Producto tensorial de espacios vectoriales

Andrés Abella

12 de octubre de 2023

En lo que sigue $\Bbbk$ un cuerpo. En general, abreviaremos "$\Bbbk$-espacio vectorial" por "espacio".

1. Producto tensorial

Definición 1.1. Sean U, V espacios. El *producto tensorial* de U y V se define como el cociente de $\Bbbk(U \times V)$ (el $\Bbbk$-espacio vectorial de base $U \times V$) por el subespacio generado por los elementos de la forma

$$(u+u', v) - (u,v) - (u',v), \quad (u, v+v') - (u,v) - (u,v'), \quad (au, v) - a(u,v), \quad (u, av) - a(u,v),$$

para todo $u, u' \in U,\ v, v' \in V,\ a \in \Bbbk$. Al producto tensorial de U y V lo escribimos $U \otimes_\Bbbk V$.

Si $\pi : U \times V \to U \otimes_{\mathbb{K}} V$ es la proyección canónica, entonces definimos $\otimes : U \times V \to U \otimes_\Bbbk V$ mediante

$$\otimes : U \times V \hookrightarrow \Bbbk(U \times V) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} U \otimes_\Bbbk V$$

y escribimos $u \otimes v := \otimes(u,v) = \overline{(u,v)}$, para todo $u \in U,\ v \in V$. En $U \otimes_\Bbbk V$ vale

$$(u+u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v, \quad u \otimes (v+v') = u \otimes v + u \otimes v', \quad (au) \otimes v = u \otimes (av) = a(u \otimes v),$$

para todo $u, u' \in U,\ v, v' \in V,\ a \in \Bbbk$.

Las propiedades anteriores muestran que $\otimes : U \times V \to U \otimes_\Bbbk V$ es una transformación bilineal. Notar

$$U \otimes_\Bbbk V = \left\{ \sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i :\ u_i \in U,\ v_i \in V,\ i = 1, \ldots, k,\ k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Luego $\operatorname{Im}(\otimes) = \{u \otimes v :\ u \in U,\ v \in V\}$ es un generador de $U \otimes_\Bbbk V$.

Proposición 1.2 (Propiedad universal del producto tensorial)**.** *Dados dos espacios U y V, se cumple que para todo espacio W y toda transformación bilineal $\varphi : U \times V \to W$, existe una única transformación lineal $\tilde{\varphi} : U \otimes_\Bbbk V \to W$ tal que $\tilde{\varphi}(u \otimes v) = \varphi(u,v),\ \forall u \in U, v \in V$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} U \otimes_\Bbbk V \arrow[dr, dotted, "\tilde{\varphi}"] & \\ U \times V \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "\varphi"'] & W \end{tikzcd}$$

Notar que $\tilde{\varphi} : U \otimes_\Bbbk V \to W$ está definida en un elemento genérico por $\tilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(u_i, v_i)$.

Observación 1.3. El par $(U \otimes_{\Bbbk} V,\ \otimes : U \times V \to U \otimes_{\Bbbk} V)$ queda caracterizado a menos de isomorfismo por la propiedad universal anterior.

Mientras no dé lugar a confusión, escribiremos $U \otimes V$ en vez de $U \otimes_{\Bbbk} V$.

Proposición 1.4. *Sean U, V, W espacios arbitrarios. Vale*

1. $0 \otimes v = u \otimes 0 = 0$ *en* $U \otimes V$, *para todo* $u \in U$, $v \in V$.
2. $\{0\} \otimes V = \{0\}$ *y* $V \otimes \{0\} = \{0\}$.
3. $V \otimes \Bbbk \simeq \Bbbk \otimes V \simeq V$, *vía* $v \otimes a \simeq a \otimes v \simeq av$.
4. $U \otimes V \simeq V \otimes U$, *vía* $u \otimes v \simeq v \otimes u$.
5. $(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$, *vía* $u \otimes (v \otimes w) \simeq (u \otimes v) \otimes w$.
6. $U \otimes (V \oplus W) \simeq (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ *y* $(U \oplus V) \otimes W \simeq (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$.
   El primer isomorfismo viene dado por las identificaciones siguientes

$$u \otimes (v, w) \simeq (u \otimes v, u \otimes w); \quad (u_1 \otimes v, u_2 \otimes w) \simeq u_1 \otimes (v, 0) + u_2 \otimes (0, w).$$

   El segundo isomorfismo es análogo. □

La última igualdad vale también para sumas infinitas:

Proposición 1.5. *Si V es un espacio y $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios, entonces*

$$V \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} U_i\right) \simeq \bigoplus_{i\in I} (V \otimes U_i) \quad y \quad \left(\bigoplus_{i\in I} U_i\right) \otimes V \simeq \bigoplus_{i\in I} (U_i \otimes V). \quad \square$$

Observación 1.6. Lo anterior no vale para productos infinitos: en general $V \otimes \left(\prod_{i\in I} U_i\right) \not\simeq \prod_{i\in I} (V \otimes U_i)$.

