Matemática 2 - módulo I
Curso 2022

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

2 de agosto de 2023

1. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar un vector columna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tal que

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   b) ¿Es A invertible? Justificar.

   c) Sabiendo que la matriz Y es tal que $YA = (2\ 1\ 1\ 3)$ calcular

$$Y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. El crecimiento de una población está modelado de acuerdo a la siguiente matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular los valores propios de L. ¿Es L diagonalizable? ¿Qué sucederá con la población a largo plazo?

   b) Si la distribución inicial de la población es $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 135 \\ 90 \\ 40 \end{pmatrix}$, ¿cuál será la población total dentro de dos períodos?

   c) Calcular el porcentaje límite de cada clase con respecto a la población total.

Solución

1. a) Debemos resolver el sistema

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} ② - 2① \\ -2① \\ -① \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4x_3 + 2x_4 = -4 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -10x_3 = -4 \rightarrow \boxed{x_3 = \frac{2}{5}} \quad \boxed{x_4 = -\frac{6}{5}} \quad \boxed{x_2 = -\frac{2}{5}} \quad \boxed{x_1 = -\frac{3}{5}}$$

b) Como el sistema de la parte a) es C.D. se tiene que A es invertible.

Además, de la escalerización tenemos que

$$\det(A) = 1 \times 1 \times (-4) \times \frac{5}{2} = -10 \neq 0.$$

c) $$Y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = Y(AX) = (YA)X = (2 \ 1 \ 1 \ 3) \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 2/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} = -\frac{24}{5}.$$

2. a) $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 1/9 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + \frac{4}{9}\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - \frac{4}{9}\right) =$$

$$= -\lambda\left(\lambda - \frac{4}{3}\right)\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)$$

valores propios: $-\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}$.

L es diagonalizable porque tiene tres valores propios distintos.

$\lambda_1 = \frac{4}{3} > 1$ y es estrictamente dominante

$\Rightarrow$ la población tiende a crecer exponencialmente.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 135 \\ 90 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 495 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 555 \\ 55 \\ 5 \end{pmatrix}$

Población total $= 615$.

c) $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{x_2^{(k)}}{x_1^{(k)}} = \dfrac{b_1}{\lambda_1} = \dfrac{1}{12}$, $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{x_3^{(k)}}{x_1^{(k)}} = \dfrac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} = \dfrac{1}{48}$

$$100 = a + \frac{a}{12} + \frac{a}{48} = \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{48}\right) a = \frac{53}{48} a$$

$\Rightarrow \quad a \approx 90\,\% \qquad b \approx 8\,\% \qquad c \approx 2\,\%$