponde a un polinomio de grado uno. La técnica se conoce como el método de los *mínimos cuadrados* o método de r*egresión lineal* y se fundamenta en el hecho de que el mejor ajuste se obtiene cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones de la variable dependiente alcanza su valor mínimo.

Para encontrar el valor mínimo de las desviaciones de la variable dependiente se varían ciertos parámetros. En el caso de una recta, los parámetros libres a variar son precisamente la pendiente *m* de la recta y el valor de la intersección *b* de la recta con el eje *y*. Se harán variar *m* y *b*, con el fin de encontrar los valores que correspondan a la recta que mejor se ajuste a los datos experimentales.

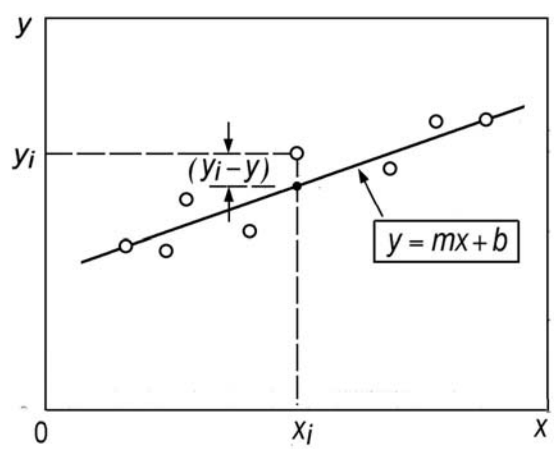


Fig. 12: Recta de mejor ajuste a la data

Consideremos la ecuación teórica que describe a la recta buscada,

$$y^{teo} = mx_i + b \qquad\qquad i = 1, 2, 3,\ldots,N \tag{7}$$

Donde hemos introducido subíndices *i* pues estamos trabajando con un conjunto de *N* puntos discretos. El problema consiste en determinar los valores de *m* y *b* por la vía de minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los datos experimentales, y_i , y los correspondientes a la recta ajustada, y_i^{teo} :

$$S = \sum_{i=1}^{N}(y_i - y_i^{teo})^2 = \sum_{i=1}^{N}[y_i - (mx_i + b)]^2 \tag{8}$$

Igualando a cero las derivadas de *S* con respecto a las variación de *m* y *b*, estamos aplicando la condición de extremos a la función S:

$$\frac{\partial S}{\partial m} = \sum_{i=1}^{N} [-2y_i x_i + 2mx_i^2 + 2bx_i) = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} [-2y_i + 2mx_i + 2b) = 0 \qquad (10)$$

Se puede demostrar por la vía de sacar la segunda derivada que éstas son condiciones de mínimo necesarias y suficientes. De las relaciones 9 y 10 se pueden obtener las expresiones para la pendiente *m* y la intersección *b*:

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad (11)$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad (12)$$

Estas son las expresiones para calcular los valores de los parámetros *m* y *b* de la recta que deben dar el *mejor ajuste* de los datos experimentales.

Los programas comerciales que se utilizan en los computadores personales para el análisis por mínimos cuadrados, incluyen los criterios para revelar *la calidad* del ajuste de los puntos a la recta. La bondad del ajuste lo determina el llamado *coeficiente de correlación*, R^2, que se calcula mediante la expresión:

$$R^2 = \frac{(N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i)^2}{[N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][N\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]} \qquad (13)$$

El *coeficiente de correlación* R^2 puede tomar valores entre 0 y 1, siendo mejor el ajuste cuanto más próximo sea su valor a 1.

Los programas más sofisticados también suelen incluir la posibilidad de introducir la data con sus respectivos errores, lo que permite determinar los errores correspondientes en la pendiente *m* y la intersección *b*.

EJEMPLO 1: Análisis de la data del estiramiento de un Resorte

La data mostrada en la siguiente tabla corresponde a seis mediciones del estiramiento de un resorte que está fijo en un extremo, en función de la masa suspendida en su otro extremo. Sin hacer la gráfica correspondiente, vamos a suponer *a ciegas,* que los puntos se ajustan en una línea recta, y a partir de esta data haremos *a mano* la *regresión lineal*. Para ello hemos calculado las sumatorias pertinentes a los fines de determinar la pendiente *m* y el punto de corte *b*, así como la calidad del ajuste, R^2.

