Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2023

Práctico 3

1. Sea $B{:=}\{(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2{:}\,|z_1|\leq|z_2|\}$. Mostrar que B es balanceado pero su interior no lo es.

2. Sean p y q seminormas en el espacio vectorial X. Los asertos siguientes son equivalentes:

   a) $p \leq q$. *b*) $B_q(0,1) \subseteq B_p(0,1)$. *c*) $\bar{B}_q(0,1) \subseteq \bar{B}_p(0,1)$. *d*) $B_q(0,1) \subseteq \bar{B}_p(0,1)$.

3. Sean p una seminorma en el espacio vectorial topológico (X, τ). Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

   a) p es continua. *b*) $B_p(0,1)$ es abierto. *c*) $0 \in B_p(0,1)^\circ$.
   d) $0 \in (\bar{B}_p(0,1))^\circ$. *e*) p es continua en 0.

   Cada una de las afirmaciones anteriores es equivalente también a la siguiente: existe una seminorma continua q en X tal que $p \leq q$.

4. Sean X e Y espacios vectoriales topológicos y $T : X \to Y$ lineal. Probar que, si Y de Hausdorff, entonces T es continua siempre que $\ker T$ sea cerrado y $\dim T(X) < \infty$. En particular si $\ker T$ es cerrado y $\dim(X) < \infty$ o $\dim(Y) < \infty$, entonces T es continua.

5. Sea $0 < p < 1$. Probar que todo subespacio de codimensión finita es denso en $L^p(0,1)$.

6. Sean Y y Z subespacios vectoriales del espacio vectorial topológico de Hausdorff X, tales que $Y \cap Z = 0$ y $X = Y + Z$ (es decir: X es la suma directa algebraica de Y y Z). Se dice que Y y Z son *complementarios topológicos* en X si el mapa $Y \times Z \to X$ tal que $(y, z) \mapsto y + z$ es un isomorfismo topológico, donde se considera $Y \times Z$ con la topología producto (observar que la condición equivale a que el mapa en cuestión sea abierto).

   Sea P la proyección de X sobre Y a lo largo de Z, es decir, $P(y + z) = y$ $\forall x = y + z$ con $y \in Y$, $z \in Z$. Probar que:

   a) Y y Z son complementarios topológicos si y sólo si P es continua.
   b) si Y y Z son complementarios topológicos, entonces Y y Z son cerrados, y X/Y es isomorfo topológicamente a Z, y X/Z lo es a Y (por lo tanto todos los complementarios topológicos de Y son isomorfos topológicamente entre sí).
   c) Probar que, si X es de Hausdorff e Y es un subespacio cerrado de codimensión finita, entonces Y admite un complementario topológico.

7. Sean $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)$ el espacio de las funciones test en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, y $q : \mathcal{D} \to [0, \infty)$ una seminorma. Diremos que q es admisible si es continua con respecto a la topología del límite inductivo τ_i en $\mathcal{D}$. Probar que:

   a) q es admisible si y sólo si para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ existen $N \in \mathbb{Z}^+$ y $C \geq 0$ tales que $q(\phi) \leq C p_N(\phi)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}_m$.

b) las siguientes son seminormas admisibles en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:
   - $\phi \mapsto \|\phi\|_\xi := \|\xi\phi\|_\infty$, donde $\xi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es una función continua.
   - $\phi \mapsto \|\phi\| := \sum_{k=1}^{\infty} |\phi^{(k)}(k)|$

c) el conjunto $\mathscr{C}$ de seminormas admisibles en $\mathcal{D}$ es un cono (es decir $ap + bq \in \mathscr{C}$ $\forall a, b \geq 0$ y $p, q \in \mathscr{C}$) tal que si $q_1, q_2 \in \mathscr{C}$, entonces $\max\{q_1, q_2\} \in \mathscr{C}$. Mostrar además que si $q \in \mathscr{C}$ y α es un multiíndice, entonces q_α, tal que $q_\alpha(\phi) := q(D_\alpha \phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{D}$, también está en $\mathscr{C}$.

8. Probar que los operadores diferenciales $D_\alpha : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ son continuos. Probar también que, si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $M_f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ es la multiplicación por f, es decir $M_f(\phi) = f\phi$ $\forall \phi \in \mathcal{D}$, entonces M_f es continua. Mostrar que las afirmaciones anteriores se mantienen válidas si se sustituye $\mathcal{D}$ por $C^\infty(\Omega)$.

9. Probar que la topología en $\mathcal{D}(\Omega)$ heredada de la definida para $C^\infty(\Omega)$ en el Ejercicio 9 del Práctico 1 es estrictamente más débil que la que $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene como límite inductivo de la sucesión $\{\mathcal{D}_n(\Omega)\}_{n\geq 1}$.

10. Sea Λ una distribución en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ tal que $\Lambda(\phi) \geq 0$ $\forall \phi \in \mathcal{D}$ tal que $\phi \geq 0$. Probar que Λ es una medida de Radon. ¿Se puede expresar la distribución δ' como diferencia de dos distribuciones positivas?

11. Si $f \in L^1(\delta < |t| < \infty)$ $\forall \delta > 0$, se define su *integral valor principal* como
$$PV \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt := \lim_{\delta \to 0} \Big(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \Big) f(t)dt,$$
supuesto existente dicho límite. Para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sea $\Lambda(\phi) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \log|t|\, dt$. Demostrar que $\Lambda'(\phi) = PV \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{dt}{t}$ y $\Lambda''(\phi) = -PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t^2} dt$.

12. *Distribuciones periódicas.* Se considera $\mathcal{P} := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \phi(t + 2\pi) = \phi(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ con la familia de seminormas dadas por $p_k(\phi) := \|\phi^{(k)}\|_\infty$, y también el espacio vectorial $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) := \{c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n||n|^k < \infty, \forall k \geq 1\}$ con la familia de seminormas q_k dadas por $q_k(c) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n||n|^k$.

   a) Probar que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ son espacios de Fréchet.

   b) Dada $\phi \in \mathcal{P}$, se define su transformada de Fourier $\hat{\phi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ como $\hat{\phi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{-int} dt$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Probar que $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

   c) Probar que $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, tal que $\mathcal{F}(\phi) := \hat{\phi}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos.

   d) Los elementos del espacio dual $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ se llaman distribuciones periódicas. Mostrar que si $\psi \in \mathcal{P}$ y $\Lambda_\psi(\phi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\phi(t) dt$ entonces $\Lambda_\psi \in \mathcal{P}'$.

   e) Si $\Lambda \in \mathcal{P}'$ se define su transformada de Fourier $\hat{\Lambda} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ como $\hat{\Lambda}(n) := \Lambda(e_{-n})$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, donde $e_n(t) = e^{int}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Notar que $\hat{\Lambda}_\psi = \hat{\psi}$ $\forall \psi \in \mathcal{P}$. Para $\phi \in \mathcal{P}$ y $\Lambda \in \mathcal{P}'$, considerar las respectivas series de Fourier $S_n(\phi) := \sum_{|k|\leq n} \hat{\phi}(k) e_k$ y $S_n(\phi) := \sum_{|k|\leq n} \hat{\Lambda}(k) e_k$. Probar que se tiene $S_n(\phi) \xrightarrow{\mathcal{P}} \phi$ y $S_n(\Lambda) \xrightarrow{\mathcal{P}'} \Lambda$. Deducir que $\Lambda(\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\Lambda}(n) \hat{\phi}(-n)$.