Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre de 2020

Práctico 6

1. Expresar cada permutación siguiente como producto de ciclos disjuntos y calcular su orden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (123)(45)(16789)(15).$$

2. En $\mathcal{S}_n$ calcular $(xa)(xb)(xa)$. Probar que $\mathcal{S}_n$ está generado por cada uno de los siguientes conjuntos

$$\{(12),(13),\ \ldots,(1n)\}; \qquad \{(12),(23),\ \ldots,(n-1,n)\}; \qquad \{(12),(123\cdots n)\};$$
$$\{(ab),(ab\cdots)\},\ \text{siendo } a\neq b\in\{1,2,\ldots,n\} \text{ arbitrarios y } (ab\ \cdots) \text{ un } n\text{-ciclo.}$$

3. Probar que si $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ son ciclos disjuntos, entonces $|\sigma_1\cdots\sigma_r| = \operatorname{mcm}\{|\sigma_1|,\ldots,|\sigma_r|\}$.
Deducir que si p es primo y σ es un p-ciclo, entonces σ^l es un p-ciclo, para todo $l=1,\cdots,p-1$.

4. *a*) Probar que si p es primo, entonces $\mathcal{S}_p$ está generado por $\{(ab),\ (123\cdots p)\}$, siendo (ab) arbitaria.
   b) Probar que (13) y (1234) no generan a $\mathcal{S}_4$. *Sugerencia:* recordar el ejercicio 2 del Práctico 2.

5. *a*) Probar que el orden del centralizador del r-ciclo $(12\cdots r)\in\mathcal{S}_n$ es $r(n-r)!$.
   b) Probar que $\sigma\in\mathcal{S}_n$ conmuta con $(12\cdots r)$ si y solo si $\sigma=(12\cdots r)^i\tau$, para algún entero i y alguna permutación τ que deja fijos $1,2,\ldots,r$.
   c) Calcular el número de r-ciclos de $\mathcal{S}_n$.

6. Si n es un entero positivo, entonces el *número de particiones de* n es

$$p(n)=\#\{(a_1,\ldots,a_l):\ a_1+\cdots+a_l=n,\ a_1\geq\cdots\geq a_l\geq 1,\ l=1,\ldots,n\}.$$

   a) Probar que la cantidad de clases de conjugación de $\mathcal{S}_n$ es $p(n)$.
   b) Hallar la cantidad de clases de conjugación de $\mathcal{S}_5$, un representante de cada clase y la cantidad de elementos de cada clase.

7. Probar que un subgrupo de índice 2 de $\mathcal{S}_n$ necesariamente contiene a todos los 3-ciclos de $\mathcal{S}_n$.
Deducir que el grupo alternado A_n es el único subgrupo de $\mathcal{S}_n$ de índice 2.

8. Probar que A_4 no contiene subgrupos de orden 6.

9. Probar que $N=\{\mathrm{id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ es un subgrupo normal de $\mathcal{S}_4$ contenido en A_4. Deducir que A_4 no es simple. Probar $A_4/N\simeq\mathbb{Z}_3$ y $\mathcal{S}_4/N\simeq\mathcal{S}_3$.

Los siguientes ejercicios son optativos.

10. Sea $\sigma\in\mathcal{S}_n$, $\sigma\neq\mathrm{id}$ y $n\geq 3$. Probar que existe $\tau\in\mathcal{S}_n$ tal que $\tau\sigma\tau^{-1}\neq\sigma$.
Sug.: escribir $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_r$, siendo $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ ciclos disjuntos. Si $r\geq 2$ y $\sigma_1=(a\cdots)$ y $\sigma_2=(bc\cdots)$, tomar $\tau=(abc)$; en el otro caso discutir según $|\sigma|\geq 3$ o $|\sigma|=2$ y tomar τ una trasposición adecuada.
Concluir $Z(\mathcal{S}_n)=\{\mathrm{id}\}$ e $\mathrm{Int}(\mathcal{S}_n)\simeq\mathcal{S}_n$, para todo $n\geq 3$. (¿Qué sucede si $n=2$?)

11. Se considera $\mathcal{S}_n$ con $n\geq 4$.
   a) Probar que el número de elementos de $\mathcal{S}_n$ que conmutan con $(12)(34)$ es $8(n-4)!$.
   b) Hallar la cantidad de permutaciones de la forma $\sigma\tau$, siendo $\sigma,\tau\in\mathcal{S}_n$ trasposiciones disjuntas.