	N	1	2	3	4	5	6	$\sum x_i$ $\sum y_i$	$\sum x_i^2$ $\sum y_i^2$	$\sum x_i y_i$
Masa (g)	x	200	400	500	700	900	1000	3700	$2{,}75\text{x}10^{6}$	$7{,}92\text{x}10^{5}$
Est.(mm)	y	58	120	140	208	252	290	1068	$2{,}28\text{x}10^{5}$	

Después de sustituir estas sumatorias en las expresiones (11) (12) y (13), se obtuvieron los siguientes resultados:

Pendiente: m = 0,285 mm/g Intersección: b = 2,35 mm Coef. Correlación: R^2=0,997

Veamos ahora lo que nos da la computadora. Después de introducir la misma data en una hoja de cálculo y construir la gráfica, se obtuvo el siguiente resultado

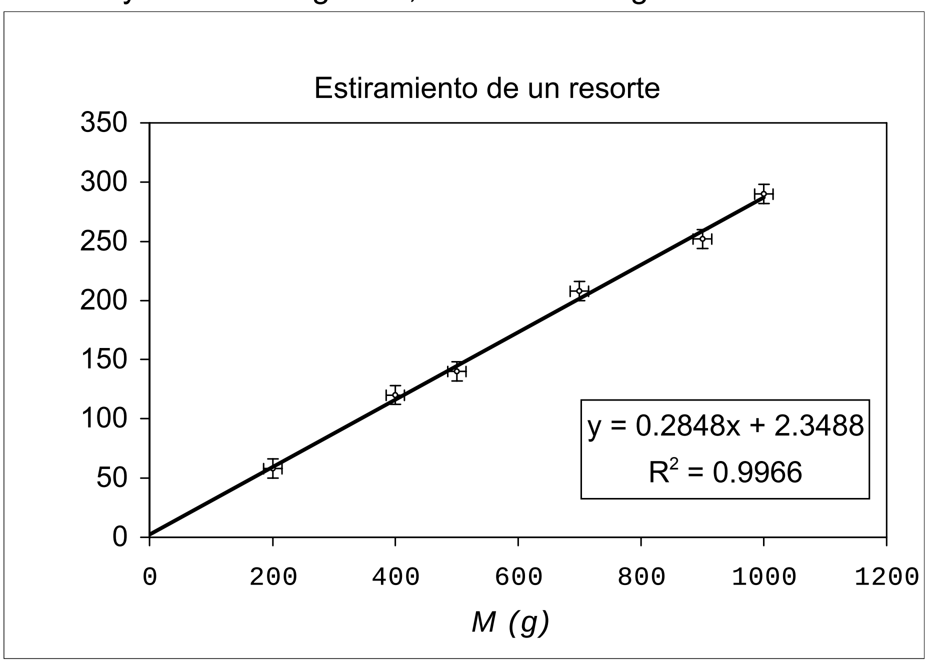


Fig. 13: Estiramiento de un resorte en función de la masa suspendida

Observamos que los valores de los parámetros *m* y *b* del análisis por mínimos cuadrados, dados por la computadora coinciden con los que ya habíamos encontrado. En particular, la cercanía del valor de R^2 a la unidad nos indica que existe una muy buena correlación entre la recta ajustada y la data experimental.

EJEMPLO 2: Análisis de la data de un movimiento en dos dimensiones

Se suelta una esfera desde cierta altura por una rampa, de modo que al abandonar el filo de la mesa con una velocidad horizontal, la esfera sigue hacia el suelo en caída libre. Fijando la altura de caída y observando el punto de impacto sobre una pantalla vertical que se va colocando a distintas distancias *x*, se registra el correspondiente descenso vertical *y*.