Proposición 1.7. *Si $\varphi : V_1 \to V_2$ y $\psi : W_1 \to W_2$ son dos transformaciones lineales, entonces existe una única transformación lineal $\varphi \otimes \psi : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ tal que $(\varphi \otimes \psi)(v_1 \otimes v_2) = \varphi(v_1) \otimes \psi(v_2)$, para todo $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.* □

Observación 1.8. Vale $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V\otimes W}$, para todo V, W.

Proposición 1.9. *Si $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ y $W_1 \xrightarrow{\psi_1} W_2 \xrightarrow{\psi_2} W_3$ son transformaciones lineales, entonces*

$$(\varphi_2 \otimes \psi_2) \circ (\varphi_1 \otimes \psi_1) = (\varphi_2 \circ \varphi_1) \otimes (\psi_2 \circ \psi_1). \quad \square$$

Observación 1.10. Recordar que si $\varphi : V \to W$ es una transformación lineal, entonces

1. φ es inyectiva si y solo si existe una trasformación lineal $\psi : W \to V$ tal que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$.
2. φ es sobreyectiva si y solo si existe una trasformación lineal $\psi : W \to V$ tal que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

Proposición 1.11. *Si $\varphi : V_1 \to V_2$ y $\psi : W_1 \to W_2$ son transformaciones lineales sobreyectivas, inyectivas o biyectivas, entonces $\varphi \otimes \psi : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ es sobreyectiva, inyectiva o biyectiva, respectivamente.* □

Corolario 1.12. *Si $U_0 \subset U$ y $V_0 \subset V$ son subespacios, entonces podemos pensar $U_0 \otimes V_0 \subset U \otimes V$, identificando $U_0 \otimes V_0$ con el subespacio de $U \otimes V$ generado por los elementos de la forma $u_0 \otimes v_0$, $u_0 \in U_0$, $v_0 \in V_0$.* □

Proposición 1.13. *Sean V y W dos espacios.*

1. *Si $x \in V \otimes W$, entonces existen $v_1, \ldots, v_n \in V$ y $w_1, \ldots, w_n \in W$ con $w_1, \ldots, w_n$ LI, tales que $x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$.*
2. *Si $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$ con $w_1, \ldots, w_n$ LI, entonces $v_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*
3. *Si $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^n v_i' \otimes w_i$ con $w_1, \ldots, w_n$ LI, entonces $v_i = v_i'$, para todo $i = 1, \ldots, n$.* $\square$

Observación 1.14. En la proposición anterior, vale lo mismo intercambiando los roles de V y W.

Corolario 1.15. *Sean V y W dos espacios. Si $v \neq 0$ y $w \neq 0$, entonces $v \otimes w \neq 0$. Luego $V \neq \{0\}$ y $W \neq \{0\}$, implican $V \otimes W \neq \{0\}$.* $\square$

Proposición 1.16. *Sean V y W dos espacios, y $A = \{e_i : \ i \in I\} \subset V$ y $B = \{f_j : \ j \in J\} \subset W$ subconjuntos. Consideramos $C = \{e_i \otimes f_j : \ (i,j) \in I \times J\} \subset V \otimes W$. Si A y B son LI, generadores o bases, entonces C es LI, generador o base, respectivamente. Luego si V y W tienen dimensión finita, entonces $V \otimes W$ tiene dimensión finita y $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.* $\square$

Aplicación 1.17 (Restricción y extensión de escalares.)**.** Sea $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ una extensión de cuerpos.

Si V es un $\mathbb{K}$-espacio, entonces V es un $\Bbbk$-espacio restringiendo la acción de $\mathbb{K}$ en V a una acción de $\Bbbk$ en V. Escribiremos $V_\Bbbk$ a V pensado como $\Bbbk$-espacio. Si $\{v_i : \ i \in I\}$ es una base de V como $\mathbb{K}$-espacio y $\{a_j : \ j \in J\}$ es una base de $\mathbb{K}$ como $\Bbbk$-espacio, entonces $\{a_j v_i : \ i \in I, \ j \in J\}$ es una base de V como $\Bbbk$-espacio. Luego $\dim_\Bbbk(V_\Bbbk) = (\dim_\Bbbk \mathbb{K})(\dim_\mathbb{K} V)$.

