Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2023

Práctico 6

1. Sean $a = (a_n)$ y $b = (b_n)$, donde $a_n := (\frac{i}{2})^n$ y $b_n = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{2})^n$. Probar que $a, b \in \ell^2$, y calcular $\langle a, b\rangle$.

2. *a*) Mostrar que si $(H_0, \langle\,,\rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces las operaciones y el producto interno de H_0 se extienden por continuidad a su completación, H, y que con dichas extensiones H es un espacio de Hilbert.

   b) Sean $\langle\,,\rangle : K \times K \to \mathbb{F}$ un semiproducto interno, y $N := \{k \in K : \langle k, k\rangle = 0\}$. Probar que N es un subespacio vectorial de K, y que K/N es un espacio prehilbertiano con $\langle k + N, k' + N\rangle_{K/N} := \langle k, k'\rangle$.

3. Mostrar que la norma del supremo en $C([a, b])$ no proviene de un producto interno.

4. *El cubo de Hilbert.* Sea C el conjunto de vectores $x = (x_n)$ en el espacio de Hilbert real ℓ^2 tales que $|x_n| \leq \frac{1}{n}$ para cada n. Mostrar que C es convexo y compacto y, para cada $x \in \ell^2$, hallar el elemento del cubo de Hilbert cuya distancia a x es mínima.

5. En el espacio de Banach $\big(C([0, 1]), \|\ \|_\infty\big)$ se considera el conjunto C formado por las funciones f que verifican
$$\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1.$$
   Probar que C es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $C([0, 1])$ que no contiene elementos de norma mínima.

6. Probar que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$ la funcional lineal $\varphi_\lambda : \ell^2 \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} x_n\lambda^n$ es continua, y calcular su norma.

7. Sean H un espacio de Hilbert y $a \in H$, y supongamos que K es un subespacio cerrado de H. Demostrar que $\text{mín}\{\|x - a\| : x \in K\} = \text{máx}\{|\langle a, y\rangle| : y \in K^\perp, \|y\| = 1\}$.

8. Calcular $\text{mín}_{a,b,c}\{\int_{-1}^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt\}$ y obtener $\text{máx} \int_{-1}^1 g(t)t^3 dt$, donde g está sometida a las condiciones $\int_{-1}^1 g(t)dt = \int_{-1}^1 tg(t)dt = \int_{-1}^1 t^2 g(t)dt = 0$, y $\int_{-1}^1 |g(t)|^2 dt = 1$.

9. *Espacios de Hilbert de núcleos reproductores.* Dado un conjunto X, se dice que H es un espacio de Hilbert de un núcleo reproductor (rkhs) sobre X si:

   - H es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(X, \mathbb{F}) := \{f : X \to \mathbb{F}\}$.
   - H está munido de un producto interno con el cual es un espacio de Hilbert.
   - Para cada $x \in X$, la funcional $\mathsf{ev}_x : H \to \mathbb{F}$, tal que $\mathsf{ev}_x(f) = f(x)$, es continua.

   Probar que si H es un rkhs sobre X, entonces:

   a) Existe un mapa $k^H : X \times X \to \mathbb{F}$ tal que para toda $f \in H$ y todo $x \in X$ se tiene $f(x) = \langle f, k_x^H\rangle$, donde $k_x^H \in H$ está definido como $k_x^H(y) = k^H(y, x)$.

b) El mapa k^H dado por la parte anterior -que es llamado el núcleo reproductor de H- es definido positivo, es decir, para todos $x_1, \ldots, x_n \in X$, la matriz $(k^H(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ es semi-definida positiva. Deducir que $k^H(y,x) = \overline{k^H(x,y)}$ y $k^H(x,x) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.

Recíprocamente, demostrar que si $k : X \times X \to \mathbb{F}$ es definido positivo, entonces existe un único espacio de Hilbert H_k de núcleo reproductor k sobre X. Mostrar que $H \mapsto k^H$ y $k \mapsto H_k$ son inversas entre sí (sugerencia: sea $H_0 := \text{span}\{k_x : x \in X\}$; mostrar que hay un único semi-producto interno $\langle , \rangle$ en H_0 tal que $\langle k_x, k_y \rangle = k(x,y)$ $\forall x, y \in X$, y luego acudir al Ejercicio 2).

10. *Funciones de Haar*. Si n es un entero positivo, existen números naturales m y j, únicos, tales que $n = 2^m + j$, con $0 \leq j < 2^n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define $h_n = \chi_{(0,1)}$ si $n = 0$, y $h_n = 2^{m/2}\chi_{(\frac{j}{2^m}, \frac{2j+1}{2^{m+1}})} - 2^{m/2}\chi_{(\frac{2j+1}{2^{m+1}}, \frac{j+1}{2^m})}$, si $n = 2^m + j$, con $0 \leq j < 2^m$. Las funciones h_n se llaman funciones de Haar. También se usa poner $h_{m,j}$ en lugar de h_n.

    a) Dibujar las primeras ocho funciones de Haar.
    b) Probar que, si $h := \chi_{(0,\frac{1}{2})} - \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, entonces $h_{m,j}(t) = 2^{m/2}h(2^m t - j)$, $\forall m, j$.
    c) Probar que $(h_n)_{n \geq 0}$ es una base ortonormal de $L^2(0,1)$.

11. Dada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ se define $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$. Se dice que ψ es una *wavelet* si la familia $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. En ese caso se define la transformada wavelet $W : L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ como $Wf(j,k) := \langle f, \psi_{j,k} \rangle$.

    a) Probar que $h := -\chi_{[0,1/2)} + \chi_{[1/2,1)}$ es una wavelet (la wavelet de Haar).
    b) Calcular la transformada wavelet de $\chi_{[0,1)}$ en relación a la wavelet de Haar, e investigar las convergencias en $L^2(\mathbb{R})$, puntual y uniforme de $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}^2} W\chi_{[0,1)}(j,k)h_{j,k}$ a $\chi_{[0,1)}$.

12. Sea $S \in B(\ell^2)$ el shift unilateral: $S(e_n) = e_{n+1}$, $\forall n \geq 0$. Calcular S^*, $S^n S^{*^n}$ y $S^{*^n} S^n$, $\forall n \geq 0$.

13. *Análisis multi-resolución*. Un análisis multi-resolución ortogonal en $L^2(\mathbb{R})$, con función de escala φ, es una colección $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ tal que:

    - $V_j \subseteq V_{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$, y $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.
    - $f \in V_f \iff Df \in V_{j+1}$, donde $Df(x) = f(2x)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$.
    - $\varphi \in V_0$, y $(T^k\varphi)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o. V_0, donde $Tf(x) = f(x-k)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$.

    a) Calcular DT, TD, D^* y T^*, donde D y T son los operadores definidos arriba.
    b) Hallar una base ortonormal de V_j.
    c) Sea $W_j := V_{j+1} \ominus V_j$, es decir, $W_j = V_j^\perp \cap V_{j+1}$ (y por lo tanto $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$). Demostrar que $L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$.
    d) Probar que $\chi_{[0,1)}$ es la función de escala de un análisis multi-resolución $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, y describir cada V_j. Hallar una base ortonormal de W_j (sugerencia: notar que la wavelet de Haar h -dada en el Ejercicio 11- y todas sus trasladadas, están en W_0).