Ejercicio 1.

(a) El desplazamiento $y(x,t)$ de la cuerda lo podemos escribir como la suma de dos ondas, una que viaja en sentido positivo del eje x y otra en el sentido negativo:

$$y(x,t) = [Ae^{-ikx} + Be^{ikx}]e^{i\omega t}$$

En el extremo $x = 0$ la condición es de borde fijo.

$$y(0,t) = [A + B]e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$\Rightarrow y(x,t) = A\left[e^{-ikx} - e^{ikx}\right]e^{i\omega t} = -2iA\sin(kx)\,e^{i\omega t}$$

La fuerza f en cualquier punto de la cuerda está dado por:

$$f = \left|\vec{T}\right|\frac{\partial y}{\partial x} = -2ikA\left|\vec{T}\right|\cos(kx)\,e^{i\omega t}$$

donde $\left|\vec{T}\right|$ es el módulo de la tensión en la cuerda. En el punto medio $x = L/2$ tenemos:

$$-2ikA\left|\vec{T}\right|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{i\,F_0}{2k\left|\vec{T}\right|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

La velocidad v en cualquier punto de la cuerda está dada por:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = 2A\omega\sin(kx)\,e^{i\omega t} = \frac{iF_0\omega}{k\left|\vec{T}\right|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}\sin\,(kx)e^{i\omega t}$$

Por lo tanto, la impedancia mecánica en el punto medio vale:

$$Z_m\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{L}{2}\right)}{v\left(\frac{L}{2}\right)} = \frac{k\left|\vec{T}\right|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)F_0e^{i\omega t}}{iF_0\omega\sin\left(\frac{kL}{2}\right)e^{i\omega t}} = -\frac{i\rho c}{\tan\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

Donde hemos usado $\left|\vec{T}\right| = \rho c^2$ y $c = \omega/k$.

(b) El desplazamiento en cualquier punto de la cuerda está dado por:

$$y(x,t) = \frac{F_0}{k\left|\vec{T}\right|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}\sin(kx)\,e^{i\omega t}$$

Por lo tanto, la amplitud del desplazamiento en el punto medio está dado por:

$$y\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{F_0}{k\left|\vec{T}\right|}\tan\left(\frac{kL}{2}\right)$$

(c) Si la frecuencia del forzante coincide con alguna de las frecuencias de los modos normales tenemos:

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

con $n = 1,2,3,\ldots$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \tan\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \pm\infty & si\ n\ impar \\ 0\ si\ n\ par \end{cases}$$

En estas condiciones, el punto medio o bien es un nodo o un antinodo del modo normal correspondiente. En el caso del antinodo, el forzante introduce energía en un sistema cerrado que no tiene pérdidas, y como consecuencia la amplitud se vuelve infinita. Obviamente este resultado no es físicamente posible y es consecuencia de asumir un sistema lineal, cerrado (que las ondas no se "escapan" en los bordes) y sin pérdidas.

Ejercicio 2.

(a) La presión acústica de una onda esférica la podemos expresar como:

$$P'(r,t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

En virtud de la ecuación de Euler

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P'$$

tenemos:

$$i\omega\rho_0 \vec{v} = -\left[-\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right] A e^{i(\omega t - kr)} \hat{e}_r = \left[ik + \frac{1}{r}\right] \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{ik}{i\omega\rho_0}\left[1 - \frac{i}{kr}\right]\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{e}_r = \frac{1}{\rho_0 c}\left[1 - \frac{i}{kr}\right]\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{e}_r$$

A una cierta distancia r_0 de la fuente, la amplitud de la presión P_0 vale

$$P_0 = \frac{A}{r_0}$$

mientras que la amplitud de la velocidad vale

$$v_0 = \frac{P_0}{\rho_0 c}\left[1 + \left(\frac{1}{kr_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left[1 + \left(\frac{1}{kr_0}\right)^2\right] = \left(\frac{\rho_0 v_0 c}{P_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{kr_0} = \left[\left(\frac{\rho_0 v_0 c}{P_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{\rho_0 v_0 c}{P_0}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}$$

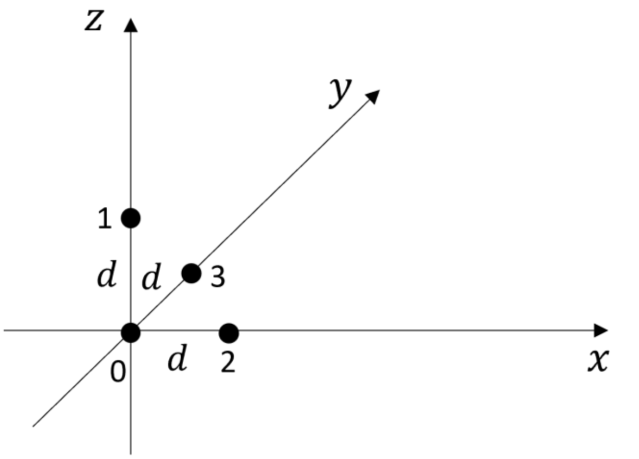
En aire tenemos $\rho_0 = 1{,}2\ kg/m^3$ y $c = 340\ m/s$. Además, sabemos que la frecuencia de la onda es $f_0 = 100\ Hz$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f_0}{c} = 1{,}484\ m^{-1}$$