Si V es un $\Bbbk$-espacio, entonces al $\Bbbk$-espacio $\mathbb{K} \otimes_\Bbbk V$ le podemos dar estructura de $\mathbb{K}$-espacio definiendo

$$a(b \otimes v) = (ab) \otimes v, \quad \forall\ a, b \in \mathbb{K}, \ v \in V.$$

Si $\{e_i : \ i \in I\}$ es una base de V como $\Bbbk$-espacio, entonces $\{1 \otimes e_i : \ i \in I\}$ es una base de $\mathbb{K} \otimes_\Bbbk V$ como $\mathbb{K}$-espacio. Luego $\dim_\mathbb{K}(\mathbb{K} \otimes_\Bbbk V) = \dim_\Bbbk V$.

Estas correspondencias no son inversas una de la otra, pero hay relaciones entre ellas (forman una adjunción). Si V es un $\Bbbk$-espacio, entonces existe un mapa inyectivo $\Bbbk$-lineal de V en $(\mathbb{K} \otimes_\Bbbk V)_\Bbbk$ definido por $v \mapsto 1 \otimes v$.

Generalización En forma análoga al caso de dos espacios, se define el producto tensorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ para cualquier familia finita de espacios $V_1, \ldots, V_n$. En este caso $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ es un espacio cuyos elementos son sumas finitas de *tensores elementales*, es decir vectores del tipo $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, y para todo $i = 1, \ldots, n$ vale

$$\begin{aligned} v_1 \otimes \cdots \otimes (v_i + v_i') \otimes \cdots \otimes v_n &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n + v_1 \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_n, \\ v_1 \otimes \cdots \otimes (a v_i) \otimes \cdots \otimes v_n &= a(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n). \end{aligned}$$

Todo lo que vimos anteriormente se generaliza en forma natural al producto tensorial de n-espacios. En particular $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ verifica una propiedad universal análoga a la de la proposición 1.2 para transformaciones n-multilineales en vez de bilineales. Además se puede obtener una base de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ a partir de bases de $V_1, \ldots, V_n$, generalizando el procedimiento de la proposición 1.16; luego si $V_1, \ldots, V_n$ tienen dimensión finita, resulta $\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = (\dim V_1) \cdots (\dim V_n)$.

Observación 1.18. Con esta definición es fácil de probar que si U, V y W son espacios, entonces

$$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W) \simeq U \otimes V \otimes W.$$

2. Álgebras graduadas

Una $\mathbb{K}$-*álgebra asociativa* (con unidad) es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial A en el cual existe un elemento $1 \in A$ y un producto $(x, y) \mapsto xy$ tales que

$$(kx)y = x(ky) = k(xy), \quad x(y+z) = xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz, \quad (xy)z = x(yz), \quad x1 = 1x = x,$$

para todo $x, y, z \in A,\ k \in \mathbb{K}$. En lo que sigue escribiremos álgebra en lugar de álgebra asociativa.
Sea A un álgebra. Un *ideal* de A es un subespacio $I \subset A$ tal que $xy \in I$ y $yx \in I$, para todo $x \in A$ y $y \in I$. La intersección y la suma de ideales es un ideal. El *ideal generado* por un subconjunto $X \subset A$ es la intersección de todos los ideales de A que contienen a X. Si $X \subset A$ es un subconjunto, escribiremos $\langle X \rangle$ al ideal generado por X. Notar

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i b_i :\ a_i, b_i \in A,\ x_i \in X,\ i = 1, \ldots, n,\ n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Si I es un ideal de A, entonces el espacio cociente A/I admite estructura de álgebra asociativa definiendo

$$k\,\overline{a} = \overline{ka}, \quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \quad \overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}, \quad \forall a, b \in A,\ k \in \mathbb{K}.$$

Si A y B son álgebras asociativas, un *morfismo* es un mapa lineal $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todo $x, y \in A$ y $\varphi(1) = 1$. Si $\varphi : A \to B$ es un morfismo, entonces su núcleo $\operatorname{Ker}(\varphi)$ es un ideal de A. Un *isomorfismo* de ágebras es un morfismo biyectivo. Escribimos $A \simeq B$ para decir que existe un isomorfismo entre A y B.