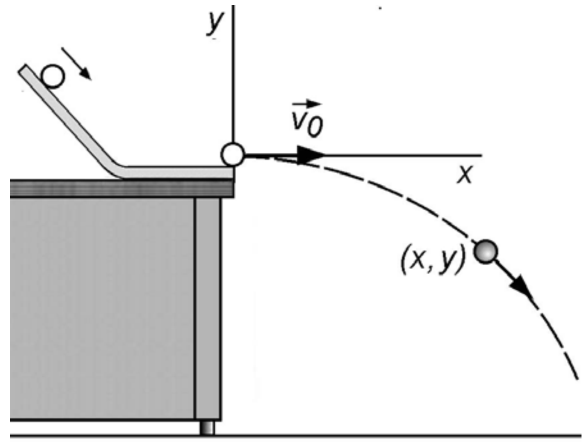


Fig. 14: Movimiento en el plano vertical *x*-*y*

La data obtenida está mostrada en la siguiente tabla, y se desea determinar:

a) La relación funcional $y = f(x)$

b) La velocidad inicial horizontal v_0.

Tabla de datos

x (cm) ±2.0	y(cm) ±2.0
0.0	0.0
20.0	-6.0
23.5	-9.2
26.0	-11.3
28.5	-13.9
31.0	-16.4
33.5	-19.0
36.0	-22.2
38.5	-25.6
41.0	-29.2
43.5	-33.3
46.0	-36.5
48.5	-41.3

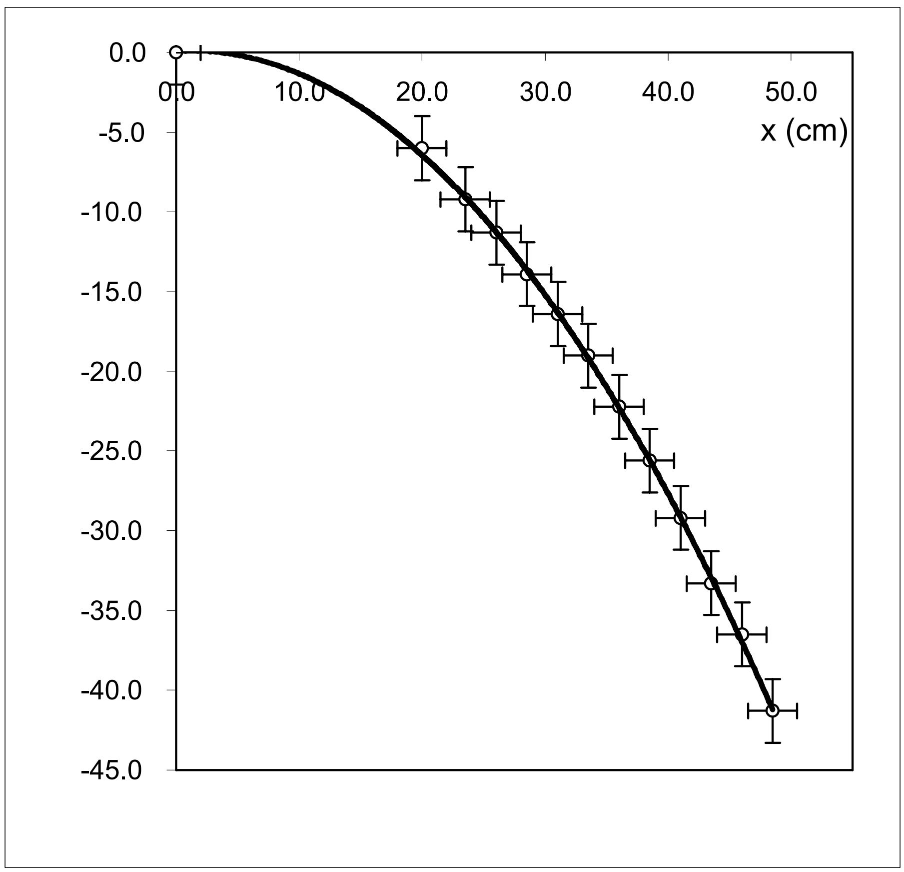


Fig. 15: Gráfico de *y* vs. *x*

a) Para determinar la relación funcional $y = f(x)$, nos guiamos por el modelo teórico basado en las relaciones cinemáticas. Como el movimiento se puede analizar considerando en forma independiente sus componentes horizontal y vertical, la expresión para el desplazamiento vertical *y* es:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0})^2 = (\frac{g}{2v_0^2})x^2$$

Es decir, esperamos que la trayectoria de la esfera tenga la forma de una parábola y para analizar nuestra data podemos suponer una función empírica del tipo potencial $y = Ax^n$. Tomando logaritmos, tenemos:

$$\log y = \log A + n(\log x)$$

Por lo tanto, la pendiente del gráfico (log |y|) vs (log *x)* debe arrojar el valor experimental del exponente "*n*". Haciendo estas transformaciones, construimos la siguiente gráfica:

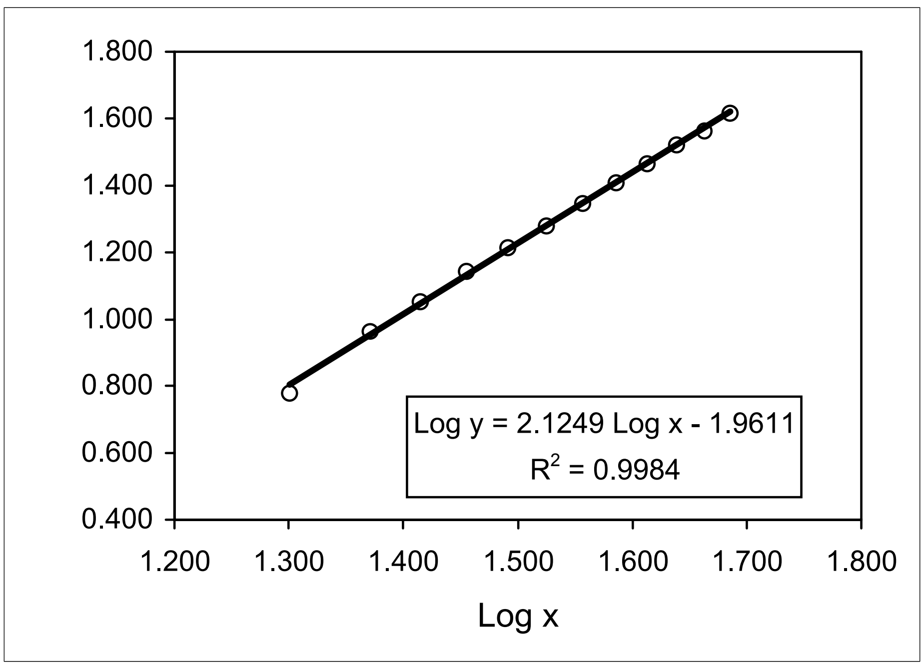


Fig. 16: Gráfico de Log |*y*| vs. *x*

Utilizando una hoja de cálculo, hicimos el análisis de la recta por mínimos cuadrados. Obteniendo de la pendiente el valor del exponente n = (2,12 ± 0,01) Es decir, hemos hallado para el exponente de *x* una diferencia de apenas un 6% respecto al valor teórico n = 2, predicho por las relaciones cinemáticas.

b) Suponiendo el modelo cinemático, la velocidad inicial v_0 de la esfera aparece en el coeficiente de x^2:

$$y = (\frac{g}{2v_0^2})x^2$$

Por lo tanto, para linealizar la curva experimental es conveniente hacer la transformación: $x \rightarrow x^2$, luego graficar y en función de x^2. De esta manera, en la figura siguiente, suponemos que la pendiente de la gráfica equivale a $(g/2v_0^2)$.

