Teorema de Cubrimiento de Vitali:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible con $m(E) < \infty$

Un cubrimiento de Vitali de E es una familia $\mathcal{F} = \{I_\alpha\}_\alpha$ de intervalos abiertos con la propiedad de que $\forall x \in E$, si $\mathcal{F}_x = \{I \in \mathcal{F} : x \in I\}$ entonces
$$\begin{cases} \inf\{|I| : I \in \mathcal{F}_x\} = 0. \\ \mathcal{F}_x \neq \emptyset. \end{cases}$$

(Notación: Si $I = (a,b) \Rightarrow |I| = b-a$)

Teorema: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible con $m(E) < \infty$ y $\mathcal{F} = \{I_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento de Vitali $\Rightarrow \exists\, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ subfamilia numerable dos a dos disjuntos tq $m(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0$. Además, dado $\varepsilon > 0$ se puede elegir tq $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) < m(E) + \varepsilon$.

dem: Sea $U \supseteq E$ abierto tq $m(U) < m(E) + \varepsilon < \infty$. (regularidad de m)

Tirando intervalos de $\mathcal{F}$, podemos suponer que todos están contenidos en U (y seguirán siendo un cubrimiento de Vitali). La segunda condición del teorema será entonces automática.

Como $m(U) < \infty$, tenemos que $a_0 = \sup\{|I| : I \in \mathcal{F}\} < \infty$

Sea I_0 tq $|I_0| > a_0/2$. Si $E \subseteq \overline{I_0}$ terminamos, si no,

Definimos $\mathcal{F}_1 = \{I \in \mathcal{F} : \overline{I} \cap \overline{I_0} = \emptyset\}$ disjunto de I_0.

Sea $a_1 = \sup\{|I| : I \in \mathcal{F}_1\} \leq a_0$ y $I_1 \in \mathcal{F}_1$ tq $|I_1| > a_1/2$.

Si $E \subseteq \overline{I_0} \cup \overline{I_1}$ terminamos, sino, definimos

$\mathcal{F}_2 = \{ I \in \mathcal{F}_1 \,/\, I \cap (\bar{I}_0 \cup \bar{I}_1) = \emptyset \}$ y $a_2 = \sup\{|I| : I \in \mathcal{F}_2\} \leq a_1$

y elegimos $I_2 \in \mathcal{F}_2 \,/\, |I_2| > \frac{a_2}{2}$.

Inductivamente, si $\mathcal{F}_{n+1} = \{ I \in \mathcal{F}_n \mid I \cap (\bar{I}_0 \cup \dots \cup \bar{I}_n) = \emptyset \}$

y $a_{n+1} = \sup\{|I| : I \in \mathcal{F}_{n+1}\} \leq a_n$

elegimos $I_{n+1} \in \mathcal{F}_{n+1} \,/\, |I_{n+1}| > \frac{a_{n+1}}{2}$. Si $E \subseteq \bar{I}_0 \cup \dots \cup \bar{I}_{n+1}$

terminamos, sino seguimos.

Si el proceso termina $\Rightarrow$ OK (pues los bordes son union finita de puntos y es todo lo que puede haber en $E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i$)

Si continua indefinidamente, afirmamos que $\{I_j\}_{j=0}^{\infty}$ funciona.

Son disj. 2 a 2 por elección.

$\boxed{\text{Af 1: } a_n \to 0 \text{ y } \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| < \infty}$

dem: Como I_j son disj 2 a 2 y $\bigcup_{j=0}^{\infty} I_j \subseteq U$ tenemos

$\sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \leq m(U) < \infty$. (esto implica $|I_j| \to 0 \Rightarrow a_j$ tb.) ☐

$\boxed{\text{Af 2: Dado } x \in E \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} \bar{I}_j \text{ y } N > 0,\ \exists\, n > N \text{ tq } d(x, I_n) < 5|I_n|}$

dem: Si no fuese así, $d(x, I_n) \geq 5|I_n|$ $\forall n > n_0$ para un cierto n_0. ~~Pero entonces~~ Entonces $d(x, I_n) \geq \frac{5 a_n}{2}$

Si I es un intervalo alrededor de x que está en $\mathcal{F}_{n_0}$ (existe pues $x \notin \bigcup_{j=0}^{n_0} \bar{I}_j$), entonces, $|I| < a_{n_0}$, pero como $d(x, I_{n_0+1}) > \frac{5 a_{n_0}}{2}$

Tenemos entonces que $I \cap \overline{I_{n_0+1}} = \emptyset$

$\Rightarrow I \in \mathcal{F}_{n_0+1}$. Inductivamente vemos que

$I \in \mathcal{F}_n$ $\forall n$. Pero eso es absurdo, pues entonces tendría

que valer que $|I| < a_n$ $\forall n$ y $a_n \to 0$

$\blacksquare$

Ahora, sea $C = E \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} \overline{I_j}$ y $N > 0$.

Por lo visto,

$$C \subseteq \bigcup_{j=N}^{\infty} (15) I_j$$

donde $15 I_j$ denota la homotecia de razón 15 desde el centro de I_j

$$\Rightarrow m(C) \leq \sum_{j=N}^{\infty} 15 \, |I_j| = 15 \sum_{j=N}^{\infty} |I_j| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Esto completa la prueba del Teorema.