Práctico 1

Tomaremos $T = \mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$. Un sistema dinámico[1] (X, f) será una acción continua de T en X, es decir, una familia $f^t : X \to X$ de mapas continuos con la propiedad de que $f^{t+s} = f^t \circ f^s$.

La primer entrega está fijada para el 11 de octubre. En dicha ocasión se deberán entregar 10 ejercicios a elección de este práctico. Por cada semana adicional que se tome en entregar, habrá que sumar dos ejercicios más a la entrega, siendo que si al 30 de noviembre no se hizo la entrega, habrá que entregar el práctico completo resuelto el día del examen.

1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Mostrar que si A es un conjunto invariante al futuro (i.e. $f^t(A) \subset A$ para todo $t > 0$) entonces A^c es invariante al pasado.
2. Un sistema dinámico (X, f) es un factor de un sistema dinámico (Y, g) si existe un mapa continuo y sobreyectivo $h : Y \to X$ de forma tal que $h \circ g^t = f^t \circ h$ para todo $t \in T$. Mostrar que si A es un conjunto invariante al futuro para g entonces $h(A)$ lo es para f.
3. Describir la dinámica de un flujo en S^1.
4. Sea M un espacio métrico compacto. Sean $f : M \to M$ y $g : M \to M$ dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo $h : M \to M$ (esto es, $h \circ f = g \circ h$). Probar que:
   a) p es periódico por f sii $h(p)$ es periódico por g.
   b) p es recurrente (respec. fuertemente recurrente) por f sii $h(p)$ es recurrente (respec. fuertemente recurrente) por g.
   c) G es minimal por f sii $h(G)$ es minimal por g.
   d) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.
   e) Se define el conjunto estable de un punto x como
   $$W^s(x, f) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \longrightarrow_{n \to +\infty} 0\},$$
   y el inestable como $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$. Mostrar que $h(W^s(x, f)) = W^s(h(x), g)$ y analogamente para el conjunto inestable.
5. Sea M un espacio métrico compacto. Sean $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ y $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$ dos flujos. Se dicen que son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ que lleva órbitas de un flujo en órbitas del otro, esto es $h(\mathcal{O}(x, \phi)) = \mathcal{O}(h(x), \psi)$. Si ademas se cumple que $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$ $\forall t \in \mathbb{R}$ se dicen que son conjugados. Cuáles de las propiedades del ejercicio anterior se conservan para flujos equivalentes y cuáles para flujos conjugados?
6. Probar que las rotaciones R_α y R_β en $S^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ son conjugadas por un homeomorfismo si y solamente si $\alpha = \pm\beta$ (mod $\mathbb{Z}$).

[1]En ocasiones, T podría ser otro grupo, o incluso un semigrupo, por ejemplo, si consideramos un sistema dinámico no invertible, usaremos $T = \mathbb{N}$.

7. *a*) Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo. Mostrar que $\Phi|_{\mathbb{Z}\times M}$ es un sistema dinámico discreto ($f = \Phi_1$ se llama "tiempo 1" del flujo).

   b) Demostrar que si $f : M \to M$ es el tiempo 1 de un flujo entonces es isotópico a la identidad (dos homeos f_0, f_1 de M son isotópicos si existe $F : M \times [0,1] \to M$ continua tal que $F(.,0) = f_0, F(.,1) = f_1$ y $F(.,t) : M \to M$ es un homeo para cualquier $t \in [0,1]$).

   c) Encontrar un ejemplo de un sistema dinámico discreto que no sea el tiempo 1 de ningún flujo.

8. Sea M un espacio topológico compacto y $f : M \to M$ un homeomorfismo. En $M \times \mathbb{R}$ se considera el flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$, dado por $\Phi(t,(x,s)) = (x, t+s)$, y la siguiente relación:
$$(x, s_1) \sim (y, s_2) \iff s_1 - s_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } f^{s_1 - s_2}(x) = y.$$

   a) Mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Sea $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}/\sim$ y $\Pi : M \times \mathbb{R} \to \tilde{M}$ la proyección canónica. Se considera $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{M} \to \tilde{M}$ dada por $\tilde{\Phi}(t, \Pi(x,s)) = \Pi(\Phi(t,(x,s))$. Mostrar que $\tilde{\Phi}$ esta bien definida y que es un flujo en $\tilde{M}$. (este flujo se llama flujo suspensión de f.)

   c) Mostrar que $\tilde{M}_t = \Pi(M \times \{t\})$ es homeomorfo a M y que $\tilde{\Phi}_1$ deja invariante $\tilde{M}_t$ y es conjugado a $f : M \to M$.

   d) Si $M = S^1$ y $f : M \to M$ es la rotación de angulo α, R_α, identificar $\tilde{M}$ y $\tilde{\Phi}$.

   e) Si $M = S^1$ y $f : S^1 \to S^1$ es $f(x) = -x(mod 1)$, identificar $\tilde{M}$.