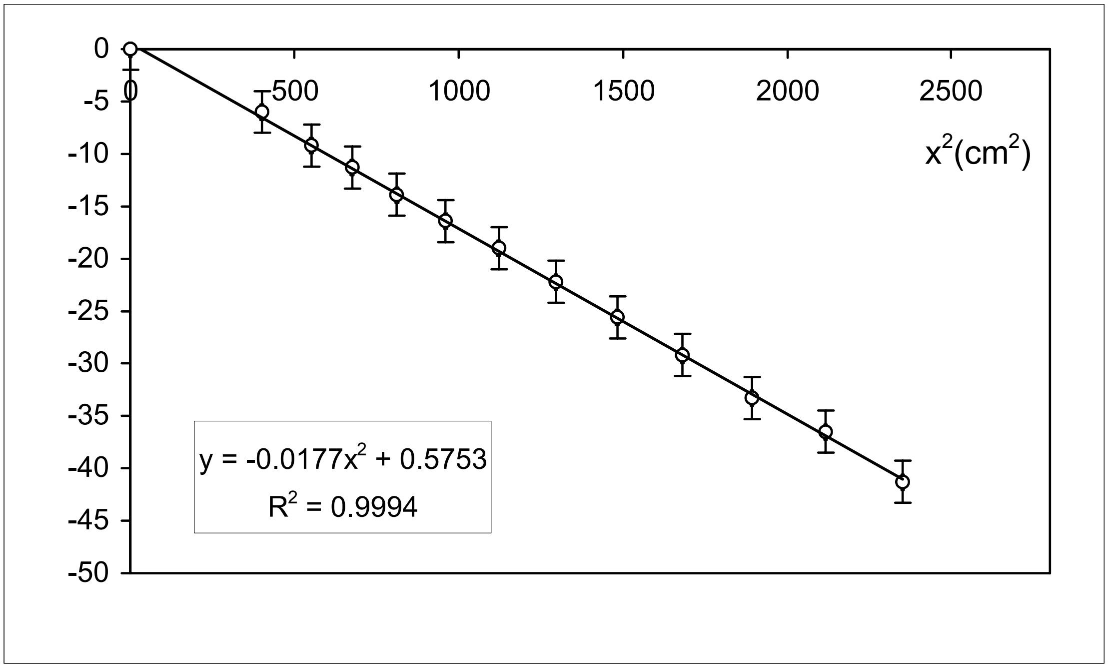


Fig. 17: Gráfico de *y* en función de x^2.

El ajuste por mínimos cuadrados de la computadora arrojó m = (0,018 ± 0,001) cm^{-1}, para la pendiente. Conocida la aceleración de gravedad g = (980 ± 2) cm/s^2, obtuvimos la velocidad inicial de la esfera:

$$\frac{g}{2v_0^2} = 0{,}018\text{cm}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{g}{2m}} = \sqrt{\frac{980\text{cm}/\text{s}^2}{2(0{,}018\text{cm}^{-1})}} = 165\text{cm}/\text{s}$$

Finalmente, haremos un estimado del error relativo de la velocidad v_0 a partir de la propagación de los errores, usamos el método de las derivadas parciales:

$$\frac{\Delta v_0}{v_0} = \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta g}{g}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta m}{m}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{980}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{0{,}001}{0{,}018}\right| = 0{,}03$$

Finalmente, podemos reportar el valor de la velocidad con su error correspondiente:

$$v_0 = (165 \pm 5)\ \text{cm/s} = (1{,}65 \pm 0{,}05)\ \text{m/s}$$

ACTIVIDADES PRELIMINARES

a) Consulte el manual de su calculadora y estudie el procedimiento para ajustar rectas por el método de los mínimos cuadrados. Le será de utilidad en todos los cursos de laboratorio y en su vida profesional.

b) Demuestre que es condición de mínimo suficiente el igualar a cero la primera derivada de la suma de los cuadrados de las desviaciones de la variable dependiente con respecto a *m* y *b*.

c) Realice el despeje de los valores *m* y *b* indicado en la sección que trata de ajustes por mínimos cuadrados.

