Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2023

Práctico 1

1. Hallar los conjuntos equilibrados de $\mathbb{F}$. ¿Cuáles son las topologías vectoriales de $\mathbb{F}$?

2. Sea X un espacio vectorial. Se sobrentiende que todos los conjuntos mencionados a continuación son subconjuntos de X. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $2A \subseteq A + A$, y la inclusión puede ser estricta.
   b) A es convexo sii $(s + t)A = sA + tA$, $\forall s, t > 0$.
   c) Toda unión de conjuntos equilibrados es equilibrada.
   d) Toda intersección de conjuntos equilibrados es equilibrada.
   e) Si Γ es una colección de conjuntos convexos totalmente ordenada por inclusión, entonces la unión de todos los elementos de Γ es convexa.
   f) Toda intersección de conjuntos convexos es convexa.
   g) Si A y B son convexos, también lo es $A + B$.
   h) Si A y B son equilibrados, también lo es $A + B$.

3. La *envolvente convexa* de un subconjunto A de un espacio vectorial X es el conjunto de todas *combinaciones convexas* de elementos de A, es decir, el conjunto de todas las sumas $t_1x_1 + \ldots + t_nx_n$, donde $x_j \in A$, $t_j \geq 0$, $\sum t_j = 1$, y n es arbitrario. Probar que la envolvente convexa de A es convexa, y que coincide con la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A.

4. Sea X un espacio vectorial topológico. Todos los conjuntos mencionados a continuación son subconjuntos de X. Probar los siguientes asertos:

   a) La envolvente convexa de todo abierto es abierta.
   b) Si X es localmente convexo, entonces la envolvente convexa de todo conjunto acotado es acotada (esto es falso cuando falta la convexidad local).
   c) Si A y B son acotados, también lo es $A + B$.
   d) Si A y B son compactos, también lo es $A + B$.
   e) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.
   f) La suma de dos conjuntos cerrados puede no ser cerrada.

5. ¿Se alterará el contenido de la definición de conjunto acotado dada en clase si se exige solamente que para cada entorno V de 0 exista *algún* $t > 0$ tal que $A \subseteq tV$?

6. Probar que un subconjunto A de un espacio vectorial topológico es acotado sii todo subconjunto numerable de A es acotado.

7. Sean X un espacio vectorial topológico, Y un subespacio de X, y $q : X \to X/Y$ la proyección canónica. Se considera en X/Y la topología cociente (es decir: $A \subseteq X/Y$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(A)$ es abierto en X). Probar que:

   a) La aplicación q, además de ser continua, es abierta.

   b) X/Y es un espacio vectorial topológico con la topología cociente.

   c) X/Y es de Hausdorff si y sólo si Y es cerrado en X.

   d) Si X es localmente convexo, Y también lo es.

8. Sean $K = [0, 1]$, y sobre $\mathcal{D}_K := \{x \in C^\infty(\mathbb{R}) : x(t) = 0 \, \forall t \notin K\}$ consideremos las tres siguientes familias de seminormas, donde $D = d/dx$:

   a) $\|D^n x\|_\infty := \sup\{|D^n x(t)| : t \in K\}, \ \forall n = 0, 1 \dots.$

   b) $\|D^n x\|_1 := \int_0^1 |D^n x(t)| \, dt, \ \forall n = 0, 1 \dots.$

   c) $\|D^n x\|_2 := \left\{\int_0^1 |D^n x(t)|^2 \, dt\right\}^{1/2}, \ \forall n = 0, 1 \dots.$

   Probar que las tres familias definen la misma topología

9. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{F}^m$ un abierto no vacío, y $(K_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de compactos tales que $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}, \forall n \geq 1$, y $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \Omega$. Sobre $C(\Omega)$ se considera la topología definida por las seminormas p_n tales que

   $$p_n(x) = \sup\left\{|x(t)| : t \in K_n\right\}, \ \forall n \geq 1.$$

   Probar que la topología de $C(\Omega)$ no depende de la sucesión $(K_n)_{n\geq 1}$ elegida.

   Repetir el ejercicio para $C^\infty(\Omega) := \{x : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : x \text{ es infinitamente diferenciable}\}$, con la topología definida por las seminormas q_n, definidas como:

   $$q_n(x) = \max\left\{p_n(D^\alpha x) : \alpha \in \mathbb{N}^m, \text{ con } |\alpha| \leq n\right\}, \ \forall n \geq 1.$$

   (si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ es un multi–índice, entonces $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$).

10. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{F}^n$ un abierto no vacío, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi–índice cualquiera, $K \subseteq \Omega$ un subconjunto compacto con interior no vacío, y

    $$\mathcal{D}_K := \{x \in C^\infty(\Omega) : x(t) = 0, \ \forall t \notin K\},$$

    con la topología heredada de la de $C^\infty(\Omega)$. Probar que las aplicaciones $C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{D}_K \longrightarrow \mathcal{D}_K$ dadas por $x \longmapsto D^\alpha x$ son continuas.

11. *Espacios de dimensión finita*

    a) Probar que un espacio vectorial X de dimensión finita n admite una única topología vectorial de Hausdorff (para el caso $n = 1$ puede ser útil el Ejercicio 1; para $n > 1$ usar el Ejercicio 7 para probar, por inducción, que cualquier funcional lineal de X es continua).

    b) Demostrar que todo subespacio de dimensión finita Y de un espacio vectorial topológico de Hausdorff X es cerrado en X.