9. *a*) Sea G un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Probar que G es discreto (y en ese caso $G = d\mathbb{Z}$) o que es denso en $\mathbb{R}$. (sug: considerar $d = \inf\{g \in G : g > 0\}$)

   b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $G_\alpha = \{n\alpha + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Probar que G_α es discreto sii $\alpha \in \mathbb{Q}$.

   c) Sea $R_\alpha : S^1 \to S^1, R_\alpha(x) = x + \alpha \ (mod\ 1)$. Verificar que la órbita de x por R_α es $\Pi(x + G_\alpha)$ donde $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es la proyección canónica. Deducir de aquí la dinámica de R_α.

10. Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ un homeomorfismo. Decimos que f es *distal* si para todo $x \neq y$ se cumple que $\liminf d(f^n(x), f^n(y)) > 0$. Probar que si $\{f^n\}_{n>0}$ es una familia equicontinua de homeomorfismos, entonces f es distal.

11. Encontrar ejemplos de:

    a) Puntos no errantes que no sean recurrentes.

    b) Puntos recurrentes que no sean fuertemente recurrentes.

12. Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ homeomorfismo. Una ϵ-cadena de x a y es una conjunto finito $x_0 = x, x_1, \ldots X_n = y$ tal que $dist(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ para $i = 0, ..., n-1$. Decimos que x es recurrente por cadenas si para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ-cadena de x a x. Denotamos por $\mathcal{R}(f)$ el conjunto de los puntos recurrentes por cadenas.

    a) Probar que $\mathcal{R}(f)$ es cerrado e invariante.

    b) Probar que $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$.

    c) Probar que $\mathcal{R}(f|_{\mathcal{R}(f)}) = \mathcal{R}(f)$.

13. Mostrar que si f y g son conjugados por un homeomorfismo h entonces:

   a) $h(\mathrm{Per}_k(f)) = \mathrm{Per}_k(g)$.
   b) $h(\omega(x)) = \omega(h(x))$.
   c) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.
   d) $h(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(g)$.

14. Mostrar que si $f : X \to X$ es una extensión topológica de $g : Y \to Y$ con un mapa $h : X \to Y$ con X, Y compactos entonces se cumple que:

   a) $h(\mathrm{Per}_k(f)) \subset \mathrm{Per}_k(g)$. Mostrar que la inclusión puede ser estricta.
   b) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.
   c) $h(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(g)$.
   d) Si f es transitivo entonces g también lo es. ¿Vale el recíproco?

15. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Definimos los conjuntos

$$L^+(f) = \overline{\cup_{x \in M} \omega(x)},\ L^-(f) = \overline{\cup_{x \in M} \alpha(x)}\ y\ L(f) = L^+(f) \cup L^-(f).$$

Denotamos por $Per(f)$ es conjunto de los puntos periódicos de f. Demostrar que

$$Per(f) \subset L^+(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f).$$

Encontrar ejemplos donde estas inclusiones sean estrictas.

16. *a*) Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Probar que si $\mathcal{O}(x)$ es compacto entonces x es periódico. (sug: si x no es aislado en $\mathcal{O}(x)$ entonces $\mathcal{O}(x)$ es perfecto.)
   b) Probar un resultado análogo para flujos (sug: si la órbita por x no es fija ni periódica encontrar q_n, ϵ_n y $t_n \to \infty$ tales que

$$B(q_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \subset B(q_n, \epsilon_n) \text{ y } \overline{B(q_n, \epsilon_n)} \cap \{\Phi_t(x) : -t_n \leq t \leq t_n\} = \emptyset.$$

17. Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Un punto $p \in M$ se dice que es uniformemente fuertemente recurrente si dado $\epsilon > 0$ existe L tal que el conjunto $\{m \in \mathbb{Z} : d(f^m(p), q) < \epsilon\}$ es L-relativamente denso cualquiera sea q en la orbita de p.

   a) Probar que si la órbita de un punto p tiene clausura compacta, entonces p es fuertemente recurrente sii es uniformemente fuertemente recurrente.
   b) Si p es uniformemente fuertemente recurrente, entonces la órbita de p es un conjunto totalmente acotado.
   c) Probar que p es uniformemente fuertemente recurrente sii la clausura de la órbita de p es un minimal compacto.
   d) Si p es casi-periódico entonces p es uniformemente fuertemente recurrente.

