Álgebras de Lie

Andrés Abella

22 de noviembre de 2023

Índice

Notaciones. En estas notas trabajaremos sobre un cuerpo arbitrario $\Bbbk$ de característica cero. En el estudio de las representaciones de $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ asumiremos además que $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado. Si A es un subconjunto de un espacio vectorial V, escribiremos $\Bbbk A$ al subespacio generado por A. Si V y W son dos espacios vectoriales, escribiremos $\mathcal{L}(V, W)$ al espacio de transformaciones lineales de V en W, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ y $V^* = \mathcal{L}(V, \Bbbk)$. En general escribiremos xy en vez de $x \circ y$ para la composición de transformaciones lineales.

1. Conceptos básicos

Un *corchete de Lie* en un espacio vectorial L es un mapa bilineal $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ que verifica:

1. *Antisimetría:* $[x, x] = 0$, para todo $x \in L$,
2. *Condición de Jacobi:* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todo $x, y, z \in L$.

La primera condición equivale a $[x, y] = -[y, x]$, para todo $x, y \in L$. Un *álgebra de Lie* es un par $(L, [\ ,\ ])$ en el cual L es un espacio vectorial y $[\ ,\ ]$ es un corchete de Lie en L.

Ejemplos 1.1.

1. El producto vectorial $u \wedge v$ es un corchete de Lie en $\mathbb{R}^3$. A $\mathbb{R}^3$ con la estructura de álgebra de Lie inducida por el producto vectorial lo escribimos $\mathbb{R}^3_\wedge$.
2. A todo espacio vectorial V se le puede dar estructura de álgebra de Lie definiendo $[u, v] = 0$, para todo $u, v \in V$. El álgebra de Lie así obtenida se llama *abeliana*. Toda álgebra de Lie de dimensión 0 o 1 es abeliana.

   Cuando consideremos $\Bbbk^n$ como álgebra de Lie, siempre supondremos que tiene estructura de álgebra de Lie abeliana, a menos que explicitemos lo contrario.
3. Si A es un álgebra asociativa, entonces $[x, y] = xy - yx$ es un corchete de Lie en A. A esta álgebra de Lie la escribiremos A_{Lie}. Notar que A es conmutativa si y solo si A_{Lie} es abeliana.
4. Si V es un espacio vectorial, entonces el espacio $\mathcal{L}(V)$ de las transformaciones lineales de V en V con la composición es un álgebra asociativa. Escribimos $\mathfrak{gl}(V) := \mathcal{L}(V)_{\text{Lie}}$ al álgebra de Lie correspondiente. Cuando V tiene dimensión finita, a $\mathfrak{gl}(V)$ se le llama el *álgebra general lineal*.
5. El espacio de las matrices cuadradas $M_n(\Bbbk)$ con el producto de matrices es un álgebra asociativa, luego le podemos asociar el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk) = M_n(\Bbbk)_{\text{Lie}}$. Al álgebra $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ también se le llama *álgebra general lineal*. Si $\mathcal{B} = \{e_{ij} : \ i, j = 1, \ldots, n\}$ es la base canónica de $M_n(\Bbbk)$, entonces $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ y por lo tanto
$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}, \quad \forall i, j, k, l = 1, \ldots, n.$$

Relación con los grupos de Lie. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable (real o compleja) que tiene estructura de grupo, de forma tal que las operaciones $(g, f) \mapsto gf$ y $g \mapsto g^{-1}$ son mapas diferenciables. Sea G un grupo de Lie con neutro e y $\mathfrak{g} = T_eG$ el espacio tangente a G en e. Para cada g en G consideremos el mapa $\text{int}_g : G \to G$ definido por $\text{int}_g(f) = gfg^{-1}$. Sea $\text{Ad} : G \to \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ definido por $g \mapsto \text{Ad}_g$, siendo $\text{Ad}_g = d_e(\text{int}_g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Consideremos $\text{ad} = d_e\text{Ad} : \mathfrak{g} \to T_{\text{id}}\big(\mathcal{L}(\mathfrak{g})\big) = \mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Luego $\mathfrak{g}$ tiene estructura[1] de álgebra de Lie definiendo $[x, y] = \text{ad}_x(y)$. Por ejemplo si consideramos el *grupo general lineal* $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{g \in M_n(\mathbb{R}) : \ \det(g) \neq 0\}$, entonces $T_{\text{id}}\,\text{GL}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. Si $x \in M_n(\mathbb{R})$ es $x = \dot{\alpha}(0)$, siendo $\alpha(t) = e^{tx}$ la exponencial matricial. Usando esto se prueba que vale $\text{ad}_x(y) = xy - yx$; luego $T_{\text{id}}\,\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

[1] Otra forma (equivalente) de obtener esta estructura, que es ver que $\mathfrak{g}$ es isomorfa al espacio de los campos vectoriales invariantes por traslaciones a la izquierda, el cual es un álgebra de Lie con el corchete de campos.

Nota 1.2. A partir de ahora asumiremos que las álgebras de Lie son de dimensión finita. Además, como las álgebras que nos interesan son las de Lie, en general abreviaremos "álgebra de Lie" y "corchete de Lie" por "álgebra" y "corchete", respectivamente. Cuando trabajemos con otro tipo de álgebras lo diremos explícitamente.

Si K y H son subespacios de un álgebra L, definimos

$$[K,H] := \Bbbk\{[k,h]:\ k\in K,\ h\in H\} = \left\{\sum_{i=1}^{m}[k_i,h_i]:\ k_i\in K,\ h_i\in H,\ i=1,\dots,m,\ m=1,2,\dots\right\}.$$

Claramente $[K,H]=[H,K]$.

Subálgebras. Un subespacio H de un álgebra L se dice que es una *subálgebra* si verifica $[H,H]\subset H$. Escribiremos $H<L$ para indicar que H es subálgebra de L. La restricción del corchete de L a H induce en H una estructura de álgebra de Lie.

Proposición 1.3. *Sea L un álgebra.*

1. *Si $H_\alpha<L$, para todo $\alpha\in\Lambda$, entonces $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha<L$.*
2. *Si $H<L$ y $K<H$, entonces $K<L$.* □

Ejemplos 1.4.

1. Si L es un álgebra y $x\in L$, entonces $\Bbbk x=\{ax:\ \ a\in\Bbbk\}\subset L$ es una subálgebra abeliana.

2. A las subálgebras de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ o de $\mathfrak{gl}(V)$ se les llama álgebras de Lie *lineales*. Veamos algunos casos importantes. Consideremos $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ el subespacio de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ formado por las matrices triangulares superiores, $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ el de las estrictamente triangulares superiores y $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ el de las diagonales:

$$\mathfrak{b}_n(\Bbbk)=\left\{\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{n}_n(\Bbbk)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{d}_n(\Bbbk)=\left\{\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}\right\}.$$

Es claro que $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Los conjuntos $\{e_{ij}:\ i\le j\}$ y $\{e_{ij}:\ i<j\}$ son bases de $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ y $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$, respectivamente. Notar que si $i\le j$ y $k\le l$, es

$$[e_{ij},e_{kl}]=\begin{cases} e_{il}, & \text{si } k=j,\ i<l,\\ -e_{kj}, & \text{si } k<j,\ i=l,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}\tag{1}$$

Por otro lado si $i<j$ es $e_{ij}=[e_{ij},e_{jj}]$. De estas fórmulas se deduce $[\mathfrak{b}_n(\Bbbk),\mathfrak{b}_n(\Bbbk)]=\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ y por lo tanto $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ y $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ son subálgebras de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Observar $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)=\mathfrak{n}_n(\Bbbk)\oplus\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$, como subespacios. Al álgebra $\mathfrak{n}_3(\Bbbk)$ se le llama el *álgebra de Heisemberg.*

3. Otro ejemplo importante de álgebra de Lie lineal es el subespacio de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ formado por de las matrices de traza nula que escribimos $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ y llamamos el *álgebra especial lineal*. Como la traza verifica $\operatorname{tr}(xy)=\operatorname{tr}(yx)$, entonces es claro que $[\mathfrak{gl}_n(\Bbbk),\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)]\subset\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ y por lo tanto $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$.

   Análogamente, si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces al conjunto de los operadores de V de traza nula se le llama también el *álgebra especial lineal* y se le escribe $\mathfrak{sl}(V)$.

Un *morfismo* de álgebras de Lie entre dos álgebras L_1 y L_2 es un mapa lineal $\varphi: L_1\to L_2$ que verifica $\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]$, para todo x,y en L_1. El morfismo se dice que es un *monomorfismo*, *epimorfismo* o *isomorfismo* si es inyectivo, sobreyectivo o biyectivo, respectivamente. Un *automorfismo* es un isomorfismo de un álgebra en sí misma.

Álgebras de Lie clásicas. Sea β una forma bilineal en un espacio V de dimensión finita n. Si definimos

$$\mathfrak{gl}(V)_\beta := \big\{x \in \mathfrak{gl}(V) : \ \beta\big(x(u), v\big) + \beta\big(u, x(v)\big) = 0, \ \forall u, v \in V\big\},$$

entonces $\mathfrak{gl}(V)_\beta$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$. Si fijamos una base $\mathcal{B}$ de V, entonces el isomorfismo natural $[\ ]_\mathcal{B} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ induce un isomorfismo $\mathfrak{gl}(V)_\beta \simeq \mathfrak{gl}_{n,b}(\mathbb{k})$, siendo $b \in M_n(\mathbb{k})$ la matriz asociada a la forma bilineal β en la base $\mathcal{B}$ y

$$\mathfrak{gl}_{n,b}(\mathbb{k}) := \big\{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) : \ x^t b + bx = 0\big\}.$$

Notar que la forma β es simétrica, antisimétrica o no degenerada si y solo si b es una matriz simétrica, antisimétrica o invertible, repectivamente.

Sea $\beta : V \times V \to \mathbb{k}$ una forma bilineal <u>no degenerada</u>. Si β es simétrica, diremos que $\mathfrak{gl}(V)_\beta$ es un álgebra de tipo *ortogonal* y si es antisimétrica, diremos que $\mathfrak{gl}(V)_\beta$ es de tipo *simpléctico*. Si $\mathfrak{gl}(V)_\beta$ es de tipo simpléctico, entonces la dimensión de V es par. Las álgebras simplécticas de la misma dimensión son isomorfas entre sí. Para las álgebras ortogonales depende del cuerpo $\mathbb{k}$; si $\mathbb{k}$ es algebraicamente cerrado, entonces son isomorfas al álgebra de las matrices antisimétricas, pero en otros casos hay más clases de isomorfismo. Un ejemplo de esto último es el *álgebra de Lorentz* $\mathfrak{gl}_{4,b}(\mathbb{R})$, siendo $b = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1) \in M_4(\mathbb{R})$.

En general se toma como modelo del álgebra simpléctica a $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) := \mathfrak{gl}_{2n,a}(\mathbb{k})$ y como modelos de las álgebras ortogonales a $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{k}) := \mathfrak{gl}_{2n,b}(\mathbb{k})$ y $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{k}) := \mathfrak{gl}_{2n+1,c}(\mathbb{k})$, siendo[2]

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_n \\ -\mathrm{id}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k}), \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_n \\ \mathrm{id}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k}), \qquad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_n \\ 0 & \mathrm{id}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n+1}(\mathbb{k}).$$

Estas álgebras se pueden describir explícitamente:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{k}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{pmatrix} : \ a, b, c \in M_n(\mathbb{k}), \ b, c \text{ antisimétricas} \right\}, \\
\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{pmatrix} : \ a, b, c \in M_n(\mathbb{k}), \ b, c \text{ simétricas} \right\}, \\
\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{k}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c^t & e & f \\ -b^t & h & -e^t \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{k}, \ b, c \in M_{1\times n}(\mathbb{k}), \ e, f, h \in M_{n\times n}(\mathbb{k}), \ h, f \text{ antisimétricas} \right\}.
\end{aligned}$$

Las siguientes familias de álgebras son las álgebras de Lie *clásicas*.

$\mathbf{A_n}$: es el álgebra especial lineal $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{k})$; $\dim \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{k}) = n(n+2)$.

$\mathbf{B_n}$: es el álgebra ortogonal $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{k})$; $\dim \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{k}) = n(2n+1)$.

$\mathbf{C_n}$: es el álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$; $\dim \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) = n(2n+1)$.

$\mathbf{D_n}$: es el álgebra ortogonal $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{k})$; $\dim \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{k}) = n(2n-1)$.

[2]Hay cierta ambigüedad en las notaciones: algunos usan $\mathfrak{so}_n(\mathbb{k})$ para las matrices antisimétricas o $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{k})$ para $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$.

Ideales. Un subespacio K de un álgebra L se dice que es un *ideal* si verifica $[K, L] \subset K$. Notar que esta condición equivale a $[L, K] \subset K$. Escribiremos $K \lhd L$ para indicar que K es un ideal de L. Es claro que todo ideal es una subálgebra. Los subespacios 0 y L son ideales. Un ideal de L distinto de 0 y L se llama *propio*. El ideal *trivial* es 0.

Proposición 1.5. *Sea L un álgebra.*

1. *Si $K \lhd L$ y $H \lhd L$, entonces $[K, H] \lhd L$ y además $[K, H] \subset K \cap H$.*

2. *Si $K_\alpha \lhd L$, para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha < L$ y $\sum_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha < L$.* $\square$

Ejemplo 1.6. Si A es un álgebra asociativa, $H \subset A$ una subálgebra y $K \subset A$ un ideal bilátero, entonces H es una subálgebra y K es un ideal del álgebra de Lie A_{Lie}. Considerando $M_n(\Bbbk)$ como álgebra asociativa, se observa que $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ es una subálgebra (asociativa) de $M_n(\Bbbk)$ y que $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ es un ideal (asociativo) de $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$; luego $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ es una subálgebra (de Lie) de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ y que $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ es un ideal (de Lie) del álgebra de Lie $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$.

Sea L un álgebra. Veremos algunas definiciones.

1. Dos elementos $x, y \in L$ *conmutan* si $[x, y] = 0$.

2. Si H es una subálgebra de L, el *centralizador* $C_L(H)$ y el *normalizador* $N_L(H)$ de H se definen[3] mediante

$$C_L(H) = \{x \in L : \ [x, h] = 0, \ \forall h \in H\}, \qquad N_L(H) = \{x \in L : \ [x, h] \in H, \ \forall h \in H\}.$$

   Notar que $C_L(H)$ y $N_L(H)$ son subálgebras de L; además H y $C_L(H)$ son ideales de $N_L(H)$. Claramente H es un ideal de L si y solo si $N_L(H) = L$; en este caso $C_L(H)$ resulta un ideal de L.

3. El *centro* de L es $Z(L) := \{x \in L : \ [x, y] = 0, \ \forall y \in L\}$; es un ideal abeliano de L. Notar $Z(L) = C_L(L)$.

