Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2023

Práctico 4

1. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Si $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, probar que $\overline{S}^{w} = \overline{B}(0,1)$.

2. En los siguientes casos averiguar si el subespacio M del espacio normado X es un hiperplano cerrado, y en caso afirmativo hallar $\varphi \in X'$ tal que $M = \ker \varphi$:

   a) $X = c$ (sucesiones convergentes), $M = c_0$ (sucesiones convergentes a 0).
   b) $X = \ell^1$, $M = \{x \in \ell^1 : \sum_{n=2}^{\infty} x_n = 2x_1\}$.
   c) $X = C[0,2]$, $M = \{x \in C[0,2] : x(1) = x(2)\}$.
   d) $X = C[-1,1]$, $M = \{x \in C[-1,1] : \int_0^1 x(t)dt = \int_{-1}^1 x(t)dt\}$.

3. Considérese el espacio $(\mathbb{R}^n, \| \|_p)$, con $p \in [1,\infty]$.

   a) Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lineal, calcular $\|\varphi\|$.
   b) Sea Y el subespacio generado por k vectores de la base canónica, con $1 \leq k < n$, y supongamos que φ_0 es una funcional lineal definida en Y. Calcular todas las extensiones de Hahn-Banach de φ_0 a todo $\mathbb{R}^n$.

4. Probar que en un espacio localmente convexo de Hausdorff todo subespacio de dimensión finita tiene un complementario topológico.

5. *Límites de Banach.*

   a) Sean $p : X \to \mathbb{R}$ una funcional sublineal, y $Z := \{z \in X : p(z) = 0\}$. Supóngase que Y es un subespacio vectorial de X contenido en Z, y sea $\pi : X \to X/Y$ la proyección. Mostrar que existe una única funcional sublineal $\bar{p} : X/Y \to \mathbb{R}$ tal que $p = \bar{p} \circ \pi$.
   b) Sea $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ el espacio de Banach de las sucesiones reales acotadas (o sea que $\|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|$). Probar que existe una funcional lineal continua $\varphi : \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tal que

   $$\liminf_n x(n) \leq \varphi(x) \leq \limsup x(n).$$

   (sugerencia: notar que si φ existe, entonces $\varphi(x) = \lim_n x(n)$ si $x \in c$; considerar $p(x) = \limsup_n x(n)$).

6. ¿Existe una medida μ sobre $[0,1]$ tal que $\int_0^1 p d\mu = p'(0)$ para todo polinomio de grado menor o igual a n? ¿Y para todo polinomio p?

7. *Conjuntos anuladores y preanuladores, polares y prepolares.* Sean X un espacio vectorial topológico, X' su espacio dual, $A \subseteq X$, y $F \subseteq X'$. Se definen los siguientes conjuntos:

   $$A^\perp = \{f \in X' : f(a) = 0, \forall a \in A\}, \quad A^\circ = \{f \in X' : |f(a)| \leq 1, \forall a \in A\},$$

   $$^\perp F = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in F\}, \quad ^\circ F = \{x \in X : |f(x)| \leq 1, \forall f \in F\}.$$

   $A^\perp$ se llama conjunto anulador de A, y A° se llama conjunto polar de A. $^\perp F$ se llama conjunto preanulador de F, y $^\circ F$ se llama conjunto prepolar de F.

a) Probar que A° es convexo y balanceado, que $A^\perp$ es un subespacio vectorial de X^*, y que ambos son w^*–cerrados.

b) Probar que ${}^\circ F$ es convexo y balanceado, que ${}^\perp F$ es un subespacio vectorial de X, y que ambos son w–cerrados.

c) Probar que si A es un subespacio de X, entonces $A^\circ = A^\perp$. Establecer un resultado análogo para preanuladores y prepolares.

d) Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $A^\perp \supseteq B^\perp$ y $A^\circ \supseteq B^\circ$. ¿Qué sucede en el caso de preanuladores y prepolares?

e) Si $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, entonces $(\alpha A)^\circ = \alpha^{-1} A^\circ$. ¿Qué sucede para preanuladores?

f) Probar que $A \subseteq {}^\circ(A^\circ)$, y que $F \subseteq ({}^\circ F)^\circ$.

g) Probar que $A^\circ = ({}^\circ(A^\circ))^\circ$, y que ${}^\circ F = {}^\circ(({}^\circ F)^\circ)$.

8. *Teorema bipolar.* Sean X un espacio localmente convexo, y $A \subseteq X$. Entonces ${}^\circ(A^\circ) = \overline{A_{ec}}$, la envolvente convexa, equilibrada, y cerrada de A. Deducir que si $F \subseteq X'$, entonces $({}^\circ F)^\circ = \overline{F_{ec}}^{w^*}$.

9. Sea $X = L^2[-1,1]$, con respecto a la medida de Lebesgue. Para cada escalar α sea E_α el conjunto de las funciones x continuas sobre $[-1,1]$ tales que $f(0) = \alpha$. Demostrar que cada E_α es convexo y denso en X. Demostrar que si $\alpha \neq \beta$, entonces E_α y E_β son convexos disjuntos que no pueden separarse por ninguna funcional lineal continua φ sobre X (sugerencia: ¿qué es $\varphi(E_\alpha)$?).

10. Sean X un espacio localmente convexo y M un subespacio cerrado de X. En los espacios que siguen se consideran las topologías w^* y las topologías cocientes correspondientes.

    a) Probar que el mapa $\rho : X'/M^\perp \to M'$ dado por $\rho(\phi) := \phi|_M$ es un isomorfismo lineal y un homeomorfismo y que, si X es normado, entonces ρ es también una isometría (si M es un subespacio del espacio normado X, en X/M se considera la seminorma cociente: $\|x + M\| = d(x, M) := \operatorname{ínf}\{\|x - y\| : y \in M\}$; es fácil ver que dicha seminorma es una norma si y sólo si M es cerrado en X).

    b) Sea $\pi_M : X \to X/M$ la proyección. Probar que $\kappa : (X/M)' \to M^\perp$, dada por $\kappa(\phi) = \phi \circ \pi_M$, es un isomorfismo lineal y un homeomorfismo y que, si X es normado, entonces κ es también una isometría.

11. En los siguientes casos, calcular $\|\varphi\|$ para la funcional dada en el espacio normado X:

    a) $X = \ell^2$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n}$.

    b) $X = c_0$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n^2}$.

    c) $X = \ell^p$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{N^{1/q}}$ ($N \in \mathbb{Z}^+$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

    d) $X = \ell^1$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty x_{2n-1} - 3x_{2n}$.