A esa distancia tenemos $P_0 = 2\ Pa$ y $v_0 = 1{,}0 \times 10^{-2}\ m/s$. Sustituyendo estos valores en la ecuación para r_0 encontramos:

$$r_0 \cong 0{,}30\ m$$

(b) Saber la dirección de propagación de la onda en el punto r_0 es equivalente a encontrar la posición de la fuente. Del resultado anterior sabemos que la fuente se encuentra en la superficie de una esfera de radio r_0 centrada en el punto de medida. Una posibilidad para hallar la posición de la fuente es medir la amplitud de la presión acústica y la velocidad particular en tres puntos vecinos a r_0, a una distancia d de él y perpendiculares entre sí como se muestra en la figura.



Con el mismo procedimiento del punto anterior podemos hallar la distancia r_1, r_2, r_3 de la fuente a los puntos 1, 2 y 3 respectivamente. En un sistema de coordenadas con origen en r_0, es posible determinar unívocamente la posición (x_f, y_f, z_f) de la fuente pues cumple con las siguientes ecuaciones:

$$x_f^2 + y_f^2 + z_f^2 = r_0^2$$

$$x_f^2 + y_f^2 + \left(z_f - d\right)^2 = r_1^2 \Rightarrow r_0^2 + d^2 - 2z_f d = r_1^2 \Rightarrow z_f = -\frac{1}{2d}\left(r_1^2 - (r_0^2 + d^2)\right)$$

En forma análoga tenemos:

$$x_f = -\frac{1}{2d}\left(r_2^2 - (r_0^2 + d^2)\right)$$

$$y_f = -\frac{1}{2d}\left(r_3^2 - (r_0^2 + d^2)\right)$$

Por lo tanto, la dirección de propagación de la onda se da en el sentido de la recta que une los puntos (x_f, y_f, z_f) con el origen.

En la práctica este procedimiento no se utiliza a menudo pues los detectores de onda tienen cierta directividad, lo que permite restringir la zona inicial de búsqueda. En lugar de una esfera, la zona inicial se restringe a una pequeña porción de la superficie de manera que, con medidas adicionales en la misma posición espacial, pero con diferente orientación angular del sensor es posible determinar la dirección de propagación de la onda.

Ejercicio 3.

(a) En $\theta = 0$, $\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \sin(kd\sin(\theta)/2) = 0$. Por lo tanto, la presión acústica vale:

$$P'(r, 0) = \frac{NA}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

Este valor se repite cada vez que $\sin(kd\sin(\theta)\,/2) = 0 \Rightarrow kd\sin(\theta)\,/2 = m\pi$ con m entero. Por lo tanto, las posiciones angulares θ_m para las cuales la presión tiene el mismo valor que el lóbulo central están dadas por:

$$\sin(\theta_m) = \frac{2m\pi}{kd} = m\frac{\lambda}{d}$$

(b) La condición para que la presión acústica sea nula es que se anule el numerador pero no el denominador del diagrama de directividad. Esto sucede en las posiciones angulares θ_n tal que

$$\sin\left(\left(\frac{N}{2}\right) kdsin(\theta_n)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{N}{2}\, kd\sin(\theta_n) = n\pi$$

$$\Rightarrow \sin(\theta_n) = \frac{2\pi}{kd}\left(\frac{n}{N}\right) = \left(\frac{n}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

con la condición $n/N \neq m$, con m entero y además $n < [Nd/\lambda]$, donde [] indica la parte entera de la cantidad.

(c) Si se desea lóbulos principales en $\theta_m = \pm\pi/3$ se debe cumplir

$$\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{\lambda}{d} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

La frecuencia de trabajo es $f_0 = 5000\ Hz$ y la velocidad del sonido en agua $c = 1500$ m/s

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{1500\ m/s}{5000\ s^{-1}} = \frac{3}{10}\ m$$

Además $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

$$\Rightarrow d = \frac{3}{10}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \cong 0{,}35\ m$$

Si se desea que el ancho Δ del lóbulo central sea 3,1 º tenemos para la condición de campo nulo hallada en (b):

$$\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{1}{N}\frac{\lambda}{d} \Rightarrow N = \frac{\lambda}{d}\frac{1}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sin(1{,}55º)} \cong 32$$

Por lo tanto, para construir un arreglo lineal con las condiciones especificadas se necesitan 32 fuentes simples separadas 0,35 m entre sí.