4. El *álgebra derivada* de L es el ideal $L' = [L, L]$. Notar que L es abeliana sii $L' = 0$ sii $Z(L) = L$.

Ejemplos 1.7. Los siguientes son ejemplos de álgebras derivadas.

1. En el ejemplo 1.4 vimos que vale $[\mathfrak{b}_n(\Bbbk), \mathfrak{b}_n(\Bbbk)] = \mathfrak{n}_n(\Bbbk)$. Luego $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)' = \mathfrak{n}_n(\Bbbk)$.

2. Vale $[\mathfrak{gl}_n(\Bbbk), \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)] = [\mathfrak{sl}_n(\Bbbk), \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)] = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ (ejercicio).

Un álgebra L se dice *simple* si no es abeliana y no tiene ideales propios. Equivalentemente, L es simple si y solo si L no tiene ideales propios y $\dim L \geq 2$.

Observación 1.8. Si el cuerpo $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado y de característica cero, entonces se prueba que toda $\Bbbk$-álgebra de Lie simple es isomorfa a un álgebra clásica A_n $(n \geq 1)$, B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 3)$, D_n $(n \geq 4)$, o a una de las álgebras *excepcionales* E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2. Estos nombres vienen de los diagramas de Dynkin.

Derivaciones. Una $\Bbbk$-*álgebra abstracta*[4] es un par (A, μ) en el cual A es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\mu : A \times A \to A$ es un mapa $\Bbbk$-bilineal. Las álgebras asociativas y las de Lie son ejemplos de álgebras abstractas.

Si (A, μ) es un álgebra abstracta, una *derivación* de A es un mapa lineal $D : A \to A$ que verifica

$$D\big(\mu(x, y)\big) = \mu(Dx, y) + \mu(x, Dy), \qquad \forall x, y \in A.$$

[3]Se puede definir un concepto más general que es el del centralizador $C_K(X)$ o normalizador $N_K(X)$ de un subespacio X en una subálgebra K de L; la definición es la que uno se imagina y valen propiedades similares a las descritas.

[4]Se suele llamar "álgebra" a lo que estamos llamando "álgebra abstracta", pero nosotros le llamamos así porque la palabra "álgebra" la estamos usando para las álgebras de Lie

Proposición 1.9. *Si* (A, μ) *es un álgebra abstracta, entonces*

$$\mathrm{Der}(A) := \{D : A \to A : \ D \text{ es una derivación}\}$$

es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$*; luego* $\mathrm{Der}(A)$ *es un álgebra de Lie.* □

Ejemplo 1.10. Si L es un álgebra, entonces para cada $x \in L$, el mapa $\mathrm{ad}_x : L \to L$ definido por $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ para todo $y \in L$, es una derivación de L. Las derivaciones de este tipo se llaman *internas* y las otras *externas*. Al espacio de las derivaciones internas lo escribimos $\mathrm{ad}(L)$.

Proposición 1.11. *Sea* L *un álgebra. Si* $\delta \in \mathrm{Der}(L)$ *y* $x \in L$*, entonces* $[\delta, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{\delta(x)}$*. Luego* $\mathrm{ad}(L)$ *es un ideal de* $\mathrm{Der}(L)$*.* □

Ejemplo 1.12. Si A es un álgebra asociativa, entonces $\mathrm{Der}(A) := \{D : A \to A : \ D$ es una derivación$\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$. Además para cada $x \in A$ el mapa $\mathrm{ad}_x : A \to A$ definido por $\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx$ para todo $y \in A$, es una derivación del álgebra asociativa A. Notar $\mathrm{Der}(A) \subset \mathrm{Der}(A_{\mathrm{Lie}})$ es una subálgebra de Lie y que ad_x pensado en $\mathrm{Der}(A)$ coincide con ad_x pensado en $\mathrm{Der}(A_{\mathrm{Lie}})$.

Operaciones con morfismos. Recordar que un *morfismo* entre dos álgebras L_1 y L_2 es un mapa lineal $\varphi : L_1 \to L_2$ que verifica $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, para todo x, y en L_1.

Proposición 1.13.

1. *El mapa identidad es un automorfismo.*
2. *La composición de morfismos es un morfismo.*
3. *Si* $\varphi : L_1 \to L_2$ *es un isomorfismo, entonces* $\varphi^{-1} : L_2 \to L_1$ *es también un isomorfismo.* □

Proposición 1.14. *Sea* $\varphi : L_1 \to L_2$ *un morfismo.*

1. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *es un ideal de* L_1 *y* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *es una subálgebra de* L_2*.*
2. *Si* $H_1 < L_1$*, entonces* $\varphi(H_1) < L_2$*. Si* $H_2 < L_2$*, entonces* $\varphi^{-1}(H_2) < L_1$ *y* $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \varphi^{-1}(H_2)$*.*
3. *Si* $K_1 \lhd L_1$*, entonces* $\varphi(K_1) \lhd \mathrm{Im}(\varphi)$*. Si* $K_2 \lhd L_2$*, entonces* $\varphi^{-1}(K_2) \lhd L_1$ *y* $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \varphi^{-1}(K_2)$*.* □

Observación 1.15.

1. Dos álgebras de Lie abelianas son isomorfas si y solo si tienen la misma dimensión.
2. Si $\varphi : A \to B$ es un morfismo de álgebras asociativas, entonces $\varphi : A_{\mathrm{Lie}} \to B_{\mathrm{Lie}}$ es un morfismo de álgebras de Lie. Los dos primeros ejemplos que siguen son un caso particular de esta construcción.

Ejemplos 1.16.

1. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n y $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces $[\ ]_{\mathcal{B}} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ definido por $x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$, es un isomorfismo
2. El mapa $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk) \to \mathfrak{gl}(\Bbbk^n)$, $A \mapsto L_A$ (siendo $L_A(v) = Av, \ \forall v \in \Bbbk^n$) es un isomorfismo.
3. La traza $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ es un morfismo y su núcleo es $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.
4. El mapa $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$, $x \mapsto \mathrm{ad}_x$, es un morfismo cuyo núcleo es $Z(L)$ y su imagen es $\mathrm{ad}(L)$.

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de un álgebra L, entonces existen escalares $a_{ij}^k \in \Bbbk$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, llamados *constantes de estructura* de L respecto a $\mathcal{B}$, definidos por

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k v_k, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Las propiedades del corchete implican

$$a_{ii}^l = 0, \quad a_{ij}^l = -a_{ij}^l, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m = 0, \quad \forall i, j, l, m = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Recíprocamente, dado un espacio vectorial L de dimensión n, una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de L y escalares $a_{ij}^k \in \Bbbk$ que verifican (3), entonces L admite estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete en la base $\mathcal{B}$ mediante (2) y extendiéndolo bilinealmente.

Proposición 1.17. *Si L_1 y L_2 son dos álgebras de la misma dimensión, entonces L_1 y L_2 son isomorfas si y solo si existe $\mathcal{B}_1$ base de L_1 y $\mathcal{B}_2$ base de L_2 tales que las constantes de estructura de L_1 respecto a $\mathcal{B}_1$ coinciden con las de L_2 respecto a $\mathcal{B}_2$.* $\square$

Cocientes. Sea L un álgebra e K un ideal de L. Consideremos el espacio cociente $L/K = \{\overline{x} : x \in L\}$, siendo $\overline{x} = x + K = \{x + k : k \in K\}$. Entonces L/K tiene estructura de álgebra definiendo $[\overline{x}, \overline{y}] := \overline{[x, y]}$; la proyección canónica $\pi : L \to L/K$ definida por $x \mapsto \overline{x}$, es un epimorfismo de álgebras de Lie.

Proposición 1.18 (Propiedad universal del cociente)**.** *Sea $\varphi : L_1 \to L_2$ un morfismo. Si K es un ideal de L_1 tal que $K \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$, entonces existe un único morfismo $\hat{\varphi} : L_1/K \to \tilde{L}_2$ tal que $\hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$.* $\square$

Proposición 1.19 (Teoremas de isomorfismo)**.**

1. *Si $\varphi : L_1 \to L_2$ es un morfismo, entonces $\operatorname{Im}(\varphi) \simeq L_1/\operatorname{Ker}(\varphi)$, identificando $\varphi(x) \leftrightarrow \overline{x}$.*
2. *Si $K \lhd L$ y $H < L$, entonces $K + H < L$, $K \cap H \lhd H$ y $\frac{K+H}{K} \simeq \frac{H}{K \cap H}$.*
3. *Si K y H son ieales de L con $K \subset H$, entonces H/K es un ideal de L/K y $\frac{L/K}{H/K} \simeq L/H$.* $\square$

El segundo teorema de isomorfismo implica lo siguiente.

Corolario 1.20. *Si $L = K \oplus H$, con $K \lhd L$ y $H < L$, entonces $L/K \simeq H$.* $\square$

Proposición 1.21. *Sea L un álgebra e K un ideal de L. Consideremos*

$$\mathcal{A} = \{H : K < H < L\}, \quad \mathcal{B} = \{K : K < L/K\}.$$

Entonces las correspondencias $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$: $H \mapsto H/K$ y $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$: $K \mapsto \pi^{-1}(K)$ son inversas una de la otra, preservan el orden de inclusión y llevan ideales en ideales. $\square$

Suma directa. Si L_1 y L_2 son álgebras, entonces su producto cartesiano $L_1 \times L_2$ es un álgebra definiendo

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] := ([x_1, y_1], [x_2, y_2]), \qquad \forall x_1, y_1 \in L_1, \; x_2, y_2 \in L_2.$$

El espacio $L_1 \times L_2$ con este corchete se llama la *suma directa* de L_1 y L_2 y se escribe $L_1 \oplus L_2$. Notar que las inclusiones $\iota_i : L_i \to L_1 \oplus L_2$ y las proyecciones $\pi_i : L_1 \oplus L_2 \to L_i$, $i = 1, 2$, definidas por

$$\iota_1(x) = (x, 0), \quad \iota_2(y) = (0, y), \quad \pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y, \quad \forall x \in L_1, \; y \in L_2$$

son morfismos de álgebras de Lie.

Si pensamos L_1 y L_2 contenidos en $L_1 \oplus L_2$ (identificando $L_1 \simeq L_1 \times \{0\}$ y $L_2 \simeq \{0\} \times L_2$), entonces L_1 y L_2 son ideales de $L_1 \oplus L_2$ y $L_1 \oplus L_2$ es la suma directa interna de L_1 y L_2. Recíprocamente, si L es una álgebra y K y H son ideales de L tales que $L = K \oplus H$, entonces el mapa $K \times H \to L$: $(i, j) \mapsto i + j$, es un isomorfismo de álgebras. En forma análoga se ve que si $L = K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$, siendo $K_1, \ldots, K_n \lhd L$, entonces $L \simeq K_1 \times \cdots \times K_n$. Esto justifica que se escriba $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ para el producto cartesiano de álgebras $L_1 \times \cdots \times L_n$, con el corchete definido arriba.

Suma semidirecta. Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie y $\delta : L_1 \to \mathrm{Der}(L_2)$ un morfismo de álgebras de Lie. Consideremos el producto cartesiano $L_1 \times L_2$. Se prueba que el mapa

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] := \big([x_1, y_1],\, \delta_{x_1}(y_2) - \delta_{y_1}(x_2) + [x_2, y_2]\big), \quad \forall x_1, y_1 \in L_1,\ x_2, y_2 \in L_2.$$

es un corchete de Lie en $L_1 \times L_2$; el álgebra así obtenida es la *suma semidirecta* de L_1 y L_2 y se escribe $L_1 \oplus_\delta L_2$.

Si pensamos L_1 y L_2 contenidos en $L_1 \oplus_\delta L_2$ en la forma usual, entonces L_1 resulta una subálgebra y L_2 un ideal. Recíprocamente, si un álgebra L se puede descomponer de la forma $L = H \oplus K$, en la cual H es una subálgebra y K un ideal, entonces existe un morfismo de álgebras de Lie $\delta : H \to \mathrm{Der}(K)$ tal que L es isomorfa a $H \oplus_\delta K$. Un ejemplo es $\mathfrak{b}(n, \Bbbk) = \mathfrak{d}(n, \Bbbk) \oplus \mathfrak{n}(n, \Bbbk)$, con $\mathfrak{n}(n, \Bbbk) \lhd \mathfrak{b}(n, \Bbbk)$ y $\mathfrak{d}(n, \Bbbk) < \mathfrak{b}(n, \Bbbk)$.

Sucesión exacta corta. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión de morfismos de álgebras de Lie

$$L_1 \xrightarrow{\varphi} L_2 \xrightarrow{\psi} L_3 \tag{4}$$

tales que φ es un monomorfismo, ψ es un epimorfismo y $\mathrm{Ker}\,(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$. Se suele usar la notación

$$0 \to L_1 \xrightarrow{\varphi} L_2 \xrightarrow{\psi} L_3 \to 0$$

para indicar que (4) es una sucesión exacta corta. Si existe una sucesión exacta corta como en (4), entonces diremos que L_2 es una *extensión*[5] de L_1 por L_3. La extensión se dice *central* si $\mathrm{Im}(\varphi) \subset Z(L_2)$.

Ejemplos 1.22.

1. Si K es un ideal de L, entonces $K \hookrightarrow L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} L/K$ es una sucesión exacta corta.
2. Si $\varphi : L_1 \to L_2$ es un epimorfismo, entonces $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \hookrightarrow L_1 \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} L_2$ es una sucesión exacta corta.
3. Dada un álgebra L, el núcleo del morfismo $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ es el centro $Z(L)$ y su imagen es $\mathrm{ad}(L)$, por lo tanto siempre le podemos asociar la sucesión exacta corta

   $$0 \to Z(L) \hookrightarrow L \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{ad}(L) \to 0.$$

   Luego L es una extensión central de $\mathrm{ad}(L)$ por $Z(L)$. En particular $L/Z(L) \simeq \mathrm{ad}(L) \lhd \mathrm{Der}(L) < \mathfrak{gl}(L)$.

Observación 1.23.

1. Toda sucesión exacta corta es esencialmente del tipo dado por el ejemplo 1.22.1. Es decir, si (4) es una sucesión exacta corta, entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo, en el cual las flechas verticales son isomorfismos

   $$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & L_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & L_3 \\ \varphi(L_1) \arrow[r, hook] & L_2 \arrow[r, two heads, "\pi"] & L_2/\varphi(L_1) \arrow[u, "\hat{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

2. Decimos que la sucesión exacta corta (4) *se escinde* si existe un morfismo $\eta : L_3 \to L_1$ tal que $\psi \circ \eta = \mathrm{id}$. Si $L = H \oplus K$, siendo $H < L$ y $K \lhd L$, y consideramos $\rho : L \to H$ definida por $\rho(h + k) = h$, entonces $K \hookrightarrow L \xrightarrow{\rho} H$ es una sucesión exacta corta que se escinde. Toda sucesión exacta corta que se escinde es esencialmente de ese tipo.

