Hoy: variables discretas y continuas

"If you torture the data long enough, it will confess to anything"

Si torturas a los datos el tiempo suficiente, confesarán cualquer cosa

Ronald Coase. (Economista Inglés: 1913 - 2010, Premio Nobel en 1991)

Probabilidad - Clase 16
Variables aleatorias discretas y continuas

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Variables aleatorias (repaso)

- Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
- Llamamos *variable aleatoria* a una función

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

es decir $X(\omega)$ que toma valores reales,

- y verifica la condición

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \tag{1}$$

para todo x real.

Función de distribución

- Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$
- una variable aleatoria $X = X(\omega), \ \omega \in \Omega$.
- El conjunto
$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x\}$$
es un suceso (es decir, un conjunto de la σ–álgebra de sucesos $\mathcal{A}$),
- Está definida la probabilidad
$$\mathbf{P}(\{\omega \colon X(\omega) \leq x\})$$
para todo $x \in \mathbb{R}$;

- Esta probabilidad se designa

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon X(\omega) \leq x\})$$

- Se lee: la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x.
- Se denomina *función de distribución* de la variable aleatoria X, a la función $F(x)$, definida para todos los valores x reales, mediante la fórmula

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x). \tag{2}$$

- La función $\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X \in B)$, definida para todos los conjuntos borelianos B de puntos de la recta real, se llama *función de probabilidad* de la variable aleatoria X.

- Es claro que

$$\mathbf{P}_X((-\infty, x]) = \mathbf{P}(X \leq x) = F(x), \qquad \text{para cualquier } x,$$

  donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X.

- Llamamos *distribución de probabilidad* (o más sencillamente *distribución*) de la variable aleatoria X, indistintamente, a la función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria X, o a la función de probabilidad $\mathbf{P}_X(B)$ de esta variable aleatoria.

Propiedades de $F(x)$

Propiedad

Se verifica $0 \leq F(x) \leq 1$, *para todo* x *real.*

Propiedad

Si $a < b$, *entonces* $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Propiedad

La función $F(x)$ *es no decreciente en toda la recta real, es decir, dados* $a < b$ *reales, vale* $F(a) \leq F(b)$.

Propiedad

Se tiene $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ *y* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Propiedad

La función de distribución $F(x)$ *es continua por la derecha.*

Finalizó el repaso

Propiedad

Una función de distribución tiene una cantidad finita o numerable de puntos de discontinuidad.

Demostración Por las propiedades 1 y 3, la función $F(x)$ tiene:

a lo sumo un salto de magnitud h, con $h > 1/2$,

a lo sumo dos saltos de magnitud h, con $1/2 \geq h > 1/3$,

a lo sumo tres saltos de magnitud h, con $1/3 \geq h > 1/4$,

$\vdots$

a lo sumo m saltos de magnitud h, con $1/m \geq h > 1/(m+1)$,

$\vdots$

En consecuencia, el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función $F(x)$ es finito o numerable, dado que sus elementos se pueden numerar.

Variables aleatorias discretas

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ y una variable aleatoria $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega$.

- X tiene *distribución discreta* si existe un conjunto B finito o numerable tal que $\mathbf{P}(X \in B) = 1$.
- Si X es una variable aleatoria discreta, y x verifica $p = \mathbf{P}(X = x) > 0$, decimos que la variable aleatoria X *toma el valor* x con probabilidad p.

Sea X, que toma los valores $x_1, x_2, \ldots$, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots$. Es decir

$$p_k = \mathbf{P}(X = x_k)\ (k = 1, 2, \ldots), \qquad \text{con } p_1 + p_2 + \cdots = 1.$$

Calculemos la distribución $F(x)$ de X en x. En efecto, los sucesos

$$\{\omega\colon X(\omega) \leq x\} \qquad \bigcup_{k\colon x_k \leq x} \{\omega\colon X(\omega) = x_k\}$$

tienen la misma probabilidad. Entonces

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \sum_{k\colon x_k \leq x} \mathbf{P}(X = x_k),$$

lo que significa

$$F(x) = \sum_{k\colon x_k \leq x} p_k. \tag{3}$$

Luego

- el gráfico de la función $F(x)$ es constante por invervalos,
- los intervalos de constancia están delimitados por dos valores consecutivos que toma la variable aleatoria,
- estos valores son puntos de salto (discontinuidades),
- La magnitud del salto en el cada punto x_k es igual a p_k.