18. *a*) Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica de período 1. Probar que

$$\int_s^{s+1} \Phi(t)dt = \int_0^1 \Phi(t)dt.$$

b) Considere $R_\alpha : S^1 \to S^1$ rotación con α irracional y sea $\Phi : S^1 \to \mathbb{R}$ continua. Probar que Φ_n, definida por

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \Phi(R_\alpha^j(x)),$$

converge uniformemente a una constante (sug: usar Arzela-Ascoli y que las integrales de Φ_n son todas iguales).

19. *El C^0 closing lemma:*

   a) Sea $\epsilon > 0$. Probar que si $y \in \mathbb{R}^n$ satisface $\|y\| < \epsilon$ entonces existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que:

   - $h(0) = y$
   - $h(x) = x$ si $\|x\| \geq \epsilon$.
   - $\|h(x) - x\| \leq \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   Sugerencia: Considerar $\phi : [0, +\infty) \to [0, 1]$ dada por $\phi(t) = 1 - t$ si $0 \leq t \leq 1$ y $\phi(t) = 0$ si $t \geq 1$ y definir $h(x) = x + \phi\left(\frac{\|x\|}{\epsilon}\right) y$.

   b) Sea M una variedad compacta y sea $f : M \to M$ homeomorfismo y x un punto recurrente. Dado $\epsilon > 0$ probar que existe $g : M \to M$ homeomorfismo tal que $dist(g(z), f(z)) < \epsilon$ para todo $z \in M$ y tal que x es periódico para g. Probar un resultado análogo si $x \in \Omega(f)$.

20. Decimos que G es un grupo topológico si es un espacio topológico y a la vez un grupo donde las operaciones del grupo (multiplicación e inverso) son funciones continuas. Definimos $L_g : G \to G$ por $L_g(h) = gh$. Mostrar que es un homeomorfismo. Probar que la clausura de la órbita de la identidad (es decir, el conjunto $\overline{\{L_g^n(\mathrm{id})\}_{n\in\mathbb{Z}}}$) es un subgrupo abeliano de G.

21. Estudiar el mapa L_g en grupos finitos. Mostrar que toda órbita es periódica. ¿Tienen todas las órbitas el mismo período?

22. Sea G un grupo topológico y $g \in G$.

   a) Probar que L_g es transitivo sii G es minimal por L_g.

   b) Si G es compacto, probar que todo punto es recurrente.

23. Sea $f : T^2 \to T^2$ dado por $f(z, w) = (z + \alpha, z + w)$ con α irracional. Probar que T^2 es minimal.

24. Sea N un espacio topológico, $f : N \to N$ un homeomorfismo, K un grupo topológico compacto y $\phi : N \to K$ una aplicación continua. Definimos un sistema dinámico (llamado "skew product") en $M = N \times K$ dado por $F(y, k) = (f(y), \phi(y)k)$.

   a) Si definimos $R_g : M \to M$ por $R_g(y, k) = (y, kg)$ probar que $R_g \circ F = F \circ R_g$. Concluir que si $(y, k) \in \omega(y_0, k_0)$ entonces $(y, kg) \in \omega(y_0, k_0 g)$.

   b) Probar que si $y_0 \in N$ es recurrente por f entonces (y_0, k) es recurrente por F para todo $k \in K$. (Sug: probarlo primero para la identidad).

   c) Si N es minimal para f, ¿es M minimal para F?

d) Considere $F : T^2 \to T^2$ dado por $F(z,w) = (z+\alpha, w+2z+\alpha)$. Mostrar que $(0,0)$ es recurrente y concluir que para todo número real α y $\epsilon > 0$ hay solución de la ecuación diofantina $|\alpha n^2 - m| < \epsilon$.

e) Si $p(x)$ es un polinomio real con $p(0) = 0$, mostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay solución de la ecuación diofantina $|p(n) - m| < \epsilon$. (sug: si d es el grado de p considerar $F : T^d \to T^d, F(z_1, ..., z_d) = (z_1 + \alpha, z_2 + z_1, ..., z_d + z_{d-1})$ y los polinomios $p_d = p, p_{i-1}(x) = p_i(x+1) - p_i(x)$. ¿Quién es $F^n(p_1(0), ..., p_d(0))$?