[5] La nomenclatura no es uniforme, algunos autores dicen que L_2 es una extensión de L_3 por L_1.

Restricción y extensión de escalares. Sea $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ una extensión de cuerpos. Si L es una $\mathbb{K}$-álgebra, entonces L es una $\Bbbk$-álgebra por restricción de la acción de $\mathbb{K}$ a $\Bbbk$; escribiremos $L_{\Bbbk}$ al álgebra así obtenida. Por otro lado, si L es una $\Bbbk$-álgebra, entonces el producto tensorial $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} L$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial definiendo

$$a \cdot (b \otimes x) := (ab) \otimes x, \quad \forall a, b \in \mathbb{K},\ x \in L.$$

A su vez el $\mathbb{K}$-espacio $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} L$ es un álgebra definiendo

$$[a \otimes x, b \otimes y] := ab \otimes [x, y], \quad \forall a, b \in \mathbb{K},\ x, y \in L$$

y extendiendo bilinealmente. Se dice que $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} L$ es el álgebra obtenida *extendiendo escalares* de $\Bbbk$ a $\mathbb{K}$.

Álgebras de dimensión menor o igual que tres. Sea L un álgebra. Si L es abeliana y $\dim L = n$, entonces $L \simeq \Bbbk^n$; luego el caso interesante es cuando L es no abeliana. Notar que si $\dim L \leq 1$, entonces L es abeliana.

Observaciones 1.24. Sea L un álgebra.

1. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L, entonces $\{[e_i, e_j] :\ i < j\}$ es un generador de $L' = [L, L]$.
2. Si $x, y \in L$ son tales que $[x, y] \neq 0$, entonces $\{x, y\}$ es LI.
3. Si $x \in L'$, entonces $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_x) = 0$.

Proposición 1.25. *Si* $\dim L = 2$ *y* L *no es abeliana, entonces existe* $\{x, y\}$ *base de* L *tal que* $[x, y] = x$. □

Luego a menos de isomorfismo hay una única álgebra no abeliana de dimensión 2. En ese caso $L' = \Bbbk\{x\}$ es el único ideal propio de $L = \Bbbk\{x, y\}$ y por lo tanto $Z(L) = 0$. Un ejemplo es $L = \{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} < \mathfrak{gl}_2(\Bbbk)$.

Teorema 1.26. *Supongamos* $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$. *Sea* L *un álgebra no abeliana de dimensión 3. Entonces existe una base* $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$ *de* L *tal que:*

1. $[x, y] = z,\ [x, z] = [y, z] = 0.$
2. $[x, y] = x,\ [x, z] = [y, z] = 0.$
3. $[x, y] = y,\ [x, z] = \mu z,\ [y, z] = 0,$ *para algún* $\mu \in \Bbbk^{\times}$.
4. $[x, y] = y,\ [x, z] = y + z,\ [y, z] = 0.$
5. $[x, y] = z,\ [z, x] = 2x,\ [z, y] = -2y.$ □

Observación 1.27. Respecto al teorema anterior.

1. En los casos 1 y 2 es $\dim L' = 1$, en los casos 3 y 4 es $\dim L' = 2$ y en el caso 5 es $\dim L' = 3$.
2. Las álgebras del caso 1 son isomorfas al álgebra de Heisemberg $\mathfrak{n}_3(\Bbbk)$; las del caso 2 a la suma directa de $\Bbbk$ con el álgebra no abeliana de dimensión 2; las del caso 5 al álgebra especial lineal $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$; las de los casos 3 y 4 pueden obtenerse como ciertas subálgebras de $\mathfrak{b}_3(\Bbbk)$:

$$\text{caso 3: } L_\mu = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \mu a & \mu c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :\ a, b, c \in \Bbbk \right\}; \quad \text{caso 4: } L = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & b + c \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :\ a, b, c \in \Bbbk \right\}.$$

3. Las álgebras de los casos anteriores no son isomorfas entre sí. Si llamamos L_μ a un álgebra del caso 3, es $L_\mu \simeq L_\nu$ si y solo si $\nu = \mu^{\pm 1}$. Luego existen infinitas álgebras del caso 3 no isomorfas entre sí.

2. Álgebras solubles y nilpotentes

Sea L un álgebra. Notar que si K es un ideal de L, entonces L/K es abeliana si y solo si $[L, L] \subset K$. En particular, $L/[L, L]$ es abeliana.

2.1. Álgebras solubles

La *serie derivada* de un álgebra L es la sucesión de ideales $L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \cdots$, definidos por

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(k)} = \left[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}\right], \ \forall k = 1, 2, \ldots.$$

Un álgebra L se dice *soluble* si existe $m \geq 0$ tal que $L^{(m)} = 0$.

Observación 2.1. Si existe k tal que $L^{(k+1)} = L^{(k)}$, entonces $L^{(n)} = L^{(k)}$, para todo $n \geq k$. Luego

1. Si L es tal que $L^{(k+1)} = L^{(k)} \neq 0$ para algún k, entonces L no es soluble.
2. Si $L \neq 0$ es soluble, entonces existe $m > 0$ tal que

$$L = L^{(0)} \supsetneq L^{(1)} \supsetneq \cdots \supsetneq L^{(m-1)} \supsetneq L^{(m)} = 0.$$

   Notar que $L^{(k)}/L^{(k+1)}$ es abeliana para todo k; en particular $L^{(m-1)}$ es un ideal abeliano no nulo.

Ejemplos 2.2. 1. Si L es abeliana, entonces es soluble. En particular $L = 0$ es soluble.

2. Las álgebras de dimensión menor o igual que dos son solubles.
3. Sabemos vale $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)' = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$, luego $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ no es soluble si $n \geq 2$ ($\mathfrak{sl}_1(\Bbbk) = 0$ es soluble). Análogamente de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)' = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ se deduce que $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ no es soluble si $n \geq 2$ ($\mathfrak{gl}_1(\Bbbk) = \Bbbk$ es soluble).

Ejercicio 2.3. 1. Las álgebras de Lie de dimensión 3 no isomorfas a $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ son solubles ($\overline{\Bbbk} = \Bbbk$).

2. El álgebra $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ es soluble.

Proposición 2.4. *Sea L un álgebra.*

1. *Si L es soluble y $K < L$, entonces K es soluble.*
2. *Si L es soluble y $K \lhd L$, entonces L/K es soluble.*
3. *Si existe $K \lhd L$ tal que K y L/K son solubles, entonces L es soluble.*
4. *Si K y H son ideales solubles de L, entonces $K + H$ es un ideal soluble.* □

La proposición anterior implica que en toda álgebra L existe un (único) ideal soluble que contiene a todos los ideales solubles de L; este ideal se llama el *radical* de L y se escribe $\mathrm{rad}(L)$. Luego L es soluble si y solo si $\mathrm{rad}(L) = L$.

Ejercicio 2.5. Probar que si existe una sucesión de subálgebras $L = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_n = 0$ tales que $H_{k+1} \lhd H_k$ y H_k/H_{k+1} es abeliana, para todo k, entonces L es soluble.

Observación 2.6. Si las H_k son como arriba, entonces H_{n-1} es abeliana y $H_{k+1} \to H_k \to H_k/H_{k+1}$ es una sucesión exacta corta con H_k/H_{k+1} abeliana. Luego del ejercicio 2.5 y la observación 2.1 se deduce que las álgebras de Lie solubles son las que se obtienen por extensiones sucesivas de álgebras abelianas.

2.2. Álgebras nilpotentes

La *serie central descendiente* de un álgebra L es la sucesión de ideales $L^0 \supset L^1 \supset L^2 \supset \cdots$, definidos por

$$L^0 = L, \quad L^k = \left[L^{k-1}, L\right], \ \forall k = 1, 2, \ldots.$$

Notar $L^k/L^{k+1} \subset Z\left(L/L^{k+1}\right)$, para todo k. Un álgebra L se dice *nilpotente* si existe $m \geq 0$ tal que $L^m = 0$.

Observación 2.7. Si existe k tal que $L^{k+1} = L^k$, entonces $L^n = L^k$, para todo $n \geq k$. Luego si existe algún k tal que $L^{k+1} = L^k \neq 0$, entonces L no es nilpotente, y si $L \neq 0$ es nilpotente, entonces existe $m > 0$ tal que

$$L = L^0 \supsetneq L^1 \supsetneq \cdots \supsetneq L^{m-1} \supsetneq L^m = 0.$$

Notar que L^{m-1} es un ideal no nulo contenido en $Z(L)$; luego $Z(L) \neq 0$.

Ejemplos 2.8.

1. Si L es abeliana, entonces es nilpotente. En particular $L = 0$ es nilpotente.
2. Vale $L^{(k)} \subset L^k$, para todo k. Luego nilpotente implica soluble.
3. El álgebra no abeliana de dimensión 2 es soluble y no es nilpotente.
4. El álgebra $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ es abeliana y por lo tanto nilpotente.

Ejercicio 2.9. El álgebra $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ es nilpotente, mientras que el álgebra $\mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ es soluble y no es nilpotente.

Observación 2.10. Notar que $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ y $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ son dos ejemplos bien distintos de álgebras nilpotentes.

Proposición 2.11. *Sea L un álgebra.*

1. *Si L es nilpotente y $K < L$, entonces K es nilpotente.*
2. *Si L es nilpotente y $K \lhd L$, entonces L/K es nilpotente.* □

Proposición 2.12. *Sea L un álgebra. Si existe un ideal K de L contenido en el centro de L tal que L/K es nilpotente, entonces L es nilpotente.* □

Observación 2.13. Si $L = \Bbbk\{x, y\}$ con $[x, y] = x$, entonces $L^1 = \Bbbk\{x\}$. Luego $\dim L^1 = \dim L/L^1 = 1$. Entonces L^1 y L/L^1 son abelianas y por lo tanto nilpotentes, pero L no es nilpotente.

Esto muestra que una extensión de álgebras nilpotentes es soluble, pero no es necesariamente nilpotente.

Observación 2.14. Análogamente a lo que vimos en la observación 2.6, se tiene que las álgebras de Lie nilpotentes son las que se obtienen por "extensiones centrales" sucesivas de álgebras abelianas.

2.3. Observaciones

Observaciones 2.15.

1. Si L es un álgebra soluble o nilpotente, H, K son ideales de L y $\varphi : L \to \tilde{L}$ es un morfismo, entonces $H \cap K$, $H + K$ y $\mathrm{Im}(\varphi)$ son solubles o nilpotentes, respectivamente.
2. Sean $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ una extensión de cuerpos y L una $\Bbbk$-álgebra. Consideramos la $\mathbb{K}$-álgebra $\mathbb{K} \otimes_\Bbbk L$. Es inmediato observar que vale $(\mathbb{K} \otimes_\Bbbk L)^h = \mathbb{K} \otimes_\Bbbk L^h$ y $(\mathbb{K} \otimes_\Bbbk L)^{(h)} = \mathbb{K} \otimes_\Bbbk L^{(h)}$, para todo $h \in \mathbb{N}$. Luego L es soluble o nilpotente si y solo si $\mathbb{K} \otimes_\Bbbk L$ lo es. El resultado análogo para la restricción de escalares es inmediato, ya que las definiciones de L^h y $L^{(h)}$ ($h \in \mathbb{N}$) no involucran a los escalares.
3. Dada un álgebra L, siempre le podemos asociar la sucesión exacta corta

$$0 \to Z(L) \hookrightarrow L \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{ad}(L) \to 0.$$

Luego L es soluble o nilpotente si y solo si lo es $\mathrm{ad}(L)$. Notar que $\mathrm{ad}(L)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$.

3. Los teoremas de Engel, Lie y Cartan

En esta sección los espacios son de dimensión finita.

Una *bandera* en un espacio V es una cadena de subespacios $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ tales que

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V,$$

con $\dim V_i = i$, para todo $i = 0, \dots, n$.

Observación 3.1. Si $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ es una bandera en V, entonces existe una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{v_1, \dots, v_i\}$ es base de V_i, para todo $i = 1, \dots, n$. Recíprocamente, si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V y definimos $V_0 = 0$ y $V_i = \Bbbk\{v_1, \dots, v_i\}$, para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ es una bandera en V.

Sea $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ una bandera en V y consideremos

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}(\mathcal{V}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(V) : \ x(V_i) \subset V_{i-1}, \ \forall i = 1, \dots, n\}, \\ \mathfrak{b}(\mathcal{V}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(V) : \ x(V_i) \subset V_i, \ \forall i = 0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V tal que $\{v_1, \dots, v_i\}$ es base de V_i, para todo $i = 1, \dots, n$, entonces

$$x \in \mathfrak{n}(\mathcal{V}) \ \Leftrightarrow \ [x]_{\mathcal{B}} \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}; \qquad x \in \mathfrak{b}(\mathcal{V}) \ \Leftrightarrow \ [x]_{\mathcal{B}} \in \mathfrak{b}_n(\Bbbk) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego $\mathfrak{n}(\mathcal{V}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ es una subálgebra nilpotente, $\mathfrak{b}(\mathcal{V}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ es una subálgebra soluble y $\mathfrak{n}(\mathcal{V}) = \mathfrak{b}(\mathcal{V})'$. Notar que si $x \in \mathfrak{n}(\mathcal{V})$, entonces $x : V \to V$ es nilpotente (*i.e.* existe $m > 0$ tal que $x^m = 0$).

3.1. Los teoremas de Engel

Observación 3.2. Si $V \neq 0$ y $x : V \to V$ es nilpotente, entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que $x(v) = 0$.

Teorema 3.3 (Engel 1). *Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial y L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ formada por elementos nilpotentes. Entonces:*

1. *Existe $0 \neq v \in V$ tal que $x(v) = 0$, para todo $x \in L$.*
2. *Existe una bandera $\mathcal{V}$ en V tal que $L \subset \mathfrak{n}(\mathcal{V})$.*
3. *Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[x]_{\mathcal{B}}$ es estrictamente triangular superior, para todo $x \in L$.*

Luego L es nilpotente. □

Observaciones 3.4.

1. Es claro que vale también el recíproco, luego si L es una subálgebra de un $\mathfrak{gl}(V)$ con $V \neq 0$, entonces existe una bandera $\mathcal{V}$ en V tal que $L \subset \mathfrak{n}(\mathcal{V})$ si y solo si L está formada por elementos nilpotentes.
2. El conjunto $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ de las matrices diagonales es una subálgebra nilpotente de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk) \simeq \mathfrak{gl}(\Bbbk^n)$ que no está formada por elementos nilpotentes, luego no existe una bandera $\mathcal{V}$ en $\Bbbk^n$ tal que $\mathfrak{d}_n(\Bbbk) \subset \mathfrak{n}(\mathcal{V})$.

