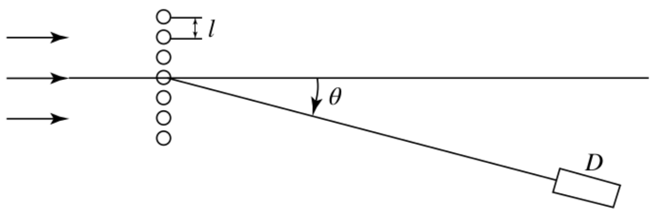
Repartido 1. Introducción

1. Un haz de neutrones de masa $M_n = 1,67 \times 10^{-27} kg$, con velocidad y energía contantes, incide en una cadena lineal de nucleos atómicos equiespaciados como se muestra en el figura. Llamemos l a la distancia entre átomos y $d << l$ a su tamaño. Un detector de netrones se ubica lejos, en dirección que forma un ángulo θ con la dirección de incidencia de los neutrones.



a) Describa cualitativamente el fenómeno observado en D al variar la energía de haz incidente.

b) La tasa de conteo, como función de E, presenta una resonancia en torno a $E = E_1$. Sabiendo que no hay otras resonancias para $E < E_1$, muestre que se puede determinar l. Calcule l para $\theta = 30°$ y $E_1 = 1,3 \times 10^{-20} J$.

c) ¿A qué valor de E se debe tomar en cuenta el tamaño del núcleo?

2. Una partícula en un pozo cuadrado infinito tiene la función de onda inicial normalizada:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x) & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

con A una constante adecuada.

a) Grafique $\Psi(x,0)$ y encuentre la constante A.

b) Halle $\Psi(x,t)$.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado una medida de la energía sea el valor E_1.

d) Halle el valor esperado de la energía en el estado $\Psi(x,t)$.

3. Considere la función de onda:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}\, e^{-i\omega t}$$

donde A, λ y ω son constantes positivas.

a) Normalice Ψ.

b) Determine los valores esperados de x y x^2.

c) Halle la desviación estándar de x. Esboze el gráfico de $|\Psi|^2$ como función de x, y ubique los puntos con ordenadas $\langle x\rangle + \sigma$ y $\langle x\rangle - \sigma$ para ilustrar el sentido en que σ representa la dispersión en x. ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula sea encontrada fuera de este rango?

d) Encuentre un potencial tal que esta función de onda sea una solución a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, y encuentre la energía de la solución. El potencial y la energía están determinadas a menos de una constante aditiva. Para fijar el potencial completamente elíjalo cero lejos del origen.

e) Para este potencial, ¿hay alguna otra solución de la ecuacion de Schrödinger independiente del tiempo con energía mayor que cero?

4. Una partícula que se mueve en una dimensión tiene una función de estado dada por:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

A y a son constantes con dimensiones apropiadas.

a) Encuentre A.

b) ¿Para qué potencial $V(x)$ stisface Ψ la ecuación de Schrödinger?

c) Escriba la expresión para la densidad de probabilidad en el espacio de momento, $P(p)$.

d) Calcule los valores esperados de x, x^2, p y p^2.

e) Encuentre las incertidumbres de posición y momento, σ_x y σ_p.

f) ¿El producto $\sigma_x\sigma_p$ es consistente con el principio de incertidumbre?

5. Considere una partícula libre descrita por un paquete gaussiano cuya transformada de Fourier es inicialmente:

$$g(k,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}}\, e^{-(\frac{a}{2})^2(k-k_0)^2}$$

donde a y k_0 son constantes con dimensiones adecuadas.

a) Calcule $\Psi(x,0)$ y $|\Psi(x,0)|^2$.

b) Halle $g(k,t)$.

c) Utilizando el resultado anterior halle $\Psi(x,t)$, $|\Psi(x,t)|^2$ y la dispersión Δx en función del tiempo.

6. Considere un paquete de ondas con la forma general:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk$$

donde la función analítica $\omega = \omega(k)$ es la relación de dispersión de las ondas en el medio.

a) Asumiendo que la amplitud $g(k)$ está concentrada en torno a un valor $k = k_0$, la mayor contribución del integrando a $\Psi(x,t)$ será debida a los valores que tome en un entorno de k_0. De acuerdo a ello, la relación de dispersión se puede aproximar por

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} (k - k_0).$$

Haciendo el cambio de variable $s = k - k_0$ y sustituyendo esta aproximación en $\Psi(x,t)$, muestre que

$$\Psi(x,t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega_0 - k_0\omega_0')t} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_0 + s)\, e^{i(k_0+s)(x-\omega_0' t)}\, ds$$

donde $\omega_0 = \omega(k_0)$ y $\omega_0' = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$.

b) Muestre entonces que

$$\Psi(x,t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega_0 - k_0\omega_0')t} \Psi(x - \omega_0' t, 0)$$

y que por tanto (salvo un factor de fase) en esta aproximación el paquete de ondas se mueve con la *velocidad de grupo* $v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$.

c) En el caso tridimensional [1] muestre que $\vec{v}_g = \nabla_k \omega(\vec{k})\Big|_{k_0}$.

7. Demuestre que la energía E debe exceder al mínimo valor del potencial $V(x)$ para soluciones $\psi(x)$ normalizables de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

Ayuda: escriba la ecuación como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi.$$

Si fuese $E < V_{min}$, ψ y su derivada segunda tendrían el mismo signo. Muestre que en este caso ψ no podría ser normalizable.

8. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión en un potencial $V(x) = -\alpha\delta(x)$ con δ la distribución delta de Dirac y $\alpha > 0$.

a) Encuentre la función de onda del estado estacionario ligado ($E < 0$) de este potencial y su energía.

b) Halle el estado estacionario de energía $E > 0$ que tiende a $\phi(x) = e^{ikx}$ cuando $x \to \infty$. Aquí $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

9. Un pozo cuadrado finito unidimensional tiene potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -a \le x \le a \\ -V_1 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

con $V_1 > 0$.

[1] Ver por ej. Cohen-Tannoudji - Quantum mechanics, vol1, Cap. 1, comp. F.

a) Determine las energías de los estados ligados en este potencial. El resultado no se deja escribir explícitamente en términos de funciones elementales.

b) Dé una relación algebraica que determine estas energías y explique cómo se puede resolver gráficamente.