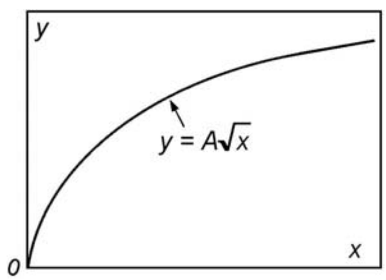
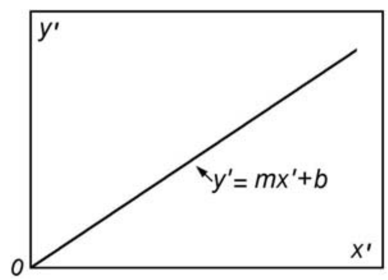
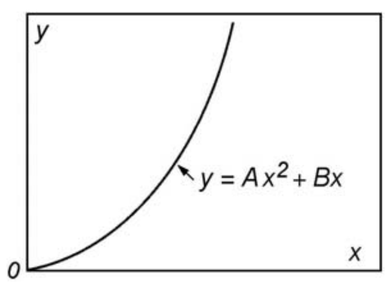
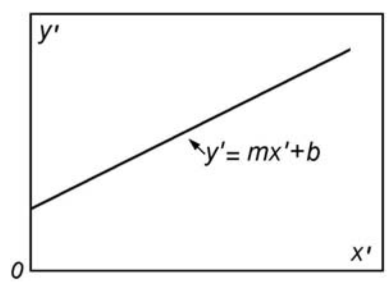
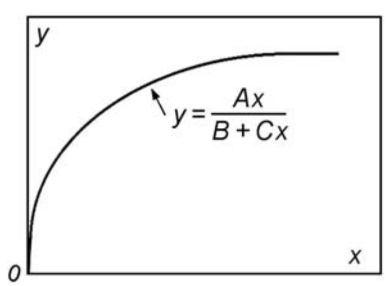
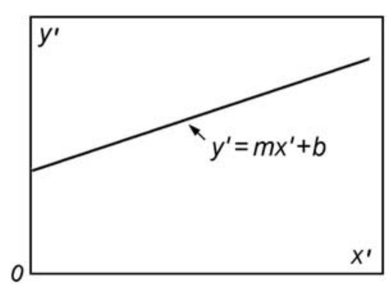
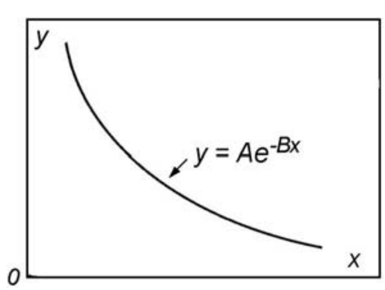
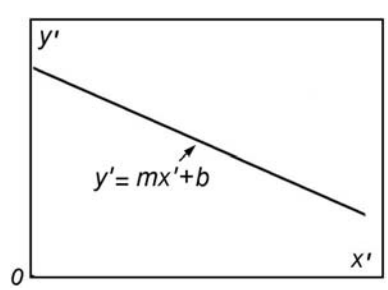
d) Construya (sobre un papel milimetrado) una escala logarítmica de 4 ciclos en la cual la longitud de cada ciclo sea de 4 cm.

e) Inspeccione las tablas de datos correspondientes a la sesión de práctica y determine los ciclos de los papeles semi-logarítmico y logarítmico que deberá traer al laboratorio. También se requerirá de papel milimetrado.

ACTIVIDADES A REALIZAR DURANTE LA SESION DE PRÁCTICA

El profesor hará una breve resumen de los criterios que se utilizan para las representaciones gráficas de una data experimental y los métodos cualitativos para su análisis. *Luego hará una demostración en la computadora sobre la elaboración de gráficos mediante el programa Excel. A continuación damos una selección de ejercicios y actividades, algunas de las cuales podrán ser seleccionadas para realizar durante la sesión de práctica.*

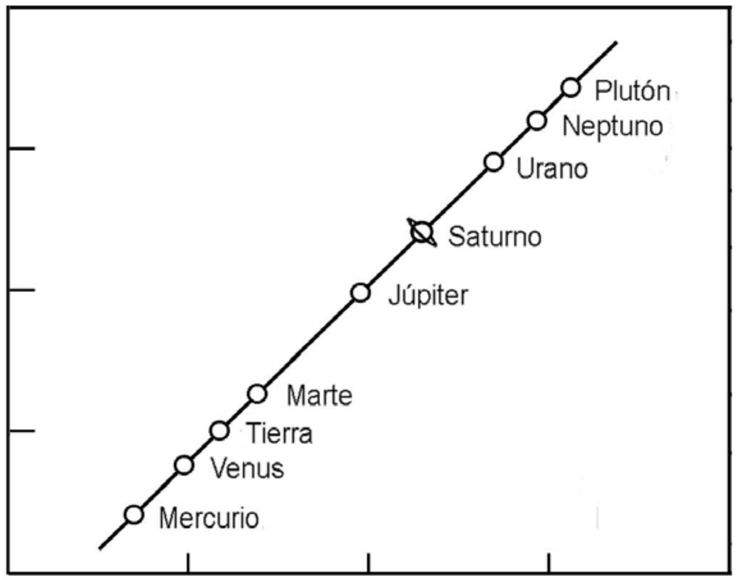
A1. En la siguiente tabla, la primera columna muestra una función no lineal: *y = f(x)* para modelar una data experimental. En la segunda columna se indica el gráfico lineal obtenido, *y' = f(x')*, luego de hacer un cambio de variables. Indique en la tercera columna la transformación utilizada así como las expresiones de la pendiente e intersección de la recta, en términos de las constantes.