Decimos que un elemento $x \in L$ es ad-*nilpotente* si $\mathrm{ad}_x : L \to L$ es nilpotente.

Teorema 3.5 (Engel 2). *Un álgebra L es nilpotente si y solo si todo $x \in L$ es* ad-*nilpotente.* □

3.2. El teorema de Lie

Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$. Si $\lambda \in L^*$, definimos

$$V_\lambda^L = \{v \in V : \ x(v) = \lambda(x)v, \ \forall x \in L\}.$$

Decimos que un subespacio $W \subset V$ es *L-invariante* si $x(W) \subset W$, para todo $x \in L$.

Lema 3.6 (Dynkin). *Si L es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, A un ideal de L y $\lambda \in A^*$, entonces el subespacio V_λ^A es L-invariante.* $\square$

Observación 3.7. Si L es un álgebra y $A \subset L$ es un subespacio tal que $[L, L] \subset A$, entonces $A \lhd L$.

Teorema 3.8 (Lie). $\left(\overline{\Bbbk} = \Bbbk\right)$ *Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial y L una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$. Entonces*

1. *Existe $\lambda \in L^*$ tal que $V_\lambda^L \neq 0$.*
2. *Existe una bandera $\mathcal{V}$ en V tal que $L \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V})$.*
3. *Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[x]_\mathcal{B}$ es triangular superior, para todo $x \in L$.* $\square$

Corolario 3.9. $\left(\overline{\Bbbk} = \Bbbk\right)$ *Si L es soluble, entonces existe una bandera de ideales de L.* $\square$

Corolario 3.10. *Si L es soluble, entonces* $\mathrm{ad}_x : L \to L$ *es nilpotente, para todo $x \in [L, L]$.* $\square$

Observación 3.11. El corolario anterior se prueba usando primero el corolario 3.9 en el caso $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$; el caso general se obtiene pasando a $\overline{\Bbbk} \otimes L$, usando $\mathrm{ad}_{1 \otimes x} = \mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_x$, para todo $x \in L$.

Teorema 3.12. *Sea L un álgebra. Entonces L es soluble si y solo si $[L, L]$ es nilpotente.* $\square$

3.3. Descomposición de Jordan

En esta subsección es $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$.

Diremos que $x \in \mathcal{L}(V)$ es *semisimple*[6] si $x : V \to V$ es una transformación lineal diagonalizable.

Proposición 3.13. *Si $x \in \mathcal{L}(V)$, entonces existen únicos $s, n \in \mathcal{L}(V)$ tales que $x = s + n$ y $sn = ns$, siendo s semisimple y n nilpotente. Además existen dos polinomios $p, q \in \Bbbk[X]$ sin términos independientes, tales que $s = p(x)$ y $n = q(x)$.* $\square$

La descomposición $x = s + n$ se llama *descomposición de Jordan* de x, s es la parte *semisimple* y n es la parte *nilpotente* de x.

Ejercicio 3.14. Sea $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Si $x : V \to V$ es diagonalizable o nilpotente, entonces $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ es diagonalizable o nilpotente, respectivamente.

Proposición 3.15. *Si $x \in \mathcal{L}(V)$ y $x = s + n$ es su descomposición de Jordan, entonces* $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_s + \mathrm{ad}_n$ *es la descomposición de Jordan de* $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$. $\square$

Ejercicio 3.16. Sea (A, μ) un álgebra abstracta y $\delta \in \mathrm{Der}(A)$. Si escribimos $\mu(x, y) = x * y$, entonces

$$(\delta - (\lambda + \mu)\,\mathrm{id})^n (x * y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\delta - \lambda\,\mathrm{id})^i (x) * (\delta - \mu\,\mathrm{id})^{n-i}(y), \quad \forall \lambda, \mu \in \Bbbk, \ x, y \in A, \ n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 3.17. *Sea (A, μ) un álgebra abstracta de dimensión finita. Si $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ y $\delta = \delta_s + \delta_n$ es su descomposición de Jordan en $\mathcal{L}_\Bbbk(A)$, entonces $\delta_s, \delta_n \in \mathrm{Der}(A)$.* $\square$

[6] En general se dice que $x \in \mathcal{L}(V)$ es *semisimple* si su polinomio minimal tiene solo raíces simples, pero cuando $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$ esto equivale a que sea diagonalizable.

3.4. El criterio de Cartan

Observación 3.18. Si $x, y, z \in \mathfrak{gl}(V)$, entonces $\operatorname{tr}\big(x[y,z]\big) = \operatorname{tr}\big([x,y]x\big)$.

La prueba del criterio requiere del siguiente resultado.

Lema 3.19. $\big(\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}\big)$ *Sea V un espacio y $A \subset B$ subespacios de $\mathfrak{gl}(V)$. Consideremos $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) : [x, B] \subset A\}$. Si $x \in M$ verifica $\operatorname{tr}(xy) = 0$ para todo $y \in M$, entonces $x : V \to V$ es nilpotente.* □

Teorema 3.20 (Criterio de Cartan)**.** *Si L es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, entonces L es soluble si y solo si $\operatorname{tr}(xy) = 0$, para todo $x \in [L, L]$, $y \in L$.* □

Observación 3.21. El criterio de Cartan se prueba usando primero el lema anterior en el caso $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$; el caso general se obtiene pasando a $\overline{\mathbb{k}} \otimes L < \overline{\mathbb{k}} \otimes \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \simeq \mathfrak{gl}_{\overline{\mathbb{k}}}\big(\overline{\mathbb{k}} \otimes V\big)$, usando $\operatorname{tr}(a \otimes x) = a \operatorname{tr}(x)$, $\forall a \in \overline{\mathbb{k}}$ y $x \in L$.

4. Semisimplicidad

En esta sección L es un álgebra arbitraria.

4.1. Forma de Killing

La *forma de Killing* de L es la forma bilineal simétrica $\kappa_L : L \times L \to \mathbb{k}$ definida por

$$\kappa_L(x, y) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y), \qquad \forall x, y \in L.$$

Cuando no de lugar a confusión escribiremos κ en vez de κ_L.

Ejemplos 4.1. 1. Sea L el álgebra no abeliana de dimensión 2 con base $\mathcal{B} = \{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$. La matriz asociada a su forma de Killing en la base $\mathcal{B}$ es $M_{\mathcal{B}}(\kappa) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Sea $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ con base $\mathcal{B} = \{e, f, h\}$ tales que $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$ y $[h, f] = -2f$. Entonces

$$M_{\mathcal{B}}(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observación 4.2. La forma de Killing verifica: $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$, $\forall x, y, z \in L$.

Lema 4.3. *Sea V un espacio de dimensión finita y $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Si $W \subset V$ es un subespacio tal que $\operatorname{Im}(\varphi) \subset W$ (lo cual implica $\varphi(W) \subset W$), entonces $\operatorname{tr}(\varphi) = \operatorname{tr}(\varphi|_W)$.* □

Proposición 4.4. *Si K es un ideal de L, entonces $\kappa_K = \kappa_L|_{K \times K}$.* □

Observación 4.5. La proposición anterior no vale para subálgebras.

Ejemplos 4.6. 1. Es un ejercicio el probar que la forma de Killing de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ es

$$\kappa(x, y) = 2n \operatorname{tr}(xy) - 2 \operatorname{tr}(x) \operatorname{tr}(y), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}).$$

Luego la forma de Killing de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ es $\kappa(x, y) = 2n \operatorname{tr}(xy)$.

2. Se prueba que la forma de Killing del álgebra ortogonal $\mathfrak{so}_n(\mathbb{k}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ es

$$\kappa(x, y) = (n - 2) \operatorname{tr}(xy), \quad \forall x, y \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{k}),$$

y la del álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{k}) \subset \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$ es

$$\kappa(x, y) = 2(n + 1) \operatorname{tr}(xy), \quad \forall x, y \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{k}).$$

Si κ es la forma de Killing de L y A es un subconjunto de L, definimos

$$A^{\perp} = \{x \in L : \ \kappa(x, y) = 0, \ \forall y \in A\}.$$

Claramente $A^{\perp}$ es un subespacio de L. Notar que κ es no degenerada si y solo si $L^{\perp} = 0$.

Ejemplo 4.7. Si $L = \Bbbk\{x, y\}$ es el álgebra no abeliana de dimensión 2 (ejemplo 4.1), entonces $L^{\perp} = \Bbbk\{x\}$.

Proposición 4.8.
1. *Si $K \lhd L$, entonces $K^{\perp} \lhd L$. En particular $L^{\perp} \lhd L$.*
2. *Si K es un ideal abeliano de L, entonces $K \subset L^{\perp}$.* □

Proposición 4.9 (Cartan)**.** *L es soluble si y solo si $\kappa(x, y) = 0$, para todo $x \in [L, L]$, $y \in L$.* □

Observación 4.10. Si la forma de Killing de L es nula, entonces es claro que L es soluble. Por otro lado el álgebra no abeliana de dimensión 2 es soluble y su forma de Killing no es nula.

Corolario 4.11. *El ideal $L^{\perp}$ es soluble; luego $L^{\perp} \subset \operatorname{rad}(L)$.* □

4.2. Semisimplicidad

Un álgebra L se dice *semisimple* si $\operatorname{rad}(L) = 0$, es decir, si L no contiene ideales solubles no nulos.

Proposición 4.12. *Un álgebra es semisimple si y solo si no contiene ideales abelianos no nulos.* □

Observaciones 4.13.
1. Un álgebra L es semisimple y soluble si y solo si $L = 0$.
2. Toda álgebra simple es semisimple.
3. Si $L \neq 0$ es semisimple, entonces $\dim L \geq 3$. Eso se debe a que las álgebras de dimensión menor o igual que dos son solubles. De las álgebras con dimensión 3 $\big($y $\overline{\Bbbk} = \Bbbk\big)$, tenemos que $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ es simple (y por lo tanto semisimple) y las otras son solubles.

Proposición 4.14. *Para toda álgebra L se cumple que $L/\operatorname{rad}(L)$ es semisimple.* □

Proposición 4.15. *Un álgebra L es semisimple si y solo si su forma de Killing es no degenerada.* □

Decimos que un ideal K de L es *simple* o *semisimple*, si lo es como álgebra. Tener en cuenta que los ideales de K (pensando K como álgebra) son subálgebras de L, pero no necesariamente son ideales de L.

Proposición 4.16. *Sea L un álgebra y $K_1, \dots, K_t$ ideales de L tales que $L = K_1 \oplus \cdots \oplus K_t$. Entonces*
1. *Para cada $i = 1, \dots, t$, se cumple que si H es un ideal de K_i, entonces H es un ideal de L.*
2. *Vale $L^{\perp} = \tilde{K}_1^{\perp} \oplus \cdots \oplus \tilde{K}_t^{\perp}$, siendo $\tilde{K}_h^{\perp} := K_h^{\perp} \cap K_h = \{x \in K_h : \ \kappa(x, y) = 0, \ \forall y \in K_h\}$.*
3. *El álgebra L es semisimple si y solo si $K_1, \dots, K_t$ son ideales semisimples.* □

Corolario 4.17. *Si $L_1, \dots, L_t$ son álgebras simples, entonces $L = L_1 \times \cdots \times L_t$ es semisimple.* □

Observación 4.18. Sea V un espacio de dimensión finita y $\kappa : V \times V \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Si W es un subespacio de V y consideramos $W^{\perp} = \{v \in V : \ \kappa(v, w) = 0, \ \forall w \in W\}$, entonces $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$ (en general **no** vale $V = W \oplus W^{\perp}$).

Proposición 4.19. *Si L es un álgebra semisimple y K es un ideal de L, entonces $L = K \oplus K^{\perp}$.* □

Corolario 4.20. *Si L es un álgebra semisimple y K es un ideal de L, entonces K y L/K son semisimples. Luego toda imagen homomórfica de L es semisimple.* □

Observación 4.21. Si $L \neq 0$ es un álgebra arbitraria y $0 \neq x \in L$, entonces $H = \Bbbk\{x\}$ es una subálgebra de L que es soluble y no nula, y por lo tanto H no es semisimple. Luego una subálgebra de un álgebra semisimple no tiene porqué ser semisimple.

Teorema 4.22. *Sea $L \neq 0$ un álgebra semisimple.*

1. *Existen $K_1, \ldots, K_t$ ideales simples de L tales que $L = K_1 \oplus \cdots \oplus K_t$.*
2. *Todo ideal simple de L coincide con algún K_i. Luego la descomposición de arriba es única a menos del orden de los sumandos.*
3. *Todo ideal no nulo de L es suma directa de ideales simples de L.*
4. *$L = [L, L]$.* □

Observación 4.23. El teorema anterior implica que si un álgebra semisimple tiene dimensión menor que 6, entonces es simple. En dimensión 6 tenemos $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \oplus \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ que es un álgebra semisimple que no es simple.

Observación 4.24. Toda álgebra L se puede poner en una sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{rad}(L) \to L \to L/\operatorname{rad}(L) \to 0.$$

Se prueba que esta sucesión se escinde (*teorema de Levi*, ver [2]) y por lo tanto existe una subálgebra $H \subset L$ tal que $L = \operatorname{rad}(L) \oplus H$, siendo $\operatorname{rad}(L)$ un ideal soluble y $H \simeq L/\operatorname{rad}(L)$ una subálgebra semisimple. En esta situación se dice que $L = \operatorname{rad}(L) \oplus H$ es una *descomposición de Levi* de L.

Más adelante veremos otras propiedades de las álgebras semisimples, que se prueban usando representaciones.

5. Representaciones

En esta sección es $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$. Algunos resultados no requieren esta hipótesis (por ejemplo, no se necesita en la subsección siguiente), pero los más importantes sí, así que para no estar agregando esta hipótesis todo el tiempo, la imponemos desde el principio.

5.1. Definiciones y resultados básicos

Sea L un álgebra.

Una *representación lineal* de L es un morfismo $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$, siendo V un espacio vectorial (V puede ser de dimensión infinita). Una *representación matricial* de L es un morfismo $\rho : L \to \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, para cierto n. Es equivalente tener una representación matricial a tener una representación lineal de dimensión finita.

Si $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación, entonces $\rho(L) \subset \mathfrak{gl}(V)$ es una subálgebra y $\operatorname{Ker}(\rho) \subset L$ es un ideal. La representación $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ se dice *fiel* si $\operatorname{Ker}(\rho) = 0$; en este caso es $L \simeq \rho(L) < \mathfrak{gl}(V)$.

Observación 5.1. Toda álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ admite una representación fiel (*teorema de Ado*, ver [2]) y por lo tanto es isomorfa a un álgebra de Lie lineal.