Ejemplos

Ejemplo. X tiene *distribución degenerada* si existe un c tal que $\mathbf{P}(X = c) = 1$. La función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } c \leq x \end{cases}$$

Ejemplo. X *distribución binomial* con parámetros (n, p), donde n es un natural y $0 < p < 1$, si se verifica

$$\mathbf{P}(X = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \text{ para } m = 0, 1, \ldots, n.$$

(X es la $\mu(\omega)$ de las clases anteriores).

Veamos, como ejemplo, el gráfico de la función de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria con distribución binomial, con parámetros $(2, 1/3)$ (ver figura 1).

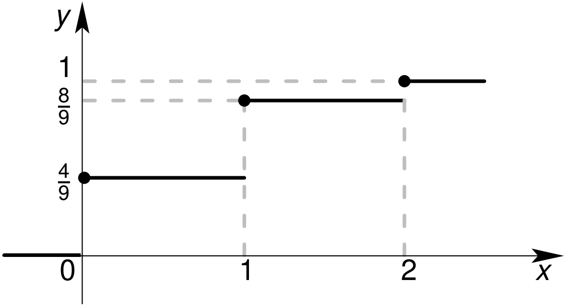

Figura: Gráfico de la función $y = F(x)$ para una variable aleatoria con distribución binomial, con parámetros $(2, 1/3)$

Distribución de Bernoulli

Si $n = 1$, la binomial X es una *distribución de Bernoulli*. Como $m = 0, 1$ X toma dos valores:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \\ 1 & \text{con probabilidad } p \end{cases}$$

- La distribución binomial con parámetros (n, p) corresponde a una variable aleatoria que cuenta el número de éxitos en una serie n experimentos independientes, con probabilidad de éxito en cada experimento igual a p.

Distribución de Poisson

Ejemplo Decimos que una variable aleatoria X tiene *distribución de Poisson* con parámetro $\lambda > 0$, si se verifica

$$\mathbf{P}(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \text{ para } m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Es claro que la asignación de probabilidades es correcta, porque

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = m) = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Distribución Geométrica

Ejemplo Decimos que una variable aleatoria X tiene *distribución geométrica* con parámetro $0 < p < 1$, si se verifica

$$\mathbf{P}(X = m) = (1-p)^{m-1} p \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

La asignación de probabilidades es correcta, porque

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = m) = p \sum_{m=1}^{\infty} (1-p)^{m-1} \\ = p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1. \end{aligned}$$

Variables aleatorias continuas

X tiene distribución *absolutamente continua*, cuando su función de distribución $F(x)$ puede representarse de la forma

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du, \qquad \text{para todo } x \text{ real} \tag{4}$$

- $p(u)$ es una función no negativa e integrable
- En análisis real una función $F(x)$ que se representa así se denomina *absolutamente continua*.
- Cualquier función absolutamente continua es continua en todos los puntos.
- La afirmación recíproca, en general, es falsa.
- La integral a la derecha en (4) es la integral de Lebesgue.
- En nuestro curso asumimos, que $p(u)$ es continua salvo en una cantidad finita de puntos

- La función $p(u)$ se llama *densidad* de la distribución de la variable aleatoria X,
- Decimos, que X tiene densidad $p(x)$.
- Es claro que
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1 \tag{5}$$
por (4) y la propiedad $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
- Si $p(u)$ es continua en un punto x, en este punto existe la derivada $F'(x) = p(x)$.
- En particular, si $p(u)$ es continua en todos los puntos, tenemos $F'(x) = p(x)$ para todo x.

Lema Si una variable aleatoria X tiene función de distribución absolutamente continua, entonces $\mathbf{P}(X = x_0) = 0$ para cualquier x_0.

Demostración La función de distribución $F(x)$ es continua en todos los puntos en vista de (4), y por ésto, para cualquier $h > 0$, tenemos

$$0 \leq \mathbf{P}(X = x_0) \leq \mathbf{P}(x_0 - h < X \leq x_0) = F(x_0) - F(x_0 - h) \to 0,$$

si $h \to 0$, obteniendo que $\mathbf{P}(X = x_0) = 0$.

Corolario Si una variable aleatoria X tiene distribución absolutamente continua con densidad $p(x)$, para dos números $a < b$ arbitrarios, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(a \leq X < b) &= \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx. \end{aligned} \tag{6}$$

La combinación de la fórmula de Eisntein

y el Teorema de Pitágoras:

$$E = m(a^2 + b^2)$$