Actividad 6: Intersección y suma de subespacios. Subespacio generado.

1. **Subespacio generado.** En cada caso, hallar el subespacio de V generado por el conjunto X. En los casos de $V = \mathbb{R}^3$, interpretar geométricamente.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, con la estructura usual. $X = \{(1, 2, 3)\}$,
   b) $V = \mathbb{R}^3$, con la estructura usual. $X = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$,
   c) $V = \mathbb{R}^3$, con la estructura usual. $X = \{(1, 2, 3), (-3, -6, -9)\}$,
   d) $V = \mathbb{R}^3$, con la estructura usual. $X = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$,
   e) $V = \mathbb{R}^3$, con la estructura usual. $X = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$,
   f) $V = \mathbb{R}^3$, con la estructura usual. $X = Ox \cup Oy$ (la unión del eje Ox y el eje Oy),
   g) $V = \mathbb{R}[t]$, con la estructura usual. $X = \{x^2\}$,
   h) $V = \mathbb{R}[t]$, con la estructura usual. $X = \{x, x^2\}$,
   i) $V = \mathbb{R}[t]$, con la estructura usual. $X = \{1, x, \cdots, x^n\}$,
   j) $V = \mathbb{R}[t]$, con la estructura usual. X el conjunto de los polinomios con término independiente entero par.

2. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que si el espacio generado por X es todo $\mathbb{R}^3$, entonces $\#X \geq 3$.

3. Hallar $S \cap T$ y $S + T$ en cada caso, inspeccionar previamente que S y T sean subespacios de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.
   (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
   (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.

4. Considerar la siguiente afirmación (A) para dos subespacios S, T de V:

   $$\text{(A) } \forall s, s' \in S, t, t' \in T : s + t = s' + t' \text{ implica } s = s', t = t'.$$

   Probar que S y T verifican (A) si y sólo si $S \cap T = \{0\}$.

5. Probar que W_1, W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^4$. Calcular su intersección y probar que su suma es $\mathbb{R}^4$:
   $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x, 0, z, 0) \in R^4\}$, $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$.

6. Sea V el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Consideremos las funciones pares y las impares:

   $$P = \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$$
   $$I = \{f \in V \mid f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$$

   Probar que P e I son subespacios, que $V = P + I$ y que $P \cap I = \{0\}$.

7. Hallar las sumas de los subespacios S y T de V en cada caso:

   a) $V = \mathbb{R}^6$, $S = \{(x, y, z, 0, 0, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $T = \langle\{(0, 0, 0, 1, 0, 2)\}\rangle$, *b*) V y S como en la parte anterior $T = \langle\{(0,0,1,0,0,2)\}\rangle$,

c) V el espacio de los polinomios $\mathbb{R}[x]$, $S = \mathbb{R}_2[x]$, T el subespacio generado por $\{x^3 + 2x^5\}$,

d) V y S como en la parte anterior, $T = x^2 + 2x^5$.

8. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $S_1, S_2 \subset V$ dos subespacios, generador respectivamente por los conjuntos A_1 y A_2.

   a) ¿$S_1 + S_2$ está generado por $A_1 \cup A_2$?

   b) ¿$S_1 \cap S_2$ está generado por $A_1 \cap A_2$?

9. Consideramos dos subespacios del $\mathbb{R}$ espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = c, b = d \right\} \text{ y } S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : d = 0, a = b + c \right\}$$

   calcular $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.