Una *acción* de L en un espacio vectorial V es un mapa $\Bbbk$-bilineal $L \times V \xrightarrow{\cdot} V$ que verifica

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v), \qquad \forall x, y \in L,\ v \in V.$$

Si existe una acción de L en V diremos que L *actúa* en V y que el par $(V, \cdot)$ es un *L-módulo*. Cuando no dé lugar a confusión diremos simplemente que V es un L-módulo. Es equivalente tener una representación lineal de L en V a tener en V una estructura de L-módulo (definir $\rho_x(v) = x \cdot v$, para todo $x \in L$, $v \in V$).

Observación 5.2. Si A es un álgebra asociativa, un A-*módulo* es un par $(V,\cdot)$ en el cual V es un espacio vectorial y $A\times V \xrightarrow{\cdot} V$ es una *acción* de A en V, es decir, un mapa bilineal tal que

$$1\cdot v = v,\ \forall v\in V;\quad (xy)\cdot v = x\cdot(y\cdot v),\ \forall x,y\in A,\ v\in V.$$

Es claro que si V es un A-módulo, entonces la misma acción le da a V una estructura de A_{Lie}-módulo.

Ejemplos 5.3.

1. Si L es un álgebra de Lie abeliana, entonces una transformación lineal $\rho: L\to\mathfrak{gl}(V)$ es una representación si y solo si $\rho_x\rho_y=\rho_y\rho_x$, para todo $x,y\in L$. Notar que para que ρ sea una representación, alcanza con que se verifique esta condición en los elementos de una base de L.

   En particular, si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de L y $\varphi\in\mathfrak{gl}(V)$ es arbitraria, entonces podemos definir una representación $\rho: L\to\mathfrak{gl}(V)$ mediante $\rho_{e_1}=\varphi$ y $\rho_{e_2}=\cdots=\rho_{e_n}=0$ (y extendiendo linealmente).

2. Toda transformación lineal $\rho:\mathbb{k}\to\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ es una representación del álgebra del Lie (abeliana) $\mathbb{k}$, y es de la forma $\rho_x=xA$ para todo $x\in\mathbb{k}$, siendo $A=\rho_1$ una matriz arbitraria fija. En lo que sigue veremos para $n=2$ que, tomando distintos valores de A, podemos obtener representaciones de $\mathbb{k}$ con propiedades bien diferentes.

   a) Si $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, entonces $\rho_x=\left(\begin{smallmatrix}0&x\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ es nilpotente para todo $x\in\mathbb{k}$.

   b) Si $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)$, entonces $\rho_x=\left(\begin{smallmatrix}x&x\\0&2x\end{smallmatrix}\right)$ es diagonalizable para todo $x\in\mathbb{k}$.

   c) Si $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, entonces $\rho_x=\left(\begin{smallmatrix}x&x\\0&x\end{smallmatrix}\right)$ no es diagonalizable para ningún $0\neq x\in\mathbb{k}$.

3. La representación *adjunta* de L es $\mathrm{ad}: L\to\mathfrak{gl}(L)$. Notar que ad es fiel si y solo si $Z(L)=0$; en este caso es $L\simeq\mathrm{ad}(L)<\mathfrak{gl}(L)$. Por ejemplo, si L es semisimple, entonces ad es fiel.

4. Si $L\subset\mathfrak{gl}(V)$ es un álgebra lineal, entonces la inclusión $L\hookrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ es una representación fiel llamada la representación *natural* de L.

5. La representación *natural* de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ en $\mathbb{k}^n$ es el isomorfismo canónico $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})\simeq\mathfrak{gl}(\mathbb{k}^n)$. Corresponde a $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ actuando en $\mathbb{k}^n$ por multiplicación.

6. La representación *trivial* de L es el morfismo nulo $L\xrightarrow{0}\mathfrak{gl}(\mathbb{k})\simeq\mathbb{k}$. Nunca es fiel a menos que $L=0$.

7. Si V es un espacio arbitrario, entonces el morfismo nulo $L\xrightarrow{0}\mathfrak{gl}(V)$ es una representación de L en V. En ese caso se dice que L *actúa trivialmente* en V.

El álgebra envolvente. Sabemos que a toda álgebra asociativa A le podemos dar una estructura de álgebra de Lie, definiendo $[x,y]=xy-yx$, para todo $x,y\in A$. Ahora veremos una correspondencia en sentido contrario, de las álgebras de Lie a las álgebras asociativas.

Sea L un álgebra de Lie. Consideremos $T(L)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}T^nL$ el álgebra tensorial sobre el espacio L. Definimos

$$U(L):=\frac{T(L)}{\langle x\otimes y-y\otimes x-[x,y]:\ x,y\in L\rangle}.$$

El álgebra asociativa $U(L)$ es el *álgebra envolvente* (o *universal*) de L. Consideremos el mapa $\iota: L\to U(L)$ definido por $L\hookrightarrow T(L)\xrightarrow{\pi}U(L)$, siendo $\pi: T(L)\to U(L)$ la proyección canónica. Notar que $\iota: L\to U(L)_{\mathrm{Lie}}$ es un morfismo de álgebras de Lie.

Proposición 5.4 (Propiedad universal del álgebra envolvente)**.** *Para toda álgebra asociativa A y todo morfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \to A_{Lie}$, existe un único morfismo de álgebras asociativas $\hat{\varphi} : U(L) \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & A \\ U(L) \arrow[ur, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \square$$

Como en la defininción de $U(L)$ el ideal por el que dividimos está generado por elementos de grado mayor o igual que 1, se tiene que la restricción de $\pi : T(L) \to U(L)$ a $\Bbbk \subset T(L)$ es inyectiva. Luego pensamos $\Bbbk \subset U(L)$. Para simplificar las ideas, en lo que sigue asumiremos que L tiene dimensión finita (aunque no es necesario).

Teorema 5.5 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de L, entonces*

$$\{1\} \cup \{\iota(e_{i_1}) \cdots \iota(e_{i_k}) : \ 1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n, \ k = 1, 2, \dots\}$$

es una base de $U(L)$. $\square$

Al resultado anterior se le suele llamar el *teorema PBW* (para una prueba, ver por ejemplo [3]).

Corolario 5.6. *El mapa $\iota : L \to U(L)$ es inyectivo.* $\square$

Luego podemos pensar $L \subset U(L)$. En ese sentido, un elemento genérico de $U(L)$ se puede escribir como suma de elementos de $\Bbbk$ con elementos de la forma $x_1 \cdots x_n$, siendo $x_1 \dots x_n \in L$, $n = 1, 2, \dots$

Si $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación del álgebra de Lie L, entonces la propiedad universal de $U(L)$ nos dice que ρ induce un morfismo de álgebras asociativas $\hat{\rho} : U(L) \to \mathcal{L}(V)$, lo cual es lo mismo que una estructura de $U(L)$-módulo en V. Recíprocamente, toda estructura de $U(L)$-módulo en un espacio V, equivale a tener un morfismo de álgebras asociativas $\eta : U(L) \to \mathcal{L}(V)$, lo cual induce un morfismo de álgebras de Lie $\eta|_L : L \hookrightarrow U(L) \xrightarrow{\eta} \mathfrak{gl}(V)$ y por lo tanto una estructura de L-módulo en V. En resumen, es equivalente tener en un espacio V una estructura de L-módulo (en el sentido de álgebras de Lie) que una estructura de $U(L)$-módulo (en el sentido de álgebras asociativas).

Submódulos. Si $(V, \cdot)$ es un L-módulo, un L-*submódulo* es un subespacio W de V tal que $x \cdot w \in W$, para todo $w \in W$ y $x \in L$. El módulo *trivial* es 0. Un módulo V siempre tiene a 0 y V por submódulos, todo otro submódulo se dice *propio*. Claramente un L-submódulo $W \subset V$ es un L-módulo restringiendo la acción en V a W. Notar que los submódulos de la representación adjunta son los ideales.

Ejemplo 5.7. Si L es un álgebra de Lie abeliana y consideramos la representación de L en un espacio vectorial V vista en el ejemplo 5.3.1, entonces los L-submódulos de V son sus subespacios φ-invariantes.

Sea V un L-módulo. Si $\{W_i\}_{i \in K}$ es una familia de submódulos de V, entonces $\bigcap_{i \in K} W_i$ y $\sum_{i \in K} W_i$ son submódulos de V.

El *submódulo generado* por un subconjunto S de V es la intersección de todos los submódulos de V que contienen a S, y por lo tanto es el menor submódulo de V que contiene a S. Para describirlo es mejor pensar a V como $U(L)$-módulo. El L-submódulo generado por $v \in V$ coincide con el $U(L)$-submódulo generado por $v \in V$, que es $U(L) \cdot v = \{z \cdot v : \ z \in U(L)\}$. Notar que si $x_1, \dots, x_n \in L$ y consideramos $x_1 \cdots x_n \in U(L)$, entonces

$$(x_1 \cdots x_n) \cdot v = x_1 \cdot (x_2 \cdot (\cdots (x_n \cdot v) \cdots)). \tag{5}$$

Luego el L-submódulo generado por un elemento $v \in V$ se puede describir mediante

$$\Bbbk\{v\} + \Bbbk\{(x_1 \cdots x_n) \cdot v : \ \forall x_1, \dots, x_n \in L, \ n = 1, 2, \dots\}.$$

El *espacio de invariantes* de V es $V^L := \{v \in V : \ x \cdot v = 0, \ \forall x \in L\}$; es un submódulo trivial maximal.

Un *morfismo* de L-módulos entre dos L-módulos V y W es un mapa lineal $\varphi : V \to W$ que verifica $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$, para todo $x \in L$, $v \in V$. Si $\varphi : V \to W$ es un morfismo, entonces $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset V$ y $\operatorname{Im}(\varphi) \subset W$ son submódulos; además, si $V_0 \subset V$ y $W_0 \subset W$ son submódulos, entonces $\varphi(V_0) \subset W$ y $\varphi^{-1}(W_0) \subset V$ son submódulos. Las nociones de *epimorfismo*, *monomorfismo* e *isomorfismo* son las de siempre. Al conjunto de los morfismos de V en W lo escribimos $\operatorname{Hom}_L(V, W)$. Es fácil de probar que $\operatorname{Hom}_L(V, W)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(V, W)$ y por lo tanto $\operatorname{Hom}_L(V, W)$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares usuales.

Cocientes. Si W es un submódulo de V, entonces el espacio cociente V/W tiene estructura de L-módulo definiendo $x \cdot \overline{v} = \overline{x \cdot v}$ y el mapa canónico $\pi : V \to V/W$ es un epimorfismo de L-módulos.

Proposición 5.8 (Propiedad universal del cociente)**.** *Si $\varphi : V \to W$ es un morfismo y $U \subset V$ es un submódulo tal que $U \subset \operatorname{Ker}\varphi$, entonces existe un único morfismo $\hat{\varphi} : V/U \to W$ tal que $\hat{\varphi}(\overline{v}) = \varphi(v)$, para todo $v \in V$.* □

Proposición 5.9 (Teoremas de isomorfismo)**.**

1. *Si $\varphi : V \to W$ es un epimorfismo, entonces $W \simeq V/\operatorname{Ker}(\varphi)$.*
2. *Si U y W son submódulos de V, entonces $\frac{U+W}{U} \simeq \frac{W}{U \cap W}$.*
3. *Si U y W son submódulos de V con $U \subset W$, entonces $\frac{V/U}{W/U} \simeq V/W$.* □

Observación 5.10. El segundo teorema de isomorfismo implica que si $V = U \oplus W$, entonces $V/U \simeq W$.

Proposición 5.11. *Sea V un L-módulo y V_0 un submódulo de V. Consideremos*

$$\mathcal{A} = \{W : \ V_0 \subset W \subset V, \ W \text{ submódulo de } V\}, \quad \mathcal{B} = \{U : \ U \text{ es submódulo de } V/V_0\}.$$

Entonces las correspondencias

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathcal{B} \\ W & \mapsto & W/V_0 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \mathcal{A} \\ U & \mapsto & \pi^{-1}(U) \end{array}$$

son inversas una de la otra y preservan el orden de inclusión. □

Operaciones con módulos. Sean V y W dos L-módulos.

1. El espacio $\mathcal{L}(V, W)$ es un L-módulo definiendo $(x \cdot \varphi)(v) = x \cdot \varphi(v) - \varphi(x \cdot v)$. Notar que el espacio de invariantes $\mathcal{L}(V, W)^L$ coincide con el espacio de morfismos de L-módulos $\operatorname{Hom}_L(V, W)$.

   En particular V^* es un L-módulo definiendo $(x \cdot \alpha)(v) = -\alpha(x \cdot v)$.

2. El producto cartesiano $V \times W$ es un L-módulo definiendo $x \cdot (v, w) = (x \cdot v, x \cdot w)$.

3. Si $\{V_i\}_{i \in I}$ es una familia de L-módulos, entonces su producto cartesiano $\prod_{i \in I} V_i$ es un L-módulo definiendo $x \cdot (v_i)_{i \in I} = (x \cdot v_i)_{i \in I}$. Notar que la suma directa $\bigoplus_{i \in I} V_i$ es un submódulo de $\prod_{i \in I} V_i$. Luego $\bigoplus_{i \in I} V_i$ es un L-módulo definiendo $x \cdot \sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} x \cdot v_i$.

4. El producto tensorial $V \otimes W$ es un L-módulo definiendo $x \cdot (v \otimes w) = (x \cdot v) \otimes w + v \otimes (x \cdot w)$.

5. Si $V_1, \ldots, V_n$ son L-módulos, entonces su producto tensorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ es un L-módulo definiendo

$$x \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes (x \cdot v_i) \otimes \cdots \otimes v_n.$$

6. El álgebra tensorial $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n V$ es un L-módulo con la estructura de la suma directa, definiendo que L actúa en $T^0 V = \Bbbk$ en forma trivial y en $T^n V = V^{\otimes n}$ $(n \geq 1)$ como en el ítem anterior.

7. Las álgebras exterior $\Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n V$ y simétrica $S(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V$ son L-módulos definiendo

$$x \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \wedge \cdots \wedge (x \cdot v_i) \wedge \cdots \wedge v_n, \quad x \cdot (v_1 \cdots v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \cdots (x \cdot v_i) \cdots v_n.$$

Notar que L actúa en $T(V)$ por derivaciones: $x \cdot (ab) = (x \cdot a)b + a(x \cdot b)$, para todo $x \in L$, $a, b \in T(V)$; lo mismo sucede con la acción de L en $\Lambda(V)$ y $S(V)$. Además, las componentes homogéneas $T^n V \subset T(V)$, $\Lambda^n V \subset \Lambda(V)$ y $S^n V \subset S(V)$ son L-submódulos, para todo n.