25. Sea $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ y consideramos $\Sigma_N = \{0, \dots, N-1\}^{\mathbb{Z}}$ con la topología producto. Definimos $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ (llamado el *shift completo*) como $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$ donde si denotamos $\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ puntos de Σ_N se cumple que $y_i = x_{i+1}$.

    a) Mostrar que σ es un homeomorfismo.

    b) Mostrar que σ es *topológicamente mixing* (i.e. para todo $U, V \subset \Sigma_N$ abiertos, existe $n_0 > 0$ tal que si $n > n_0$ entonces $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$).

    c) Mostrar que el conjunto de puntos periódicos de σ es denso en Σ_N (en particular, deducir que σ no es minimal).

    d) Un compacto $X \subset \Sigma_N$ invariante por σ se llama *subshift* y para un tal X denotamos $\sigma : X \to X$ a la restricción. Mostrar que existen subshifts minimales.

26. Sea $A = (a_{ij})_{i,j\in\{0,\dots,N-1\}}$ una matriz simétrica de ceros y unos. Considerar $\Sigma_A = \{\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_N \ : \ a_{x_{i+1}x_i} = 1\}$.

    a) Mostrar que Σ_A es un subshift.

    b) Mostrar que si existe n_0 tal que A^{n_0} es definida positiva, entonces Σ_A es transitivo.

    c) Mostrar que si existe n_0 tal que A^n es definida positiva para todo $n \geq n_0$ entonces Σ_A es topologicamente mixing.

    d) Dar un ejemplo de un subshift transitivo que no sea topologicamente mixing.

    e) Calcular el número de puntos periódicos de período $\leq n$ y el número de orbitas periódicas de período $\leq n$ (notar que no son la misma cosa).

27. Mostrar que un campo de vectores diferenciable en una variedad compacta define un flujo diferenciable en la variedad.

28. Una matriz $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ actua en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ de forma tal que la imágen de un subespacio de dimensión uno $\xi \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ es el subespacio $A\xi \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Mostrar que esta acción induce un difeomorfismo $\mathbb{P}(A)$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

    a) Mostrar que siempre existe $\hat{A} \in \mathrm{SL}_2^{\pm 1}(\mathbb{R})$ (las matrices de determinante 1 o -1) tal que $\mathbb{P}(A)$ es conjugada a $\mathbb{P}(\hat{A})$. Describir la regularidad de la conjugación (¿es diferenciable? ¿ es mejor que diferenciable?).

    b) Una matriz $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (matrices de determinante 1) se dice *hyperbólica*, *parabólica* o *elíptica* en funcion de que $|\mathrm{traza}(A)|$ sea > 2, $= 2$ o < 2 respectivamente. Discutir la dinámica de $\mathbb{P}(A)$ en función de esto. Calcular la derivada en los puntos fijos de $\mathbb{P}(A)$ cuando estos existan.

    c) Usar las partes anteriores para describir completamente la dinámica de $\mathbb{P}(A)$ para cualquier $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

    d) ¿Cómo es esta dinámica en dimensiones mayores?

29. Mostrar que si $f : X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio métrico compacto tal que $\Omega(f) = X$ entonces hay un conjunto denso de puntos recurrentes. Deducir que en ese caso $\Omega(f^2) = \Omega(f)$. Dar un ejemplo de un homeomorfismo donde $\Omega(f^2) \neq \Omega(f)$.

30. (**Solenoide de Smale**) Sea $M = \mathbb{D}^2 \times S^1$ pensando $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1\}$ y $S^1 = \{w \in \mathbb{C} \,:\, |w| = 1\}$. Consideramos $f : M \to M$ el siguiente mapa:

$$f(z, w) = \left(\frac{z}{8} + \frac{w}{2}, w^2\right).$$

  a) Mostrar que f es un encaje diferenciable.

  b) Mostrar que $\Lambda = \bigcap_{n\geq 0} f^n(M)$ es un conjunto compacto f-invariante tal que $f|_\Lambda$ es un homeomorfismo.

  c) Mostrar que los puntos periódicos de f en Λ son densos y que $f|_\Lambda$ es topologicamente mixing.

  d) Mostrar que Λ no es una variedad.