Proposición 2.1 (Propiedad universal del cociente)**.** *Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de álgebras asociativas.*

1. *Si I es un ideal de A tal que $I \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$, entonces existe un único morfismo $\hat{\varphi} : A/I \to B$ tal que $\hat{\varphi}(\overline{x}) = \varphi(x)$, para todo $x \in A$.*

2. *Si $\varphi : A \to B$ es sobreyectivo, entonces $A/\operatorname{Ker}(\varphi) \simeq B$ vía el morfismo de la parte anterior.* □

Un álgebra A se dice *graduada* si existen subespacios $A_n \subset A$, $n = 0, 1, \ldots$, tales que

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_n A_m \subset A_{n+m},\ \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad 1 \in A_0.$$

Ejemplos de álgebras graduadas son las álgebras de polinomios $\Bbbk[X]$ y $\Bbbk[X, Y]$. Por ejemplo

$$\Bbbk[X, Y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Bbbk[X, Y]_n, \quad \Bbbk[X, Y]_n = \Bbbk\left\{X^n,\ X^{n-1}Y, \ldots, XY^{n-1},\ Y^n\right\},\ n = 0, 1, \ldots$$

En forma análoga se ve que $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ es un álgebra graduada, para todo $n \geq 1$.

En lo que sigue supondremos que $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ es un álgebra graduada.

Si $a \in A$ verifica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_n$, entonces diremos que a es *homogéneo* de *grado n*; al subespacio A_n le llamaremos la *componente homogénea* de grado n de A. Un ideal se dice *homogéneo* si se puede generar (como ideal) por elementos homogéneos (no necesariamente del mismo grado).

Proposición 2.2. *Si I es un ideal homogéneo de A, entonces $I = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(I \cap A_n)$.* □

Proposición 2.3. *Si I es un ideal homogéneo de A, entonces A/I es un álgebra graduada con graduación $A/I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi(A_n)$, siendo $\pi : A \to A/I$ la proyección canónica. Además $\pi(A_n) \simeq \frac{A_n}{I \cap A_n}$ como espacios vectoriales.* □

3. Álgebras tensorial, exterior y simétrica

Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Consideremos el espacio $T(V)$ definido por

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n V, \quad T^0V := \Bbbk, \quad T^1V := V, \quad T^nV := V \otimes \cdots \otimes V \ (n \text{ copias}),\ n \geq 2.$$

A $T(V)$ le damos estructura de álgebra definiendo un producto en los tensores elementales mediante

$$\begin{aligned}
&a \cdot b := ab, && \forall a, b \in \Bbbk,\\
&a \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot a := (av_1) \otimes \cdots \otimes v_n, && \forall a \in \Bbbk,\ n \geq 1,\\
&(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m, && \forall n, m \geq 1.
\end{aligned}$$

Al espacio $T(V)$ con esta estructura de álgebra le llamamos el *álgebra tensorial* sobre V. El álgebra $T(V)$ es graduada con graduación $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^nV$.
Con este producto es $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_1 \cdot \cdots \cdot v_n$. Luego el producto tensorial de vectores coincide con el producto de $T(V)$ y por lo tanto $T(V)$ está generado por V como álgebra. El espacio T^nV se llama la *n-potencia tensorial* de V.

Proposición 3.1 (Propiedad universal del álgebra tensorial). *Si V es un $\Bbbk$-espacio, A una $\Bbbk$-álgebra y $\varphi : V \to A$ una transformación lineal, entonces φ se extiende de forma única a un morfismo de álgebras $\varphi : T(V) \to A$. Explícitamente,*

$$\varphi(x) = x1_A,\ \forall x \in \Bbbk; \quad \varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \varphi(v_1) \cdots \varphi(v_n),\ \forall v_1, \ldots, v_n \in V,\ n \geq 1, \quad \square$$

El *álgebra exterior* $\Lambda(V)$ se define como el álgebra cociente de $T(V)$ por el ideal $I = \langle v \otimes v :\ v \in V\rangle$. Es un álgebra graduada, siendo $\Lambda(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^nV$, $\Lambda^nV = \pi(T^nV)$. El espacio $\Lambda^nV \simeq \frac{T^nV}{I \cap T^nV}$ se llama la *n-potencia exterior* de V.