Función no-lineal **y = f(x)**	Función lineal *y' = f(x')*	Cambio de variable, Pendiente e intersección
		$y' = ?$ $x' = ?$ $m = ?$ $b = ?$
		$y' = ?$ $x' = ?$ $m = ?$ $b = ?$
		$y' = ?$ $x' = ?$ $m = ?$ $b = ?$
		$y' = ?$ $x' = ?$ $m = ?$ $b = ?$

A2. *<u>Verifiquemos la segunda ley de Kepler</u>.* En 1602, Kepler con los datos astronómicos de Tycho Brahe, pudo establecer que el cuadrado del período de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol. La siguiente tabla muestra para cada planeta, el semieje mayor de la orbita elíptica, *a,* y el correspondiente periodo *T*. Al lado se muestra una gráfica para ilustrar cómo quedaría representada esta tabla de datos después de las transformaciones apropiadas. Utilizando la tabla nos proponemos verificar esta ley.

Sistema Solar

Planeta	Semieje mayor $a(10^{10}\,\mathrm{m})$	Período T(años)
Mercurio	5.79	0.241
Venus	10.8	0.615
Tierra	15.0	1.00
Marte	22.8	1.88
Júpiter	77.8	11.9
Saturno	143	29.5
Urano	287	84.0
Neptuno	450	165
Plutón	590	248



1) En papel milimetrado, haga la gráfica de a^3 en función de T^2. Halle la pendiente.

2) En papel logarítmico, haga la gráfica de log *a* en función de log *T*. Halle la pendiente.

3) Con la relación teórica de la segunda ley de Kepler:

$$a^3 = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)T^2$$

Siendo *M* la masa del Sol y *G* la constante de gravitación universal. Compare los resultados obtenidos en los pasos anteriores ¿Se verifica la tercera ley de Kepler?

4) Utilizando la computadora, inserte los datos de la tabla en una hoja de cálculo y grafique la distancia *a* en función del periodo *T*. Realice el ajuste de tendencia para una función potencial, obtenga la ecuación empírica y compárela con la relación teórica ¿Se verifica la tercera ley de Kepler?.

A3. *<u>Variación lineal de velocidad en función del tiempo</u>*

El conductor de un automóvil ve un obstáculo en la vía y aplica los frenos. En la siguiente tabla se da el registro de la velocidad *v* (m/s) en función del tiempo *t* (s):

t (s)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
v(m/s)	19	16	14	13	10	7,5	5,0	2,4	1,1

Considere que los errores relativos son de 5% para *t* y de 10% para *v*.

a) Obtenga por métodos gráficos los parámetros de la recta con sus errores.

b) Obtenga los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados.

c) Compare los resultados de los apartes previos.

A4. *Variación exponencial de la conductividad eléctrica con la temperatura*

La conductividad eléctrica σ (Ω^{-1}.cm^{-1}) de un cristal semiconductor de germanio dopado con impurezas, aumenta con la temperatura *T (K)* de acuerdo a la siguiente tabla

T (K)	250	267	287	310	337	366	405	452	513
σ (Ω^{-1} cm^{-1})	0.001	0,003	0,009	0,033	0,092	0,319	0,916	3,251	8,831

Los errores relativos en las mediciones de *T* son de 5% y de σ son de 10%.

a) Haga un gráfico de (log σ) vs (1/*T*) utilizando papel milimetrado. No incluya las barras de error en esta oportunidad.

b) Repita el gráfico utilizando papel semi-logarítmico: ahora sí deberá incluir las barras de error, ajustar la recta por el método de los mínimos cuadrados y trazar la recta de acuerdo a los parámetros del ajuste.

c) Determine la ecuación σ*(T)*.

d) Repita los gráficos y ajustes previos haciendo uso de la computadora.

REFERENCIAS

1. *Data Analysis for Scientists and Engineers*, Stuart L. Meyer (John Wiley & Sons, 1975).

2. *An Introduction to Error Analysis*, John R. Taylor, Univ. Science Books, 1997.

3. Se pueden bajar archivos PDF para imprimir, del tipo papel lineal, semi-log y log-log de cualquier número de ciclos en la siguiente página web:

http://incompetech.com/graphpaper/logarithmic/