Sucesión exacta corta. Una *sucesión exacta corta* de L-módulos es una sucesión de morfismos de módulos

$$0 \to V_1 \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} V_2 \to 0 \tag{6}$$

tales que φ es un monomorfismo, ψ es un epimorfismo y $\operatorname{Ker}(\psi) = \operatorname{Im}(\varphi)$.

Ejemplos 5.12. 1. Si V es un módulo y $W \subset V$ es un submódulo, entonces $W \hookrightarrow V \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} V/W$ es una sucesión exacta corta. De la misma forma que en el caso de álgebras, se prueba que toda sucesión exacta corta es esencialmente de este tipo.

2. Si $\varphi : V_1 \to V_2$ es un epimorfismo de módulos, entonces $\operatorname{Ker}(\varphi) \hookrightarrow V_1 \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} V_2$ es una sucesión exacta corta.

3. Si V es un módulo y $W_1, W_2 \subset V$ son submódulos tales que $V = W_1 \oplus W_2$, entonces $W_1 \xrightarrow{\iota_1} V \xrightarrow{\rho_2} W_2$ y $W_2 \xrightarrow{\iota_2} V \xrightarrow{\rho_1} W_1$ son sucesiones esactas cortas, siendo ι_1, ι_2 y ρ_1, ρ_2 las inclusiones y proyecciones asociadas a la suma directa,

Decimos que la sucesión exacta corta (6) *se escinde* si existe un morfismo $\eta : V_2 \to V$ tal que $\psi\eta = \mathrm{id}_{V_2}$.

Proposición 5.13. *Dada una sucesión exacta corta* (6)*, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Existe un morfismo* $\eta : V_2 \to V$ *tal que* $\psi\eta = \mathrm{id}_{V_2}$.

2. *Existe un morfismo* $\nu : V \to V_1$ *tal que* $\nu\varphi = \mathrm{id}_{V_1}$.

3. *Existe un isomorfismo* $\alpha : V \to V_1 \oplus V_2$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & V_2 \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ V_1 \arrow[r, "\iota"] & V_1 \oplus V_2 \arrow[r, "\rho"] & V_2 \end{tikzcd} \qquad \square$$

Los siguientes resultados son consecuencia directa del lema de Dynkin y del teorema de Lie.

Lema 5.14 (Dynkin)**.** *Si V un L-módulo de dimensión finita, A un ideal de L y $\lambda \in A^*$, entonces el subespacio $V_\lambda^A := \{v \in V : \ x \cdot v = \lambda(x)v, \ \forall x \in A\}$ es un L-submódulo de V.* □

Teorema 5.15 (Lie)**.** *Sea L soluble y $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación, con $0 \neq V$ de dimensión finita. Entonces:*

1. *Existen $\lambda \in L^*$ y $0 \neq v \in V$ tales que $x \cdot v = \lambda(x)v$, para todo $x \in L$.*
2. *Existe una bandera $\mathcal{V}$ en V formada por submódulos de V.*
3. *Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[\rho_x]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior, para todo $x \in L$.* □

Observación 5.16. Queda como ejercicio dar una versión del primer teorema de Engel para representaciones.

5.2. Reducibilidad

Un módulo V se dice *irreducible* si $V \neq 0$ y no tiene submódulos propios y se dice *indescomponible* si $V \neq 0$ y no se puede escribir como suma directa de submódulos propios. Es claro que irreducible implica indescomponible. Notar que si V es un módulo de dimensión uno, entonces V es irreducible.

Ejemplo 5.17. Si $L = \mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ y consideramos $V = \Bbbk^n$ como L-módulo con la representación natural, entonces es un ejercicio el probar que los L-submódulos de V forman una bandera

$$0 \neq W_1 \subset \cdots \subset W_n = V, \quad W_i = \Bbbk\{e_1, \ldots, e_i\}, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

siendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de V. Luego V es indescomponible, y si $n > 1$, entonces V no es irreducible.

Observaciones 5.18.
1. Si V es un módulo no nulo de dimensión finita, entonces V es indescomponible o se escribe como suma directa de submódulos indescomponibles.
2. Si V es un módulo de dimensión uno, entonces V es irreducible.
3. Si consideramos a L como L-módulo con la representación adjunta, entonces los submódulos de L son los ideales. Todo ideal simple es un submódulo irreducible. Notar que un ideal de dimensión uno es un submódulo irreducible, pero no es un ideal simple.

Proposición 5.19 (Lema de Schur)**.** *Sean V y W dos módulos irreducibles.*

1. *Si $\varphi : V \to W$ es un morfismo, entonces $\varphi = 0$ o φ es un isomorfismo.*
2. *Si $\varphi : V \to V$ es un morfismo y $\dim V < \infty$, entonces existe $\lambda \in \Bbbk$ tal que $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$.* □

Un módulo V se dice *completamente reducible* si $V = 0$ o V se puede descomponer de la forma $V = \bigoplus_{i\in\Lambda} V_i$, siendo cada $V_i \subset V$ un submódulo irreducible. Notar que si la dimensión de V es finita, entonces V es completamente reducible si y solo si $V = 0$ o se puede escribir de la forma $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, siendo $V_1, \ldots, V_k$ una familia finita de submódulos irreducibles de V.

Ejemplos 5.20.
1. Sea $L = \mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ con $n \geq 2$. Si consideramos $V = \Bbbk^n$ como L-módulo con la representación natural, entonces el ejemplo 5.17 muestra que V no es completamente reducible.
2. Si $L = \mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ y consideramos $V = \Bbbk^n$ como L-módulo con la representación natural, entonces cada $\Bbbk\{e_i\}$ es un L-submódulo de V y por lo tanto $V = \bigoplus_{i=1}^n \Bbbk\{e_i\}$ es completamente reducible. Notar si $i \neq j$, entonces $\Bbbk\{e_i\} \not\simeq \Bbbk\{e_j\}$ como L-módulos.

3. Si $L \neq 0$ es un álgebra abeliana, entonces L siempre admite una representación que no es completamente reducible. Para verlo usamos el método del ejemplo 5.3.1. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L y $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\Bbbk)$, entonces podemos definir una acción de L en $\Bbbk^2$ mediante

$$e_1 \cdot v = Av, \quad e_i \cdot v = 0, \ i = 2, \ldots, n, \quad \forall v \in \Bbbk^2.$$

   Es fácil de probar que el único submódulo propio de $\Bbbk^2$ es el subespacio generado por el vector $(1, 0)$. Luego $\Bbbk^2$ es indescomponible y por lo tanto no puede ser completamente reducible.

Observación 5.21. Si consideramos el álgebra abeliana $L = \mathfrak{d}_2(\Bbbk)$, entonces el primer ejemplo nos da una estructura de L-módulo en $\Bbbk^2$ que es completamente reducible, mientras que el segundo ejemplo nos da otra estructura en $\Bbbk^2$ que no es completamente reducible.

Lema 5.22. *Si un módulo V verifica que todo submódulo de V es un sumando directo, es decir que para cada submódulo $V_1 \subset V$ existe un submódulo $V_2 \subset V$ tal que $V = V_1 \oplus V_2$, entonces todo submódulo de V verifica la misma propiedad.* □

Proposición 5.23. *Sea $V \neq 0$ un módulo de dimensión finita*[7]*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *V se escribe como suma directa de submódulos irreducibles,* i.e. *V es completamente reducible.*
2. *V se escribe como suma de submódulos irreducibles.*
3. *Todo submódulo de V es un sumando directo.*
4. *Toda sucesión exacta corta $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$ se escinde.* □

Corolario 5.24. *Si V es un módulo completamente reducible de dimensión finita y W es un submódulo de V, entonces W y V/W son módulos completamente reducibles.* □

Observación 5.25. El recíproco de la proposición anterior es falso. Si consideramos $L = \mathfrak{b}_2(\Bbbk)$ y $V = \Bbbk^2$ con la representación natural, entonces $W = \Bbbk\{e_1\}$ es el único submódulo propio de V (ejemplo 5.17). Como es $\dim W = \dim V/W = 1$, entonces W y V/W son irreducibles, pero V no es completamente reducible.

En lo que sigue V es un espacio de dimensión finita.

Proposición 5.26. *Si L es soluble y V es un L-módulo irreducible, entonces* $\dim V = 1$. □

Proposición 5.27. *Sea $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación con L semisimple, entonces:*

1. *$\rho(L) \subset \mathfrak{sl}(V)$.*
2. *Si* $\dim V = 1$*, entonces $\rho = 0$.* □

[7]Siempre vale 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) y 3) $\Leftrightarrow$ 4) . La hipótesis de dimensión finita solo se necesita para probar 3) $\Rightarrow$ 1).

5.3. El teorema de Weyl

En esta sección L es un álgebra semisimple y las representaciones son de dimensión finita.

El operador de Casimir. Sea $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación. Definimos una forma bilineal simétrica $\beta_V : L \times L \to \Bbbk$ mediante $\beta_V(x, y) = \operatorname{tr}(\rho_x \rho_y)$, para todo $x, y \in L$. Esta forma es L-invariante, es decir, verifica

$$\beta_V\big([x, y], z\big) = \beta_V\big(x, [y, z]\big), \quad \forall x, y, z \in L.$$

Esto implica que $N(\beta_V) := \{x \in L : \ \beta_V(x, y) = 0, \ \forall y \in L\}$ es un ideal de L.

Supongamos primero que ρ es una representación fiel. El criterio de Cartan implica que $\rho\big(N(\beta_V)\big)$ es una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$ y por lo tanto $N(\beta_V)$ es un ideal soluble de L. Luego $N(\beta_V) = 0$ y $\beta_V : L \times L \to \Bbbk$ es no degenerada.

Sean $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dos bases de L duales respecto a β_V, es decir, tales que $\beta_V(x_i, y_j) = \delta_{i,j}$, para todo i, j. A $c = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in U(L)$ se le llama el *elemento de Casimir* de la representación ρ.

Observación 5.28. Si B_1, B_1^* y B_2, B_2^* son dos pares de bases duales de L, y $M = {}_{B_2}[\mathrm{id}]_{B_1}$ y $N = {}_{B_2^*}[\mathrm{id}]_{B_1^*}$ son las matrices de cambio de base, entonces $N^t = M^{-1}$. Usando esto se ve que la definición del elemento de Casimir no depende de la elección de las bases duales.

Lema 5.29. *Sea $x \in L$. Si $[x, x_i] = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_j$, entonces $[x, y_i] = \sum_{i=1}^n (-a_{ij}) y_j$.* □

Proposición 5.30. *El elemento de Casimir $c \in U(L)$ verifica $cx = xc$, para todo $x \in L$. Luego c está en el centro de $U(L)$.* □

El *operador de Casimir* de la representación $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es $\gamma := \rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_{x_i} \rho_{y_i} : V \to V$. Explícitamente, $\gamma(v) = c \cdot v = \sum_{i=1}^n \ x_i \cdot (y_i \cdot v)$, para todo $v \in V$.

Proposición 5.31. *1. El operador de Casimir $\gamma : V \to V$ es un morfismo de L-módulos.*

2. Vale $\operatorname{tr}(\gamma) = \dim L$.

3. Si $W \subset V$ es un L-submódulo, entonces W es γ-invariante. □

Consideremos ahora $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación arbitraria. Si ρ no es fiel, como L es semisimple, sabemos que es $L = \operatorname{Ker}(\rho) \oplus H$, siendo $H = \operatorname{Ker}(\rho)^\perp$ un ideal semisimple de L. La restricción de ρ a H es una representación fiel de H en V. Luego llamamos *operador de Casimir* del L-módulo V al operador de Casimir de V pensado como H-módulo. Explícitamente, $\gamma = \sum_{i=1}^m \rho_{x_i} \rho_{y_i}$, siendo $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ un par de bases duales de H respecto a β_V. Este operador $\gamma : V \to V$ verifica todas las propiedades de la proposición anterior, salvo que es $\operatorname{tr}(\gamma) = \dim L - \dim \operatorname{Ker}(\rho)$. Esto implica que si si $\rho \neq 0$, entonces $\operatorname{tr}(\gamma) \neq 0$.

Teorema 5.32 (Weyl)**.** *Sea L un álgebra semisimple. Si $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de dimensión finita, entonces V es completamente reducible.*

Dem. (idea) Si $\rho = 0$, es obvio; así que asumiremos $\rho \neq 0$ (luego $L \neq 0$ y $V \neq 0$).

Sea $W \subset V$ un submódulo. Tenemos que probar que existe un submódulo $U \subset V$ tal que $V = W \oplus U$.

1. Caso $W \subset V$ submódulo irreducible con $\dim V/W = 1$.
Sea $\gamma : V \to V$ el operador de Casimir. Como L es semisimple, entonces L actúa trivialmente en V/W, lo cual implica $\gamma(V) \subset W$. Como W es irreducible, existe $0 \neq \lambda \in \Bbbk$ tal que $\gamma|_W = \lambda \, \mathrm{id}_W$. Luego $V = W \oplus \operatorname{Ker}(\gamma)$.

2. Caso $W \subset V$ submódulo con $\dim V/W = 1$.

Por inducción en la dimensión de V. Si W es irreducible, es el caso anterior. De lo contrario existe $0 \neq W_0 \subsetneq W$ submódulo. Luego $\dim(V/W_0)/(W/W_0) = 1$ y por la hipótesis inductiva existe un submódulo $W_0 \subset U_0 \subset V$ tal que $V/W_0 = W/W_0 \oplus U_0/W_0$. Luego $\dim U_0/W_0 = 1$ y usando de nuevo la hipótesis inductiva obtenemos que existe un submódulo $U_1 \subset U_0$ tal que $U_0 = W_0 \oplus U_1$. Vale $\dim U_1 = 1$ y $U_1 \cap W = 0$, luego $V = W \oplus U_1$.

3. Caso general, $0 \neq W \subset V$ submódulo.
Recordar que $\mathcal{L}(V, W)$ es un L-módulo. Consideramos

$$\mathcal{V}_1 = \{\varphi \in \mathcal{L}(V, W) : \ \exists \lambda \in \Bbbk \text{ tal que } \varphi|_W = \lambda \operatorname{id}|_W\}$$
$$\mathcal{V}_2 = \{\varphi \in \mathcal{L}(V, W) : \ \varphi|_W = 0\}.$$

Notar que $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ son submódulos de $\mathcal{L}(V, W)$ y $\dim \mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2 = 1$, luego existe $\varphi \in \mathcal{V}_1 \setminus \mathcal{V}_2$ tal que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \oplus \Bbbk\{\varphi\}$. Como L actúa trivialmente en $\Bbbk\{\varphi\}$, entonces $\varphi : V \to W$ es un morfismo de L-módulos y además sabemos que existe $0 \neq \lambda \in \Bbbk$ tal que $\varphi|_W = \lambda \operatorname{id}|_W$. Esto implica $V = W \oplus \operatorname{Ker}(\varphi)$. □

Observaciones 5.33. Algunos comentarios relacionados con el teorema de Weyl.