Notar que si $v \in V$, entonces $v \otimes v \in T^2V$ y por lo tanto $I \subset \bigoplus_{n=2}^{\infty} T^nV$. Esto implica $\mathbb{K} \cap I = V \cap I = 0$ y por lo tanto si $\pi : T(V) \to \Lambda(V)$ es la proyección canónica, entonces $\pi|_{\Bbbk} : \Bbbk \to \Lambda(V)$ y $\pi|_V : V \to \Lambda(V)$ son inyectivas. Así $\Lambda^0V \simeq \Bbbk$ y $\Lambda^1V \simeq V$, luego

$$\Lambda(V) = \Bbbk \oplus V \oplus \Lambda^2V \oplus \Lambda^3V \oplus \cdots.$$

En la fómula de arriba estamos pensando $V \subset \Lambda(V)$, identificando $\overline{v}$ con v, para todo $v \in V$. Si escribimos $\wedge$ al producto en $\Lambda(V)$, resulta

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \overline{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n}.$$

En $\Lambda(V)$ vale $v \wedge v = 0$, para todo $v \in V$. Esto implica $u \wedge v = -v \wedge u$, para todo $u, v \in V$. Luego

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} = \operatorname{sg}(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n,$$

para toda permutación σ de n elementos (siendo $\operatorname{sg}(\sigma) = \pm 1$ el signo de σ). Notar que $u \wedge v = -v \wedge u$ implica $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$, si $\omega \in \Lambda^k(V)$ y $\eta \in \Lambda^l(V)$.

El *álgebra simétrica* $S(V)$ se define como el álgebra cociente de $T(V)$ por el ideal $J = \langle u \otimes v - v \otimes u :\ u, v \in V\rangle$. Es un álgebra graduada, siendo $S(V) = \sum_{n=0}^{\infty} S^nV$, $S^nV = \pi(T^nV)$. El espacio $S^nV \simeq \frac{T^nV}{J \cap T^nV}$ se llama la *n-potencia simétrica* de V. Por la misma razón que en $\Lambda(V)$, es $S^0V \simeq \Bbbk$ y $S^1V \simeq V$, y por lo tanto

$$S(V) = \Bbbk \oplus V \oplus S^2V \oplus S^3V \oplus \cdots.$$

Al producto en $S(V)$ se lo suele escribir mediante la yuxtaposición. Luego

$$v_1 \cdots v_n = \overline{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n}, \quad \forall v_1, \ldots, v_n \in V.$$

En $S(V)$ vale $uv = vu$, para todo $u, v \in V$, y como V genera a $S(V)$ como álgebra, se deduce que $S(V)$ es un álgebra conmutativa.

Observación 3.2. En el caso en que el cuerpo $\Bbbk$ sea de característica cero, los espacios $\Lambda^n V$ y $S^n V$ se pueden identificar con subespacios de $T^n V$, para todo $n \geq 0$.

Bases. Las álgebras $T(V)$, $\Lambda(V)$ y $S(V)$ son graduadas, luego para obtener una base de cada una de ellas alcanza con obtener bases de cada una de sus componentes homogéneas, y después unirlas. Supongamos que la dimensión de V es finita y que $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V. Sea $k \geq 2$, entonces[1]

- $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} : \ i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n\}$ es una base de $T^k V$;
- $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ es una base de $\Lambda^k V$ si $0 \leq k \leq n$ y $\Lambda^k V = \{0\}$ si $k > n$;
- $\{e_{i_1} \cdots e_{i_k} : \ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$ es una base de $S^k V$.

Usando las bases anteriores obtenemos las dimensiones de las componentes homogéneas:

$$\dim T^k V = n^k, \ k \geq 0; \quad \dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}, \ 0 \leq k \leq n; \quad \dim S^k V = \binom{n+k-1}{k}, \ k \geq 0.$$

Notar que $T(V)$ y $S(V)$ tienen dimensión infinita (si $V \neq \{0\}$), mientras que para $\Lambda(V)$ es

$$\Lambda(V) = \Bbbk \oplus V \oplus \Lambda^2 V \oplus \Lambda^3 V \oplus \cdots \oplus \Lambda^n V,$$

luego $\dim \Lambda(V) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Observar también que podemos identificar $S(V)$ con el álgebra de polinomios en n variables $S(V) \simeq \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$, mientras que $T(V)$ se identifica con el álgebra de polinomios en n variables que no conmutan entre sí $T(V) \simeq \Bbbk\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$.

[1]La prueba de que el conjunto dado es base de $T^k V$ es esencialmente la misma que la prueba de la proposición 1.16, y se basa en la versión para $T^k V$ de la propiedad universal del producto tensorial. Las pruebas para $\Lambda^k(V)$ y $S^k(V)$ son análogas.