1. El teorema de Weyl **no es válido** para módulos de dimensión infinita.
2. Vale también el recíproco (ejercicio), luego un álgebra L es semisimple si y solo si todo L-módulo de dimensión finita es completamente reducible.
3. Un álgebra L se dice *reductiva* si $\operatorname{rad}(L) = Z(L)$. Ejemplos: álgebras semisimples, álgebras abelianas y el álgebra general lineal. Vale que un álgebra es reductiva si y solo si es completamente reducible con la representación adjunta. En particular, si L es reductiva, entonces $L = Z(L) \oplus [L, L]$ y toda representación $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ de dimensión finita tal que $\rho_x : V \to V$ es diagonalizable para todo $x \in Z(L)$, es completamente reducible.

Corolario 5.34. *Si L es semisimple y V es un L-módulo de dimensión finita, entonces V es irreducible si y solo si es indescomponible.* □

En la proposición siguiente usamos el centralizador (página 6).

Proposición 5.35. *Si K es un ideal semisimple de un álgebra L, entonces existe un único ideal H de L tal que $L = K \oplus H$. Además $H = C_L(K)$ (el centralizador de K en L).* □

Ejemplo 5.36. El álgebra especial lineal $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ es un ideal de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, luego $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk) = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk) \oplus C_{\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)}(\mathfrak{sl}_n(\Bbbk))$. Por otro lado sabemos que vale $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk) = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk) \oplus \mathfrak{e}_n(\Bbbk)$, siendo $\mathfrak{e}_n(\Bbbk) = Z(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk))$ el espacio de las matrices escalares. Luego $C_{\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)}(\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)) = \mathfrak{e}_n(\Bbbk) = Z(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk))$.

Corolario 5.37. *Si $0 \to L_1 \to L \to L_2 \to 0$ es una sucesión exacta corta de álgebras de Lie, entonces L es semisimple si y solo si L_1 y L_2 son semisimples.* □

Proposición 5.38. *Si L es un álgebra semisimple, entonces toda derivación de L es interna.* □

5.4. Descomposición de Jordan abstracta

Teorema 5.39. *Si L es semisimple, entonces para cada $x \in L$ existen únicos $s, n \in L$ tales que*

$$x = s + n; \quad [s, n] = 0; \quad s \textit{ es } \operatorname{ad}\textit{-semisimple y } n \textit{ es } \operatorname{ad}\textit{-nilpotente}.$$

Además, un elemento de L conmuta con x si y solo si conmuta con s y con n. □

Esta descomposición $x = s+n$ se llama la *descomposición de Jordan abstracta* de x, s es la *parte semisimple* de x y n es la *parte nilpotente* de x.

Observación 5.40. Si L es semisimple y $x = s + n$ es la descomposición de Jordan abstracta de x, entonces $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_s + \mathrm{ad}_n$ es la descomposición de Jordan usual del operador $\mathrm{ad}_x : L \to L$.

Observación 5.41. Sea $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra arbitraria. Si $x \in L$ y $x = s + n$ es su descomposición de Jordan (como operador), entonces s y n pueden no estar en L. Por ejemplo, sea $L = \{\left(\begin{smallmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : \ x \in \mathbb{k}\} \subset \mathfrak{gl}_2(\mathbb{k}) \simeq \mathfrak{gl}\left(\mathbb{k}^2\right)$. La descomposición de Jordan de un elemento es $\left(\begin{smallmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; luego si $x \neq 0$, entonces $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ no están en L. La siguiente proposición muestra que esto no pasa si L es semisimple.

Teorema 5.42. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra semisimple. Si $x \in L$, entonces la descomposición de Jordan abstracta de x en L coincide con la descomposición de Jordan del operador $x : V \to V$. Luego L contiene las partes semisimple y nilpotente de la descomposición de Jordan de cada uno de sus elementos.* □

Corolario 5.43. *Sea L un álgebra semisimple y $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de dimensión finita. Si $x = s + n$ es la descomposición de Jordan abstracta de un elemento $x \in L$, entonces $\rho_x = \rho_s + \rho_n$ es la descomposición de Jordan del operador $\rho_x : V \to V$.* □

6. Representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$.

En esta sección es $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$. Las representaciones son de dimensión finita, a menos que se aclare lo contrario.

En lo que sigue es $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ y $\mathcal{B} = \{e, f, h\}$ es la base de L definida por $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Recordar que vale $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$ y $[h, f] = -2f$.

Sea V un L-módulo. Para cada $\lambda \in \mathbb{k}$ definimos $V_\lambda = \{v \in V : \ h \cdot v = \lambda v\}$. Si existe $0 \neq v \in V_\lambda$, diremos que λ es un *peso* de h en V, que v es un vector *de peso* λ y que V_λ es un *espacio de peso*. La *multiplicidad* de un peso λ es la dimensión del correspondiente V_λ.

Notar que al ser h una matriz diagonal, el teorema 5.42 junto con el corolario 5.43 implican que $\rho_h : V \to V$ es diagonalizable y por lo tanto V se escribe como suma directa de sus espacios de peso.

Si para algún $\lambda \in \mathbb{k}$ se verifica que existe $0 \neq v \in V$ tal que $h \cdot v = \lambda v$ y $e \cdot v = 0$, entonces decimos que λ es un *peso maximal* y que v es un *vector maximal*.

En lo que sigue usaremos que en todo L-módulo vale $x \cdot (y \cdot v) = [x, y] \cdot v + y \cdot (x \cdot v)$, para todo $x, y \in L$, $v \in V$.

Proposición 6.1. *Si V es un L-módulo, entonces para cada $\lambda \in \mathbb{k}$ vale $e \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+2}$ y $f \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda-2}$.* □

Recordar que todo L-módulo es un $U(L)$-módulo, extendiendo la acción de L a $U(L)$ mediante fórmula (5).

Teorema 6.2. *Sea $V \neq 0$ un L-módulo, entonces*

1. *El módulo V tiene algún peso maximal.*
2. *Los pesos maximales de V son números naturales.*
3. *Sea $m \in \mathbb{N}$ un peso maximal y $v_0 \in V$ un vector maximal correspondiente. Consideremos*

$$W = \mathbb{k}\left\{v_0,\, f \cdot v_0,\, f^2 \cdot v_0,\, \cdots,\, f^m \cdot v_0\right\}.$$

Entonces W es un L-submódulo irreducible y $\dim W = m + 1$. □

Observación 6.3. Lo anterior prueba que si $V \neq 0$ es un L-módulo y $v_0 \in V$ es un vector maximal, entonces el submódulo W generado por v_0 es irreducible. Además, si el peso de v_0 es m, entonces $\dim W = m+1$.

Ejemplos 6.4. 1. El espacio $\Bbbk$ es un L-módulo irreducible y $1 \in \Bbbk$ es un vector maximal de peso 0.

2. Consideremos a $\Bbbk^2$ como L-módulo con con la representación natural. Si $u = (1,0)$ y $v = (0,1)$ son los vectores de la base canónica, entonces

$$h \cdot u = u,\ e \cdot u = 0,\ f \cdot u = v; \quad h \cdot v = -v,\ e \cdot v = u,\ f \cdot v = 0.$$

Luego u es un vector maximal de peso 1. Esto implica que $\Bbbk^2$ es un L-módulo irreducible.

3. Consideremos L como L-módulo con la representación adjunta. Sabemos que si $\{e, f, h\}$ es la base estándar de L, entonces $[h, e] = 2e$ y claramente $[e, e] = 0$. Luego e es un vector maximal de peso 2 que por lo tanto genera un submódulo de L, que es irreducible y de dimensión 3; como la dimensión de L también es 3, concluimos que L es irreducible.

4. Consideremos la potencia simétrica $S^m(\Bbbk^2)$. Si $\{u, v\}$ es la base canónica de $\Bbbk^2$, con u y v como arriba, entonces $\{u^m, u^{m-1}v, \dots, uv^{m-1}, v^m\}$ es una base de $S^m(\Bbbk^2)$ y $\dim S^m(\Bbbk^2) = m+1$. Cada elemento $u^p v^q$ es un vector de peso $p - q$, para todo $p, q = 0, \dots, m$. Luego $S^m(V) = \bigoplus_{i=0}^m \Bbbk\{u^{m-i}v^i\}$ es la descomposición en espacios de peso. Notar que u^m es un vector maximal de peso m. Al ser $\dim S^m(\Bbbk^2) = m+1$, se deduce que $S^m(\Bbbk^2)$ es irreducible, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observación 6.5. Si V es un L-módulo irreducible de dimensión $m+1$, entonces de la prueba del teorema anterior se deduce que V admite una base $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$, tal que definiendo $v_{m+1} = v_{-1} = 0$, es

$$e \cdot v_i = (m+1-i)v_{i-1}, \quad f \cdot v_i = (i+1)v_{i+1}, \quad h \cdot v_i = (m-2i)v_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, m.$$

Luego si $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es la representación correspondiente, entonces

$$[\rho_e]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & m & & & \\ & 0 & m-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \ [\rho_f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & m & 0 \end{pmatrix}, \ [\rho_h]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} m & & & & \\ & m-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2-m & \\ & & & & -m \end{pmatrix}.$$

Corolario 6.6. *1. Para cada $n = 1, 2, \dots$ existe a menos de isomorfismo un único módulo irreducible de dimensión n.*

2. Si V es un L-módulo irreducible de dimensión $m+1$, entonces los pesos de h en V son

$$m,\ m-2,\ m-4,\ \dots,\ 4-m,\ 2-m,\ -m$$

y m es el único peso maximal de V. Todos los pesos tienen multiplicidad uno y $V = \bigoplus_{i=0}^m V_{m-2i}$. En particular V tiene un único vector maximal a menos de múltiplos escalares. □

Observación 6.7. Sea $V = \Bbbk^2$. Sabiendo que $S^m(V)$ es un L-módulo irreducible de dimensión $m+1$, se deduce que todo L-módulo irreducible es isomorfo a una potencia simétrica de V. Además, el álgebra simétrica $S(V) = \bigoplus_{m=0}^\infty S^m(V)$ es un L-módulo completamente reducible (de dimensión infinita) que contiene un representante de cada clase de isomorfismo de la familia de los L-módulos irreducibles de dimensión finita.

Teorema 6.8. *Si V es un L-módulo, entonces todos los pesos de h en V son números enteros y cada uno ocurre con su opuesto con la misma multiplicidad. Además en toda descomposición de un módulo V en suma directa de submódulos irreducibles, la cantidad de sumandos es* $\dim V_0 + \dim V_1$. □

Observación 6.9. Sean U, V dos L-módulos. Consideremos $U \otimes V$ como L-módulo (página 20). Notar que si u es un vector de peso p y v es un vector de peso q, entonces $u \otimes v$ es un vector de peso $p+q$. Además, si u y v son vectores maximales, entonces $u \otimes v$ también lo es. En $S^2(V)$ pasa lo mismo: uv es un vector (maximal) de peso $p+q$. También sucede igual en $\Lambda^2(V)$ con $u \wedge v$, siempre que $\{u, v\}$ sea LI.

Ejemplos 6.10. En los siguientes ejemplos escribiremos $W_m = S^m(\Bbbk^2)$, que es un módulo irreducible de dimensión $m+1$. Consideremos $W_2 = S^2(\Bbbk^2)$, que tiene una base $\{v_0, v_1, v_2\}$ con pesos respectivos $2, 0, -2$.

1. El espacio $V = W_2 \otimes W_2$ tiene una base
$$\{v_0 \otimes v_0,\ v_0 \otimes v_1,\ v_0 \otimes v_2,\ v_1 \otimes v_1,\ v_1 \otimes v_2,\ v_2 \otimes v_2\}.$$
Los pesos respectivos son $4, 2, 0, 2, 0, -2, 0, -2, -4$. Notar $\dim V_0 + \dim V_1 = 2$. Es claro que 4 es un peso maximal de V, que genera un submódulo con pesos $4, 2, 0, -2, -4$. Restan los pesos $2, 0, -2$; luego $W_2 \otimes W_2 \simeq W_4 \oplus W_2$.

2. El espacio $V = S^2(W_2)$ tiene una base
$$\left\{v_0^2,\ v_0v_1,\ v_0v_2,\ v_1v_0,\ v_1^2,\ v_1v_2,\ v_2v_0,\ v_2v_1,\ v_2^2\right\}.$$
Los pesos respectivos son $4, 2, 0, 0, -2, -4$, luego $\dim V_0 + \dim V_1 = 2$. Esto implica $S^2(W_2) \simeq W_4 \oplus W_0$.

3. El espacio $V = \Lambda^2(W_2)$ tiene una base
$$\{v_0 \wedge v_1,\ v_0 \wedge v_2,\ v_1 \wedge v_2\}.$$
Los pesos respectivos son $2, 0, -2$; luego $\Lambda^2(W_2) \simeq W_2$.

$\Bbbk[X,Y]$ como $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$-módulo. A continuación veremos cómo obtener todos los L-módulos irreducibles como subespacios del álgebra de polinomios en dos variables $\Bbbk[X,Y]$. Notar $\Bbbk[X,Y] = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Bbbk[X,Y]_m$, siendo

$$\Bbbk[X,Y]_0 = \Bbbk, \quad \Bbbk[X,Y]_m = \left\{a_0Y^m + a_1XY^{m-1} + \cdots + a_{m-1}X^{m-1}Y + a_mX^m :\ a_0, \ldots, a_m \in \Bbbk\right\},\ m \geq 1.$$

El conjunto $\left\{Y^m, XY^{m-1}, \cdots, X^{m-1}Y, X^m\right\}$ es una base de $\Bbbk[X,Y]_m$ y $\dim \Bbbk[X,Y]_m = m+1$.

Como $\Bbbk[X,Y]$ es un álgebra asociativa, entonces podemos considerar su álgebra de derivaciones $\operatorname{Der}(\Bbbk[X,Y])$. Esta es un $\Bbbk[X,Y]$-módulo definiendo $(p\delta)(q) = p\delta(q)$, para todo $p, q \in \Bbbk[X,Y]$ y $\delta \in \operatorname{Der}(\Bbbk[X,Y])$.

Proposición 6.11. *Sean $\delta_1, \delta_2 \in \operatorname{Der}(\Bbbk[X,Y])$. Si $\delta_1(X) = \delta_2(X)$ y $\delta_1(Y) = \delta_2(Y)$, entonces $\delta_1 = \delta_2$.* □

Proposición 6.12. *Los mapas lineales $\frac{\partial}{\partial X}$ y $\frac{\partial}{\partial Y}$ definidos por*
$$\frac{\partial}{\partial X}\left(X^iY^j\right) = iX^{i-1}Y^j, \qquad \frac{\partial}{\partial Y}\left(X^iY^j\right) = jX^iY^{j-1}, \qquad \forall i, j = 0, 1, \ldots$$
son derivaciones de $\Bbbk[X,Y]$. □

Proposición 6.13. *Si $\delta \in \operatorname{Der}(\Bbbk[X,Y])$, entonces $\delta = \delta(X)\frac{\partial}{\partial X} + \delta(Y)\frac{\partial}{\partial Y}$. Luego $\left\{\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right\}$ es una base de $\operatorname{Der}(\Bbbk[X,Y])$ como $\Bbbk[X,Y]$-módulo y por lo tanto*
$$\operatorname{Der}(\Bbbk[X,Y]) = \left\{p\frac{\partial}{\partial X} + q\frac{\partial}{\partial Y} :\ p, q \in \Bbbk[X,Y]\right\}. \quad \square$$

Proposición 6.14. *El mapa lineal $\rho : L \to \mathrm{Der}(\Bbbk[X,Y])$ definido por*

$$\rho_e = X\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \rho_f = Y\frac{\partial}{\partial X}, \quad \rho_h = X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y},$$

es un morfismo de álgebras de Lie. □

Observación 6.15. Como $\mathrm{Der}(\Bbbk[X,Y]) \subset \mathfrak{gl}(\Bbbk[X,Y])$ es una subálgebra de Lie, la proposición anterior implica que $\Bbbk[X,Y]$ es un L-módulo (de dimensión infinita) y es claro que $\Bbbk[X,Y]_m$ es un L-submódulo de $\Bbbk[X,Y]$ de dimensión finita $m+1$, para todo $m = 0, 1, \ldots$.

Notar que si $V = \Bbbk^2$ y $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de V, entonces identificando e_1 con X y e_2 con Y obtenemos un isomorfismo de álgebras asociativas $S(V) \simeq K[X,Y]$. Observando la acción de L en las bases naturales de estas álgebras, se deduce que esta identificación es un isomorfismo de L-módulos. Luego para cada $m \geq 0$ se cumple que X^m es un vector maximal de peso m y por lo tanto $\Bbbk[X,Y]_m \simeq S^m(V)$ es un L-módulo irreducible de dimensión $m+1$. En resumen, el álgebra de polinomios $\Bbbk[X,Y]$ es un L-módulo completamente reducible (de dimensión infinita) y cada componente homogénea $\Bbbk[X,Y]_m$ es un submódulo irreducible de dimensión $m+1$.

7. El álgebra $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.

Escribimos $L = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$, $n \geq 2$. En esta sección es $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$ y las representaciones son de dimensión finita.

7.1. Raíces.

Consideremos $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk) \cap \mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ las matrices diagonales de traza cero, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ las matrices estrictamente triangulares superiores y $\mathfrak{n}_-$ las matrices estrictamente triangulares inferiores. Luego

$$L = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}_- = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}_-, \quad \text{siendo} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Es claro que $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_-$ y $\mathfrak{b}$ son subálgebras de L; $\mathfrak{b}$ es un álgebra soluble llamada la *subálgebra de Borel* y $\mathfrak{h}$ es un álgebra abeliana llamada la *subálgebra de Cartan*.

Sean $\{e_{ij}\}$ la base canónica de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ y $\{e_{ij}^*\}$ su base dual en $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)^*$. Definimos $\gamma_i := e_{ii}^*|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*,\ i = 1, \ldots, n$.

Proposición 7.1. *Vale:*

1. $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$.
2. $\sum_{i=1}^n a_i\gamma_i = \sum_{i=1}^n b_i\gamma_i$ *si y solo si existe* $k \in \Bbbk$ *tal que* $a_i = b_i + k$*, para todo* $i = 1, \ldots, n$. □

Las funcionales $\gamma_i - \gamma_j \in \mathfrak{h}^*$, $i \neq j$ son las *raíces* de L y las correspondientes a $i < j$ son las *raíces positivas*. Escribimos $R = \{\gamma_i - \gamma_j :\ i \neq j\}$ y $R_+ = \{\gamma_i - \gamma_j :\ i < j\}$; luego $R = R_+ \cup (-R_+)$. Las *raíces fundamentales* son las raíces positivas $\alpha_1 = \gamma_1 - \gamma_2,\ \alpha_2 = \gamma_2 - \gamma_3,\ \ldots\ ,\ \alpha_{n-1} = \gamma_{n-1} - \gamma_n$.

Proposición 7.2.

1. *El conjunto de raíces fundamentales* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ *es una base de* $\mathfrak{h}^*$.
2. *El conjunto* $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ *es un generador de* $\mathfrak{h}^*$. □

Si $\alpha \in R$, $\alpha = \gamma_i - \gamma_j$, $i \neq j$, definimos $e_\alpha = e_{ij}$ y $h_\alpha = e_{ii} - e_{jj}$. Notar $\alpha(h_\alpha) = 2$, para todo $\alpha \in R$.

Proposición 7.3.

1. *Los conjuntos* $\{e_\alpha :\ \alpha \in R_+\}$ *y* $\{e_{-\alpha} :\ \alpha \in R_+\}$ *son bases respectivas de* $\mathfrak{n}$ *y de* $\mathfrak{n}_-$.
2. *Si* $h \in \mathfrak{h}$ *y* $\alpha \in R$*, entonces* $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$.
3. *Si* $\alpha \in R$*, entonces* $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$. □

Corolario 7.4. *Para cada* α *en* R*, vale* $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha,\ [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha,\ [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_{-\alpha}$*. Luego la subálgebra* $\Bbbk\{h_\alpha, e_\alpha, e_{-\alpha}\}$ *es isomorfa a* $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. □

7.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$.

Sea V un L-módulo. Para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definimos $V_\lambda = \{v \in V : \; x \cdot v = \lambda(x)v, \; \forall x \in \mathfrak{h}\}$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ es tal que $V_\lambda \neq 0$, entonces decimos que λ es un *peso* (de $\mathfrak{h}$ en V) y que V_λ es un *espacio de peso*; la *multiplicidad* de λ es la dimensión de V_λ.

Proposición 7.5. *Si V es un L-módulo y $\lambda_1 \ldots, \lambda_m \in \mathfrak{h}^*$ son pesos distintos de $\mathfrak{h}$ en V, entonces la suma $\sum_{i=1}^m V_{\lambda_i}$ es directa.* □

Proposición 7.6. *Si V es un L-módulo, entonces $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$.* □

Ejemplo 7.7. Si consideramos a L como L-módulo con la representación adjunta, entonces su descomposición en subespacios de peso es $L = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{k}\{e_\alpha\}$, siendo $L_0 = \mathfrak{h}$ y $L_\alpha = \mathbb{k}\{e_\alpha\}$, para todo $\alpha \in R$. Luego las raíces de L son los pesos no nulos de $\mathfrak{h}$ en L.

Proposición 7.8. *Sea V un L-módulo y $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

1. *Para cada $\alpha \in R$ se cumple $e_\alpha \cdot V_\lambda \subset V_{\alpha+\lambda}$.*
2. *Si $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$, siendo cada $W_i \subset V$ un submódulo, entonces $V_\lambda = \bigoplus_{i=1}^m (W_i)_\lambda$.* □

Proposición 7.9. *Sea V un L-módulo. Si $v \in V$, entonces son equivalentes:*

1. *Existe $\mu \in \mathfrak{b}^*$ tal que $x \cdot v = \mu(x)v$, para todo $x \in \mathfrak{b}$.*
2. *Existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $x \cdot v = \lambda(x)v$, para todo $x \in \mathfrak{h}$ y $e_\alpha \cdot v = 0$, para todo $\alpha \in R_+$.* □

Un vector $v \neq 0$ que verifique las condiciones de la proposición anterior se dice que es un *vector maximal* y el peso $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ correspondiente es un *peso maximal* de $\mathfrak{h}$ en V.

Proposición 7.10. *Si $V \neq 0$ es un L-módulo, entonces V tiene algún peso maximal.* □

Teorema 7.11. *Sean $V \neq 0$ un L-módulo y $v \in V$ un vector maximal de peso λ. Sea $W \subset V$ el L-submódulo generado por v. Entonces*

1. *W es irreducible.*
2. *Los pesos de $\mathfrak{h}$ en W son de la forma $\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} m_i\alpha_i$, siendo $m_i \in \mathbb{N}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.*
3. *La multiplicidad de λ en W es 1.* □

Teorema 7.12.
1. *Si V es un L-módulo irreducible, entonces existe un único peso maximal en V y tiene multiplicidad 1.*
2. *Si dos módulos irreducibles tienen el mismo peso maximal, entonces son isomorfos.* □

Observación 7.13. El teorema anterior reduce el problema de clasificar los módulos irreducibles a hallar los λ en $\mathfrak{h}^*$ que son pesos maximales.

Proposición 7.14. *Sean V y W dos L-módulos no nulos. Si $v \in V$ y $w \in W$ son vectores maximales con pesos respectivos λ y μ, entonces $v \otimes w \in V \otimes W$ es un vector maximal de peso $\lambda + \mu$. Luego el subconjunto de $\mathfrak{h}^*$ formado por los pesos maximales es cerrado con la suma.* □

Sean $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1} \in \mathfrak{h}^*$ definidos por

$$\pi_1 = \gamma_1, \quad \pi_2 = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \ldots, \quad \pi_{n-1} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1}.$$

Notar $\gamma_i = \pi_i - \pi_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n-1$ y $\gamma_1 = \pi_1$. Luego $\{\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}\}$ es una base de $\mathfrak{h}^*$.

Proposición 7.15. *Sea $V = \Bbbk^n$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de V. Si consideramos V como L-módulo con la representación natural, entonces para cada $k = 1, \dots, n-1$, la potencia exterior $\Lambda^k V$ es un L-módulo irreducible y $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ es un vector maximal de peso π_k.* □

Observación 7.16. Si $v \in V$ es un vector maximal de peso λ, entonces para cada $\alpha \in R_+$ se cumple que v es un vector maximal de peso $\lambda(h_\alpha)$ respecto a $\Bbbk\{h_\alpha, e_\alpha, e_{-\alpha}\} \simeq \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. Luego $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}$, para todo $\alpha \in R_+$.

Teorema 7.17. *Una funcional $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ es un peso maximal (de algún módulo) si y solo si existen números naturales $m_1, \dots, m_{n-1}$ tales que $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \pi_i$.* □

Observación 7.18. De las proposiciones 7.14 y 7.15 se deduce que todos los L-módulos irreducibles aparecen como submódulos de productos tensoriales de potencias exteriores de $\Bbbk^n$.

Ejemplo 7.19 (Representación trivial)**.** El cuerpo $\Bbbk$ es un L-módulo irreducible con vector maximal 1 y peso maximal 0.

Ejemplo 7.20 (Representación natural)**.** Si $V = \Bbbk^n$, entonces $V = \Lambda^1 V$ es irreducible con vector maximal e_1 y peso maximal $\gamma_1 = \pi_1$.

Ejemplo 7.21 (Representación adjunta)**.** Examinando la descomposición de L descrita en el ejemplo 7.7, se deduce que L es irreducible con vector maximal e_{1n} y peso maximal $\gamma_1 - \gamma_n = \pi_1 + \pi_{n-1}$. Notar que esto implica que $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ es un álgebra simple, para todo $n \geq 2$.

Ejemplo 7.22. Estudiaremos la descomposición en submódulos irreducibles de $V = \Bbbk^n \otimes \Lambda^{n-1}(\Bbbk^n)$. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\Bbbk^n$. Sabemos que si $\eta_j = e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_j} \wedge \cdots \wedge e_n$, entonces $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ es una base de $\Lambda^{n-1}(\Bbbk^n)$. Luego $B = \{e_i \otimes \eta_j : \ i, j = 1, \dots, n\}$ es una base de V y $\dim V = n^2$. Notar que $e_i \in \Bbbk^n$ es un vector de peso γ_i y $\eta_j \in \Lambda^{n-1}\Bbbk^n$ es un vector de peso $\sum_{k \neq j} \gamma_j = -\gamma_j$. Luego cada $e_i \otimes \eta_j \in V$ es un vector de peso $\gamma_i - \gamma_j$, para todo i, j. En particular e_1 y η_n son vectores maximales, luego $e_1 \otimes \eta_n$ es un vector maximal de peso $\gamma_1 - \gamma_n = \pi_1 + \pi_{n-1}$. Esto implica que si W es el submódulo de V generado por $e_1 \otimes \eta_n$, entonces W es irreducible y es isomorfo a L (pensado como L-módulo); luego $\dim W = \dim L = n^2 - 1$. Como $\dim V = n^2$, concluimos $V \simeq L \oplus \Bbbk$ como L-módulos. Esto implica que la descomposición de V en suma de submódulos irreducibles es $V = W \oplus \Bbbk\{u\}$, siendo $u \in V_0$ cierto vector maximal.

Como la base B está formada por vectores de peso, obtenemos la descomposición en espacios de peso

$$V = V_0 \oplus \bigoplus_{i \neq j} V_{\gamma_i - \gamma_j}, \quad V_{\gamma_i - \gamma_j} = \Bbbk\{e_i \otimes \eta_j\}, \text{ si } i \neq j; \ V_0 = \Bbbk\{e_1 \otimes \eta_1, \dots, e_n \otimes \eta_n\}.$$

Tenemos que encontrar $0 \neq u \in V_0$ que sea maximal, es decir tal que $e_{ij} \cdot u = 0$, para todo $i < j$, para lo cual alcanza con probar[8] $e_{i,i+1} \cdot u = 0$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Como $u \in V_0$, entonces existen $a_i \in \Bbbk$ tales que $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i \otimes \eta_i$. Es fácil de probar que valen $e_{i,i+1} \cdot e_k = \delta_{i+1,k} e_i$ y $e_{i,i+1} \cdot \eta_k = \delta_{i,k} \eta_{i+1}$ y por lo tanto $e_{i,i+1} \cdot u = (a_{i+1} + a_i) e_i \otimes \eta_{i+1}$. Luego $e_{i,i+1} \cdot u = 0$ equivale a $a_{i+1} = -a_i$, para todo i. Esto implica que $u = \sum_{i=1}^n (-1)^i e_i \otimes \eta_i \in V_0$ es un vector maximal.

Referencias

[1] K. Erdmann and M. H. Wildon, *Introduction to Lie algebras*, Springer-Verlag.

[2] W. Fulton y H. Harris, *Representation theory*, Springer-Verlag.

[3] H. E. Humphreys, *Introdution to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag.

[4] J. P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Springer-Verlag.

[8] La equivalencia se prueba por inducción en j, usando $e_{i,j+1} = [e_{i,j}, \ e_{j,j+1}]$.